完美幻方
基本理论与编制方法

WANMEI HUANFANG JIBEN LILUN YU BIANZHI FANGFA

- 胡泰培 编著 -



电子科技大学出版社

策划编辑 徐守仁
责任编辑 雷晓丽
封面设计 墨创 M.C CULTURE

完美幻方
基本理论与编制方法

WANMEI HUANFANG JIBEN LILUN YU BIANZHI FANGFA

ISBN 978-7-5647-1132-0



定价: 58.00元

完美幻方

基本理论与编制方法

- 胡泰培　编著 -



电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

完美幻方基本理论与编制方法 / 胡泰培编著. 一成都：电子科技大学出版社，2012. 5
ISBN 978-7-5647-1132-0

Ⅰ. ①完… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①组合数学一研究 Ⅳ. ① O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 066830 号

完美幻方基本理论与编制方法

胡泰培 编著

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：徐守仁
责任编辑：雷晓丽
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸：210 mm×285 mm　　印张 24.75　　字数 666 千字
版　　次：2012 年 5 月第一版
印　　次：2012 年 5 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-1132-0
定　　价：58.00 元

前　言

本书是专门研究完美幻方的书，给出了编制完美幻方的基本理论和制作方法. 所谓n阶完美幻方，就是用n^2个不同数字组成的n阶数字方阵，其n个行，n个列，n条左斜对角线，n条右斜对角线上的n个元素之和都等于n阶幻和Σ_n. 有的书把这种数字方阵称为泛对角线幻方. 显然，这种完美幻方比通常的幻方所要求的条件要强得多. 通常的n阶幻方，除了对各行、各列外，只要求主对角线上的n个元素之和等于n阶幻和Σ_n. 但是，正是条件的加强，令人意外地使完美幻方具有了更完整的规律性. 从而使完美幻方的理论体系和编制方法都能够准确地、完美地表述. 本书简洁明了地表述了这些主要成果. 用书中提供的编制方法可以成批成批地给出相应阶的完美幻方，并不是偶然地得到个别完美幻方而已.

本书的主要成果有：对作为n阶分段方的行、列序的n级排列（即有些文章所述的“密码”）进行了有意义的分类和研究；给出了完美幻方的同构概念及基本的完美幻方概念；最主要的成果是定义了n阶数字方阵的行或列的Z变换，并对它的基本理论进行了简洁而有效的研究；从而给出了n^2个不同数字的幻和分组，以及对它们进行幻和分组的简洁具体方法；在这种基本理论的指导下，我们对素数阶，3因数奇阶，双2因数偶阶，单2因数偶阶完美幻方分别给出了有效的编制方法，并由此编制了许许多多的各阶完美幻方；我们还讨论了完美幻方的运算，特别是完美幻方的乘积理论，从而为编制更高阶的完美幻方提供了有效的方法；n级排列与n阶数字方阵的对称性研究；对n阶完美幻方的特优性也作出了恰当的研究等. 作为本书的基本理论，我们在书中提出了30来个新颖而别致的定理，并且全都给出了严格的数学证明. 但是，阅读本书除了用到排列，组合和简单的同余、矩阵概念外，并不需要其他更高深的数学知识. 而且，本书所建议的编制方法在计算机上也很容易实现，而无需编程.

利用本书所介绍的方法编制完美幻方有如下特点：1. 按方法编制必定可得到所希望得到的完美幻方；2. 可以成批地得到相应阶的完美幻方；3. 编制操作可直接在计算机上进行，无需编程；4. 计算量极小，极易检查.

感谢关心和支持本书出版的友好人士，也感谢出版社工作人员的宝贵意见和辛劳工作.

作　者

2012年4月

目 录

第 1 章 *n* 级排列之同态性 1

一、*n* 级排列的同态性 1

二、*n* 级排列的对称性 3

第 2 章 完美幻方及其同构变换 6

一、*n* 阶完美幻方 6

二、完美幻方的变换 7

三、同构的完美幻方 9

四、常用的完美幻方 11

第 3 章 方阵的行 Z 变换与幻和组 15

一、方阵的行 Z 变换与行排列方阵 15

二、行排列方阵 16

三、*n* 阶分段方 17

四、不存在 2、3 阶完美幻方 22

第 4 章 素数阶完美幻方 23

一、5 阶完美幻方 23

二、7 阶完美幻方 26

三、11 阶完美幻方 33

四、13 阶完美幻方 48

五、17 阶完美幻方 61

六、素数 *n* 阶完美幻方 92

第 5 章 完美幻方之运算 98

一、完美幻方的线性运算 98

二、乘法定理 99

第 6 章 完美幻方的特优性 119

一、奇阶完美幻方的特优性理论 119

二、5 阶完美幻方的特优性 121

三、7 阶完美幻方的特优性 125

四、11 阶完美幻方的特优性 136

五、13 阶完美幻方的特优性 159

六、乘积完美幻方的特优性 178

第 7 章　9 阶完美幻方 188

一、9 阶列和方与可幻的 9 级排列 188

二、9 阶完美幻方的特优性 194

三、27 阶完美幻方 207

第 8 章　3 因数奇阶完美幻方 228

一、可幻 15 级排列 228

二、15 阶完美幻方举例 231

三、一般的 n 阶 3 因数完美幻方 249

第 9 章　4 阶完美幻方和偶阶对顶互补型完美幻方 258

一、4 阶完美幻方 258

二、对顶互补型完美幻方的基本定理 262

第 10 章　双 2 因数偶阶完美幻方 266

一、8 阶完美幻方 266

二、12 阶完美幻方 276

三、阶数更高的双 2 因数阶完美幻方 285

四、互补法构作双 2 因数阶完美幻方 307

第 11 章　单 2 因数偶阶完美幻方 316

一、6 阶对顶互补完美幻方 316

二、特优的 6 阶完美幻方 319

三、10 阶完美幻方 324

四、完美幻方的合成法 336

五、18 阶完美幻方 338

第 12 章　偶阶平方完美幻方 342

一、6 阶平方完美幻方 342

二、可平方完美幻方的排列 344

三、6、8 阶平方完美幻方 345

四、10 阶特优的平方完美幻方 348

五、14 阶特优的平方完美幻方 361

六、18 阶特优的平方完美幻方 379

参考文献 390

第1章 n级排列之同态性

一、n级排列的同态性

n个不同元素: $1, 2, 3,\cdots,n$ 组成的任一排列, 称为一个n级排列. 其排列总数是$n!$. 例如, $n=4$时, 有$4!=24$个4级排列:

$$\begin{array}{llll}(1,2,3,4), & (2,3,4,1), & (3,4,1,2), & (4,1,2,3), \\ (1,4,3,2), & (4,3,2,1), & (3,2,1,4), & (2,1,4,3), \\ (1,2,4,3), & (2,4,3,1), & (4,3,1,2), & (3,1,2,4), \\ (1,3,4,2), & (3,4,2,1), & (4,2,1,3), & (2,1,3,4), \\ (1,3,2,4), & (3,2,4,1), & (2,4,1,3), & (4,1,3,2), \\ (1,4,2,3), & (4,2,3,1), & (2,3,1,4), & (3,1,4,2).\end{array} \tag{1}$$

对于给定的n级排列, 依次把排列之首元 (或尾元) 移做排列之尾元 (首元), 所得称为原排列之轮回排列. 上列各行之排列, 依次都是由第一个排列所得之轮回排列. 显然, 对每一个给定的n级排列, 通过元素的轮回, 可产生n个轮回排列.

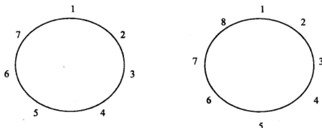
对于每一个n级排列

$$\pi=(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_n) \qquad i_j\in\{1,2,3,\cdots,\ n\} \tag{2}$$

的足标, 即各元素在排列π中的位置标号, 都可以构作成一个n级自然排列$\lambda_1=(1,2,\ 3,\cdots,n)$, 称$\lambda_1$是排列$\pi$的足标排列. 由于各$i_j\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, $j=1,2,\ 3,\cdots,\ n$. 从而n级排列π之各元与其足标排列λ_1各元之间可建立一一对应关系.

现在, 把足标排列$\lambda_1=(1,2,3,\ \cdots,\ n)$之各元依次等距离地安置在一个圆周上, 再从点1开始, 作等距离跳跃前行. 在前行中, 遍历排列λ_1之所有各元一次且仅一次, 所得排列称为足标排列的循环排列. 例如, $n=7$时, 有循环排列

$$\begin{array}{ll}\lambda_1=(1,2,3,4,5,6,7), & \lambda_6=(1,7,6,5,4,3,2), \\ \lambda_2=(1,3,5,7,2,4,6), & \lambda_5=(1,6,4,2,7,5,3), \\ \lambda_4=(1,5,2,6,3,7,4), & \lambda_3=(1,4,7,3,6,2,5).\end{array} \tag{3}$$



(图1)

当 $n=8$ 时，有循环排列

$$\lambda_1=(1,2,3,4,5,6,7,8),\ \lambda_7=(1,8,7,6,5,4,3,2),$$
$$\lambda_3=(1,4,7,2,5,8,3,6),\ \lambda_5=(1,6,3,8,5,2,7,4). \tag{4}$$

注意，$n=8$ 时，(1,3,5,7,2,4,6,8)不是λ_1的循环排列. 因为，由 7 至 2，由 8 至 1 的跳跃距离不等于由 1 至 3 的跳跃距离：$3-1=2$. λ_j 的足标 j 就是该循环排列中前两个相邻两数之跳跃距离. 在这些循环排列中，对每一个λ_j，总有一个与之匹配的λ_{n-j}. λ_j与λ_{n-j}在圆形图(如图 1 所示)上是跳跃距离相等而行进方向相反的循环排列，因此称它们是互逆的. 显然，不计较轮回的排列就是所谓圆排列.

将 n 级足标排列λ_1，分别作用于任意的 n 级排列π，将得到由排列π产生的 n 级循环排列. 例如，当 $n=7$ 时，设

$$\pi_1=(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)=(3,5,4,2,1,7,6);$$

则有π_1之循环排列

$$\pi_2=(i_1, i_3, i_5, i_7, i_2, i_4, i_6)=(3,4,1,6,5,2,7);$$
$$\pi_4=(i_1, i_5, i_2, i_6, i_3, i_7, i_4)=(3,1,5,7,4,6,2).$$

同理有π_3, π_5, π_6. n 级排列π的循环排列也是成对互逆的.

由 n 级排列π与其足标排列λ_1的对应性，关于 n 级排列π的结论可通过对足标排列λ_1研究而导出.

引理　对给定的自然数 $n, k\ (0<k<n)$，当 n, k 互素，即 $\gcd(n,k)=1$ 时，有

$$0k,\ 1k,\ 2k,\ \cdots,\ (n-1)k \pmod n \tag{5}$$

构成模 n 完全剩余系：$0,1,2,\cdots,n-1$. $\gcd(n,k)$表示 n, k 的最大公约数.

证明　只需证明上列 n 个数的模 n 之余互不相等即可. 设 $0<i<j<n$，有

$$ik\equiv jk \pmod n$$

因 $\gcd(n,k)=1$，有 $i\equiv j \pmod n$，与 $0<i<j<n$ 矛盾，故结论成立.

定理 1　对给定的自然数 $n(n\geqslant 4)$，若 $\gcd(n,k)=1$, $(0<k<n)$，则

$$\lambda_k=(1, k+1, 2k+1, \cdots, (n-1)k+1) \pmod n \tag{6}$$

是足标排列λ_1的一个跳跃距离为 k 的 n 级循环排列. 其中$jk+1 \pmod n\in\{2,3,\cdots,n\}$, $j=1,2,3,\cdots,(n-1)$.

证明　由引理知

$$1,\ 1k+1,\ 2k+1,\cdots,(n-1)k+1 \pmod n$$

构成模 n 完全剩余系：$1,2,3,\cdots,n$. 因此，λ_k 遍历数集$\{1,2,3,\cdots,n\}$. 同时，λ_k中相邻二数之跳跃距离均为 k. 特别地，从排尾到排头的跳跃距离为

$$1-[(n-1)k+1]=-(n-1)k$$
$$\equiv k \pmod n.$$

因此，λ_k是由λ_1产生的跳跃距离为 k 的 n 级循环排列，故结论成立.

推论　对给定的自然数 $n(n\geqslant 4)$，由 n 级足标排列λ_1可产生$\varphi(n)$个，或$\varphi(n)/2$对互逆的 n 级循环排列. 其中$\varphi(n)$是自然数 n 的欧拉函数，即 $1,2,3,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的数之个数. 特别的，当 n 是奇素数时，$\varphi(n)=n-1$，此时有 $n-1$ 个 n 级循环排列：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$.

足标排列λ_j作用于任一给定的 n 级排列π，也将产生$\varphi(n)$个π的循环排列. 这些循环排列分别经过元素的轮回，又将各自产生 n 个 n 级轮回排列. 因而，有 $n\varphi(n)$个 n 级排列与指定排列π一样，它们都是由数 $1,2,3,\cdots,n$ 在圆周上的同一个圆排列状态产生的. 故把所有这些排列称为 n 级排列的一个同态类，即它们都是与指定 n 级排列π同态的 n 级排列. 因此，所有的 $n!$个 n 级排列，按同

态分类，可分为

$$\lambda(n)=\frac{n!}{n\varphi(n)}=\frac{(n-1)!}{\varphi(n)} \tag{7}$$

个同态类. 特别地，当 n 是奇素数时，$\lambda(n)=(n-2)!$.

因 $\varphi(4)=2$，故 4 级排列可分为 $\lambda(4)=\frac{3!}{2}=3$ 个同态类. (1)中每两行的 8 个 4 级排列分别构成一个同态类.

容易检验，对任意给定的 n 级排列 π: 1. 当 n 是奇数时，反复应用二步跳 π_2(或称间 1 跳); 2. 当 n 是偶数，且不含因数 3 时，反复应用三步跳 π_3(或称间 2 跳); 3. 一般地，当 $\gcd(n, k)=1$ 时，反复应用 k 步跳 π_k(或称间 k-1 跳). 再结合排列的逆序，就可以给出给定排列 π 的所有循环排列.

二、n 级排列的对称性

这里只对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$进行讨论. 若 n 级排列

$$\pi=(i_1, i_2,\cdots, i_{r-1}, i_r, i_{r+1}, \cdots, i_{n-1}, i_n)$$
$$i_j\in\{1,2,3,\cdots,n\};\ j=1,2,3,\cdots,n \tag{8}$$

满足条件

$$\begin{aligned} i_1+i_n = i_2+i_{n-1} &=\cdots= i_{r-1}+i_{r+1} \\ &= i_r+i_{r+2} = n+1, \\ i_{r+1} &= \frac{n+1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

则称 π 是对称的 n 级排列. 条件(9)称为排列的对称性条件.

对称的 n 级排列，经过元素的轮回，所得排列仍看成是对称的. 虽然此时中间数 $r+1$ 不一定处在排列的中心位置.

定理 2　对于奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，若排列 π 是对称的 n 级排列，则由之产生的循环排列仍然是对称的.

证明　前已指出，对于奇数 n, n 级排列 π 的循环排列，总可以通过对给定排列 π 的间 1 跳或逆序产生. 例如，当 $r+1$ 是奇数时，由(7)作 π 的间 1 跳跃，有

$$(i_1, i_3,\cdots,i_{r-1}, i_{r+1}, i_{r+3},\cdots,i_{n-2}, i_n,$$
$$i_2, i_4,\cdots,i_r, i_{r+2},\cdots,i_{n-1});$$

当 $r+1$ 是偶数时，有

$$(i_1, i_3,\cdots,i_r, i_{r+2},\cdots, i_{n-2}, i_n,$$
$$i_2, i_4,\cdots, i_{r-1}, i_{r+1},\cdots,i_{n-1}).$$

经过适当的元素轮回，此两种排列可变为:

$$(i_{r+2},\cdots, i_{n-1}, i_1, i_3,\cdots,i_{r-1},$$
$$i_{r+1}, i_{r+3},\cdots,i_{n-2}, i_n, i_2, i_4,\cdots,i_r); \tag{10}$$

$$(i_{r+2},\cdots, i_{n-2}, i_n, i_2, i_4,\cdots,i_{r-1},$$
$$i_{r+1}, i_{r+3},\cdots,i_{n-1}, i_1, i_3,\cdots,i_r). \tag{11}$$

若排列 π 满足对称性条件(9)，这两个循环排列显然也满足对称性条件(9). 因而，对称排列经过循环，所得排列仍是对称的. 逆序显然不改变排列的对称性.

据此，对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，可用下列程序构造所有的对称的 n 级排列:

1. 数 1 固定地置于排列之第一位，这排除了轮回对排列的影响. 当中间数 $r+1$ 的位置确定之后，数 n 的位置对称地确定;

2. $r-1$ 个数 $2,3,\cdots,r-1,r$ 有 $(r-1)!$ 个不同的排列;

3. 给定 $2,3,\cdots,r-1,r$ 的一个排列. 相应地，互补数: $n-1,n-2,\cdots,r+3,r+2$ 对称地组成排列; 而且，这两个排列中，互补的两数可以相互交换. 这里，k 的互补数是与 $k(k=2,3,\cdots,r)$ 之和恰为 $n+1$ 的数. 排列中互补数的可相互交换数为 2^{r-1};

4. 对 $2,3,\ldots,r-1,r$ 的任一排列，包括排头、排尾、各中间夹缝共有 r 个不同的位置安放中间数 $r+1$;

5. 由前 4 步给出一个对称排列后，中间数 $r+1$ 还有另外一种对偶的安置法. 如 $n=9$ 时

$$\begin{gathered}(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\to(1,2,3,4,6,7,8,9,5)\\(1,2,4,5,6,8,9;3,7)\to(1,2,4,6,8,9;3,5,7)\end{gathered}\tag{12}$$

等. 由此，对奇数 $n=2r+1(r=1,2,3,\cdots)$，对称的 n 级排列的同态类数为

$$\mu_1(n)=\frac{(r-1)!2^{r-1}r^2}{\varphi(n)}=\frac{r!2^r}{\varphi(n)}\tag{13}$$

例如，$n=7$ 时，$\mu_1(7)=8$，故 7 级排列有下列 8 个对称的同态类:

$$\begin{gathered}(1,2,3,4,5,6,7),\quad(1,2,6,7;3,4,5),\\(1,2,5,4,3,6,7),\quad(1,2,6,7;5,4,3),\\(1,2,4,6,7;3,5),\quad(1,2,5,3,6,7,4),\\(1,2,4,6,7;5,3),\quad(1,2,3,5,6,7,4).\end{gathered}\tag{14}$$

对于奇数 $n=2r+1$，除了以中间数 $r+1$ 为中心的对称排列外，还有以 1 或 n 为对中心的偏对称排列. 例如，当 $n=5$ 时，有

中心数 1: $(2,3,1,4,5),(4,2,1,5,3),2+5=3+4=7$,

中心数 5: $(1,3,5,2,4),(2,4,5,1,3),1+4=2+3=5$.

一般地，n 级排列 $(n=2r+1)$

$$\pi=(i_1,\ i_2,\cdots,\ i_r,\ i_{r+1},\ i_{r+2},\cdots,\ i_{n-1},\ i_n)\tag{15}$$

满足条件

1. 中心数 $i_{r+1}=1$，且

$$i_1+i_n=i_2+i_{n-1}=\cdots=i_r+i_{r+2}=n+2\quad\text{或}\tag{16}$$

2. 中心数 $i_{r+1}=n$，且

$$i_1+i_n=i_2+i_{n-1}=\cdots=i_r+i_{r+2}=n\tag{17}$$

则称 π 是偏中心的对称排列.

对于奇数 $n=2r+1$，有以中心数 $r+1$ 为对称中心的 n 级对称排列; 还有以数 1 或 n 为对称中心的偏中心对称的 n 级排列. 除此外，其他数不可能作对称中心. 因为 $n=2r+1$ 时，有

$$\begin{aligned}s_n&=1+2+3+\cdots+n\\&=\frac{n(n+1)}{2}=(2r+1)(r+1)\\&=2r^2+3r+1.\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}\text{1. 以 } r+1 \text{ 为对称中心 } s_n-(r+1)=r(2r+2),\ a+a'=2r+2=n+1;\\\text{2. 以 1 为对称中心 } s_n-1=r(2r+3),\ a+a'=2r+3=n+2;\\\text{3. 以 } n \text{ 为对称中心 } s_n-n=r(2r+1),\ a+a'=2r+1=n.\end{gathered}\tag{19}$$

若以其他数为对称中心，则互补和 $a+a'$不可能是整数，而且每一个以 $r+1$ 为对称中心的对称排列，都可变换成一个以 1 或 n 为对称中心的对称排列，反之也对. 因此，对奇数 $n=2r+1$，以 1 或 n 为偏中心的对称排列也各有$\mu_1(n)$个同态类. 例如，当 $n=7$ 时：

中心	4	1	7
互补和	8	9	7
	(1,2,3,4,5,6,7),	(5,6,7,1,2,3,4),	(4,5,6,7,1,2,3);
	(6,7,3,4,5,1,2),	(3,5,7,1,2,4,6),	(4,1,2,7,5,6,3);
	(1,2,5,4,3,6,7),	(6,4,7,1,2,5,3),	(3,5,6,7,1,2,4);
	(6,7,5,4,3,1,2),	(5,3,7,1,2,6,4),	(3,1,2,7,5,6,4);
	(5,1,2,4,6,7,3),	(6,5,7,1,2,4,3),	(5,6,3,7,4,1,2);
	(3,6,7,4,1,2,5),	(3,4,7,1,2,5,6),	(1,2,4,7,3,5,6);
	(3,1,2,4,6,7,5),	(4,3,7,1,2,6,5),	(5,6,4,7,3,1,2);
	(5,6,7,4,1,2,3),	(4,6,7,1,2,3,5),	(1,2,3,7,4,5,6).

(20)

对于偶数 n = 2r(r=1,2,3,...)，对称的 n 级排列可以由二行等列式给出.如

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 6 \\ + & 12 & 11 & 10 & 4 & 5 & 7 \\ \hline & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \end{array} \rightarrow (1,2,3,9,8,6,12,11,10,4,5,7). \tag{21}$$

这里也可以有→(1,2,3,9,8,6,7,5,4,10,11,12). 这是逆向展开，前者是顺向展开. 但是，可以检查两者是不同态的：

(1,2,3,9,8,6,12,11,10,4,5,7)→ (1,6,5,9,10,2,12,7,8,4,3,11). 仍对称

(1,2,3,9,8,6,7,5,4,10,11,12)→ (1,6,11,9,4,2,7,12,8,10,3,5) 此即

→ (1,6,11,9,8,10,3,5,4,2,7,12).

不如前者简洁. 因此我们常以顺向展开排列为对称的偶级排列，而且以后也将常用到. 固定二行等列式的头一对数，可给出偶数 n = 2r(r=1,2,3,...)级对称排列的同态类数为

$$\mu_0(n)\frac{(r-1)!2^{r-1}}{\varphi(n)} \tag{22}$$

如 $n=6$ 时，$\mu_0(6)=4$. 即

(1,2,3,6,5,4)，(1,3,2,6,4,5)，
(1,2,4,6,5,3)，(1,5,3,6,2,4). (23)

第2章　完美幻方及其同构变换

一、n 阶完美幻方

定义 1　在正整数集 F 上定义 n 阶数字方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

各 $a_{ij}\in\mathbf{F}$, 且互不相同$(i,j=1,2,3,\cdots,n)$. 若 A 的各行、各列、各对角线上元素之和都是相等的, 则称 A 为 n 阶完美幻方. 并称此相等的和为 n 阶幻和, 记为 Σ_n.

列: $a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+\cdots+a_{in}=\Sigma_n,\quad (i=1,2,3,\cdots,n),$ (2)

行: $a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\cdots+a_{nj}=\Sigma_n,\quad (j=1,2,3,\cdots,n),$ (3)

主对角线:

Ⅰ　$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}=\Sigma_n,$ (4)

Ⅱ　$a_{1n}+a_{2n-1}+a_{3n-2}+\cdots+a_{n1}=\Sigma_n\,,$ (5)

泛对角线:

Ⅰ　$a_{11+i}+a_{22+i}+a_{33+i}+\cdots+a_{nn+i}=\Sigma_n,\quad (i=1,2,3,\cdots,n-1),$ (6)

Ⅱ　$a_{1i}+a_{2i-1}+a_{3\,i-2}+\cdots+a_{ni+1}=\Sigma_n,\quad (i=n-1,n-2,\cdots,1),$ (7)

其中　$n+i,\quad i+1 \pmod n.$ (8)

这里"各对角线"除了包括主对角线Ⅰ、Ⅱ外, 还包括那些平行于主对角线Ⅰ、Ⅱ的被折断了的所谓泛对角线. 特别地, 当 F= $\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 时, n 阶幻和

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_n &= (1+2+3+\cdots+n^2)\div n\\ &=\frac{n^2(n^2+1)}{2n}\\ &=\frac{n(n^2+1)}{2}.\end{aligned} \tag{9}$$

若 A 中只是两条主对角线上元素之和等于Σ_n, 则称 A 是 n 阶幻方. 显然, 完美幻方必是幻方, 而幻方不一定是完美幻方.

例如, 下面是一个 5 阶完美幻方:

$A=$ (10), $\Sigma_5=65$

	1	2	3	4	5
1	15	23	6	19	2
2	16	4	12	25	8
3	22	10	18	1	14
4	3	11	24	7	20
5	9	17	5	13	21

边框外的数字为行、列序(下同). 往后, 把分别含有元素 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$ 的列线(第Ⅰ、Ⅱ对角线)称为第 1,2,3, …,n 条列线(第Ⅰ、Ⅱ对角线). 其中, 第 1 Ⅰ对角线、第 n Ⅱ对角线就分别是Ⅰ、Ⅱ主对角线.

二、完美幻方的变换

设 A 是完美幻方, 下列变换不会改变 A 的完美性:

1. 转置　A 之转置方阵 A^{T}.
2. 行、列的轮回　例如, 对(10)列轮回:

$$A \to AP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \end{array}} \end{array} \to \cdots \to AP^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \\ 21 & 9 & 17 & 5 & 13 \end{array}} \end{array} \tag{11}$$

行轮回:

$$A \to PA = \boxed{\begin{array}{ccccc} 16 & 4 & 12 & 25 & 8 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \\ 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \end{array}} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{array} \to \cdots \to P^4A = \boxed{\begin{array}{ccccc} 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \\ 20 & 4 & 12 & 25 & 8 \\ 21 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \end{array}} \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{12}$$

若把给定的完美幻方 A 之行、列轮回作成一张表, 可得一个由 n^2 个 n 阶完美幻方组成的完美幻方的行、列轮回表. 今后把运算符号置于方阵之右边, 表示对 A 进行行运算; 置于左边则进行列运算. 第 3 节有这样的 4 阶、5 阶完美幻方的行、列轮回表.

完美幻方的行、列轮回变换为完美幻方提供了两种形象的直观理解:

(1)圆筒幻方　例如, 对列轮回, 把一个完美幻方的左右两边线粘连在一起, 可形成一个垂直圆筒幻方. 再从任一条数间线剪开展平, 即可得一进行了列轮回的完美幻方. 同样, 对行轮回可得一水平圆筒幻方.

(2)平面延展　把一个 n 阶完美幻方向左, 向下依次重写各列、行, 可得一个延展了的数阵. 再用一个 n 阶方阵框去套, 即可得一个完美幻方. 例如, 对上述(10)有

$$\begin{array}{ccccccccc} 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \\ 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 17 & 5 & 13 \\ 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 23 & 6 & 19 \\ 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 4 & 12 & 25 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 10 & 18 & 1 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 11 & 24 & 7 \end{array} \tag{13}$$

3. 行、列之逆序

$$\pi_4 A = \left|\begin{array}{ccccc} 15 & 23 & 6 & 19 & 2 \\ 9 & 17 & 5 & 13 & 21 \\ 3 & 11 & 24 & 7 & 20 \\ 22 & 10 & 18 & 1 & 14 \\ 16 & 4 & 12 & 25 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array} \qquad A\pi_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc} 15 & 2 & 19 & 6 & 23 \\ 16 & 8 & 25 & 12 & 4 \\ 22 & 14 & 1 & 18 & 10 \\ 3 & 20 & 7 & 24 & 11 \\ 9 & 21 & 13 & 5 & 17 \end{array}\right| \end{array} \tag{14}$$

4. 双边循环排列　完美幻方的行、列都按原行、列排序之某个轮回排列重排. 如

$$\begin{array}{cc|ccccc|ccccc|c} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & \\ \hline A & 1 & 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 6 & 2 & 23 & 19 & A\pi_2 \\ & 2 & 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 12 & 8 & 4 & 25 & \\ & & 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 18 & 14 & 10 & 1 & \\ & 3 & 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 24 & 20 & 11 & 7 & \\ & 4 & 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 5 & 21 & 17 & 13 & \\ \hline \pi_2 A & 1 & 15 & 23 & 6 & 19 & 2 & 15 & 6 & 2 & 23 & 19 & \pi_2 A\pi_2 \\ & 3 & 22 & 10 & 18 & 1 & 14 & 22 & 18 & 14 & 10 & 1 & \\ & 5 & 9 & 17 & 5 & 13 & 21 & 9 & 5 & 21 & 17 & 13 & \\ & 2 & 16 & 4 & 12 & 25 & 8 & 16 & 12 & 8 & 4 & 25 & \\ & 4 & 3 & 11 & 24 & 7 & 20 & 3 & 24 & 20 & 11 & 7 & \\ \hline \end{array} \tag{15}$$

其中 A, $\pi_2 A\pi_2$ 是 5 阶完美幻方, 而 $\pi_2 A$, $A\pi_2$ 不是完美幻方.

5. 拓扑变换　方阵 A 之对角线组 Ⅰ, Ⅱ 与行, 列线组相互交换:

$$A \xrightarrow{\text{拓}} A^* = \left|\begin{array}{ccccc} 15 & 17 & 24 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 18 & 25 & 2 & 9 & 11 \\ 7 & 14 & 16 & 23 & 5 \\ 21 & 3 & 10 & 12 & 19 \end{array}\right| \tag{16}$$

定理 1　偶阶完美幻方不存在拓扑变换.

证明　在一个方阵中, 任一条行线与任一条列线都有且只有一个交点, 即一个共同元. 但是在偶阶, 例如 4 阶完美幻方

$$B = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 14 & 7 & 12 \\ 8 & 11 & 2 & 13 \\ 10 & 5 & 16 & 3 \\ 15 & 4 & 9 & 6 \end{array}\right| \quad \Sigma_4 = 34 \tag{17}$$

中, 对角线组如下:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & \text{I} & & & & & \text{II} & & \\ ① & 1 & 11 & 16 & 6; & \quad & 1 & 13 & 16 & 4; \\ ② & 14 & 2 & 3 & 15; & & 14 & 8 & 3 & 9; \\ ③ & 7 & 13 & 10 & 4; & & 7 & 11 & 10 & 6; \\ ④ & 12 & 8 & 5 & 9; & & 12 & 2 & 5 & 15. \end{array} \tag{18}$$

其中, Ⅰ①与Ⅱ①、Ⅱ③各有两个共同元; Ⅰ①与Ⅱ②、Ⅱ④没有共同元. 因此, 偶阶幻方的对角线组不可能变成方阵的行、列线组. 故对偶阶不能进行拓扑变换, 故结论成立.

上列各种变换均没有改变方阵 A 之行、列、对角线组各线的组成元素，所能引起的变换只能是:

(1) 线组与线组之互变;

(2) 各线组内各线的排列顺序;

(3) 各线之组成元素的排列顺序.

例如，前面 5 阶完美幻方 A(3)通过上列变换所引起的各线组之变换如下表所示:

变　换	行线组	列线组	角线组 I	对角线组 II
A	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 5)
AP	(1 2 3 4 5)	(2 3 4 5 1)	(5 1 2 3 4)	(2 3 4 5 1)
PA	(2 3 4 5 1)	(1 2 3 4 5)	(2 3 4 5 1)	(2 3 4 5 1)
$\pi_2 A \pi_2$	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)	(1 3 5 2 4)
A^{T}	列 (1 2 3 4 5)	行 (1 2 3 4 5)	(1 5 4 3 2)	(1 2 3 4 5)
$\pi_4 A$	(1 5 4 3 2)	(1 2 3 4 5)	II (2 1 5 4 3)	I (2 1 5 4 3)
$A\pi_4$	(1 2 3 4 5)	(1 5 4 3 2)	II (2 3 4 5 1)	I (5 1 2 3 4)
拓扑 A^*	II (2 4 1 3 5)	I (1 4 2 5 3)	行 (1 2 3 4 5)	列 (5 1 2 3 4)

(19)

由表可见转置引起行，列线组相互交换；逆序引起对角线组相互交换；而拓扑变换引起行列线组与对角线组的相互交换.

三、同构的完美幻方

对于两个用相同的元素组成的同阶完美幻方 A, B. 若有变换 $\psi: A \to B$，使 A, B 两方的各线组之间可以建立起线与线的一一对应，即对 A 的某一线组总能在 B 中找到一个线组，使它们的线与线之间建立起一一对应，反之也对. 这时称 A, B 是同构的完美幻方. 使 A, B 同构的变换 ψ 称为同构变换. 可见，前面关于完美幻方的行，列轮回；转置；行、列的逆序；双边循环排列；拓扑变换等都是完美幻方的同构变换.

下面给出的是 4 阶完美幻方 B 和 5 阶完美幻方 A 的行，列轮回表:

B	1	2	3	4	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	14	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	11	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
4	15	4	9	6	4	9	6	15	9	6	15	4	6	15	4	9
1	1	14	7	12	11	7	12	1	7	12	1	14	12	1	14	7
2	8	11	2	13	14	2	13	8	2	13	8	11	13	8	11	2
3	10	5	16	3	5	16	3	10	16	3	10	5	3	10	5	16

(20)

A

15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	10	18	14	22	10	18	1
9	17	5	13	21	17	5	13	21	9	5	13	21	9	17	13	21	9	17	5	21	9	17	5	13
15	23	6	19	2	23	6	19	2	15	6	19	2	15	23	19	2	15	23	6	2	15	23	6	19
16	4	12	25	8	4	12	25	8	16	12	25	8	16	4	25	8	16	4	12	8	16	4	12	25
22	10	18	1	14	10	18	1	14	22	18	1	14	22	10	1	14	22	14	18	14	22	14	18	1
3	11	24	7	20	11	24	7	20	3	24	7	20	3	11	7	20	3	11	24	20	3	11	24	7

据此，可给出如下 $\Phi(n)$的计算表:

$\lambda(n)$, $\mu(n)$, $\Phi(n)$计算表

n	$\varphi(n)$	$n!$	$\lambda(n)$	$\mu(n)$	$\Phi(n)$
4	2	24	2	2	128
5	4	120	6	2	800
6	2	720	60	12	288
7	6	5040	120	8	2352
8	4	40320	1260	48	1024
9	6	362880	6720	64	3888
10	4	3628800	90720	480	1600
11	10	3991680	362880	384	9680
12	4	479001600	979200	5760	2304
13	12	6227272800	3991680	3840	16224
14	6	14!	1037836800	53760	4704
15	8	15!	10897286400	80640	14400
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(21)

由这两个轮回表, 可知有如下的结轮:

1. 任一元素可处于完美幻方的任一位置;

2. 各方之同一位置元素也构成一个同构的完美幻方, 而且在表中也有这个完美幻方存在;

3. 用 $\boldsymbol{B}$ 的转置 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 或 $\boldsymbol{B}$ 的行、列逆序代替 $\boldsymbol{B}$ 均可给出相应的行、列轮回表. 因此, 给一个 n 阶完美幻方, 通过上列同构变换可得 $\Phi(n)$个同构的完美幻方:

$$\Phi(n)=\begin{cases}8n^2\varphi(n) & n\text{是奇数;}\\ 4n^2\varphi(n) & n\text{是偶数.}\end{cases} \tag{22}$$

四、常用的完美幻方

1. 5 阶完美幻方　总共有 36 个基本的 5 阶完美幻方 C_{ij}. 其中 $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}$ 是对称的 5 阶完美幻方.

	1					2					3					4					5					6				
1	1	14	22	10	18	1	15	22	8	19	1	13	22	9	20	1	13	22	10	19	1	15	22	9	18	1	14	22	8	20
	7	20	3	11	24	7	18	4	11	25	7	19	5	11	23	7	20	2	11	23	7	19	3	11	25	7	18	5	11	24
	13	21	9	17	5	14	21	10	17	3	15	21	8	17	4	14	21	8	17	5	13	21	10	17	4	15	21	9	17	3
	19	2	15	23	6	20	2	13	24	6	18	2	14	25	6	18	2	15	24	6	20	2	14	23	6	19	2	13	25	6
	25	8	16	4	12	23	9	16	5	12	24	10	16	3	12	25	9	16	3	12	24	8	16	5	12	23	10	16	4	12
2	1	19	12	10	23	1	20	12	8	24	1	18	12	9	25	1	18	12	10	24	1	20	12	9	23	1	19	12	8	25
	7	25	3	16	14	7	23	4	16	15	7	24	5	16	13	7	25	4	16	13	7	24	3	16	15	7	23	5	16	14
	18	11	9	22	5	19	11	10	22	3	20	11	8	22	4	19	11	8	22	5	18	11	10	22	4	20	11	9	22	3
	24	2	20	13	6	25	2	18	14	6	23	2	19	15	6	23	2	20	14	6	25	2	19	13	6	24	2	18	15	6
	15	8	21	4	17	13	9	21	5	17	14	10	21	3	17	15	9	21	3	17	14	8	21	5	17	13	10	21	4	17
3	1	24	17	10	13	1	25	17	8	14	1	23	17	9	15	1	23	17	10	14	1	25	17	9	13	1	24	17	8	15
	7	15	3	21	14	7	13	4	21	20	7	14	5	21	18	7	15	4	21	18	7	14	3	21	20	7	13	5	21	19
	23	16	9	12	5	24	16	10	12	3	25	16	8	12	4	24	16	8	12	5	23	16	10	12	4	25	16	9	12	3
	14	2	25	18	6	15	2	23	19	6	13	2	24	20	6	13	2	25	19	6	15	2	24	18	6	14	2	23	15	6
	20	8	11	4	22	18	9	11	5	22	19	10	11	3	22	20	9	11	3	22	19	8	11	5	22	18	10	11	4	22
4	1	19	22	10	13	1	20	22	8	14	1	18	22	9	15	1	18	22	10	14	1	20	22	9	13	1	19	22	8	15
	7	15	3	16	24	7	13	4	16	25	7	14	5	16	23	7	15	4	16	23	7	14	3	16	25	7	13	5	16	24
	18	21	9	12	5	19	21	10	12	3	20	21	8	12	4	19	21	8	12	5	18	21	10	12	4	20	21	9	12	3
	14	2	20	23	6	15	2	18	24	6	13	2	19	25	6	13	2	20	24	6	15	2	19	23	6	14	2	18	25	6
	25	8	11	4	17	23	9	11	5	17	24	10	11	3	17	25	9	11	3	17	24	8	11	5	17	23	10	11	4	17
5	1	24	12	10	18	1	25	12	8	19	1	23	12	9	20	1	23	12	10	19	1	25	12	9	18	1	24	12	8	20
	7	20	3	21	14	7	18	4	21	15	7	19	5	21	13	7	20	4	21	13	7	19	3	21	15	7	18	5	21	14
	23	11	9	17	5	24	11	10	17	3	25	11	8	17	4	24	11	8	17	5	23	11	10	17	4	25	11	9	17	3
	19	2	25	13	6	20	2	23	14	6	18	2	24	15	6	18	2	25	14	6	20	2	24	13	6	19	2	23	15	6
	15	8	16	4	22	13	9	16	5	22	14	10	16	3	22	15	9	16	3	22	14	8	16	5	22	13	10	16	4	22
6	1	14	17	10	23	1	15	17	8	24	1	13	17	9	25	1	13	17	10	24	1	15	17	9	23	1	14	17	8	25
	7	25	3	11	19	7	23	4	11	20	7	24	5	11	18	7	25	4	11	18	7	24	3	11	20	7	23	5	11	19
	13	16	9	22	5	14	16	10	22	3	15	16	8	22	4	14	16	8	22	5	13	16	10	22	4	15	16	9	22	3
	24	2	15	18	6	25	2	13	19	6	23	2	14	20	6	23	2	15	19	6	25	2	14	18	6	24	2	13	20	6
	20	8	21	4	12	18	9	21	5	12	19	10	21	3	12	20	9	21	3	12	19	8	21	5	12	18	10	21	4	12

基本的 5 阶完美幻方总表(一)(C_{ij}, $i,j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

2. 4 阶完美幻方　只有 3 个基本的 4 阶完美幻方:

①				②				③			
1	14	7	12	1	14	4	15	1	12	6	15
8	11	2	13	8	11	5	10	8	13	3	10
10	5	16	3	13	2	16	3	11	2	16	5
15	4	9	6	12	7	9	6	14	7	9	4

3. 6 阶完美幻方　6 阶完美幻方只能用不连续的自然数组成. 如:

	① 60+60						② 60+60						③ 60+60						
59	9	32	18	16	35	10	9	18	32	35	16	10	31	8	22	24	5	30	59
55	12	26	17	33	19	13	39	25	2	6	11	27	28	14	23	7	21	27	55
66	39	2	25	11	6	37	22	17	26	19	33	13	1	38	15	29	34	3	66
59	24	5	30	31	8	22	5	24	30	31	22	8	16	35	10	9	32	18	59
55	7	21	27	28	14	23	34	29	3	1	15	38	33	19	13	12	26	17	55
66	29	34	3	1	38	15	21	7	27	28	23	14	11	6	37	39	2	25	66
	④						⑤						⑥						
	14	44	17	11	48	16	14	44	17	13	47	15	14	44	17	39	21	15	
	18	30	27	29	24	22	18	30	27	28	26	21	18	30	27	2	26	47	
	43	1	31	35	3	37	43	1	31	34	2	39	43	1	31	34	28	13	
	39	2	34	36	6	33	37	3	35	36	6	33	11	29	35	36	6	33	
	21	26	28	32	20	21	22	24	29	32	20	23	48	24	3	32	20	23	
	15	47	13	7	49	19	16	48	11	7	49	19	16	22	37	7	49	19	

4. 7 阶完美幻方

①							②							③						
44	32	20	1	38	26	14	44	26	3	41	49	15	32	21	30	27	1	39	12	45
3	40	28	9	46	34	15	20	29	11	49	23	5	38	24	6	35	9	47	36	18
11	48	29	17	5	42	23	28	2	40	17	34	8	46	8	46	40	17	34	28	2
19	7	37	25	13	43	31	31	13	43	25	7	37	19	37	19	43	25	7	31	13
27	8	45	33	21	2	39	4	42	16	33	10	48	22	48	22	16	33	10	4	42
35	16	4	41	22	10	47	12	45	27	1	39	21	30	32	14	3	41	15	44	26
36	24	12	49	30	18	6	36	18	35	9	47	24	6	5	38	11	49	23	20	29
④							⑤							⑥						
38	14	32	1	26	44	20	15	14	26	41	32	44	3	12	27	45	1	21	39	30
46	15	40	9	34	3	28	23	38	29	49	5	20	11	36	35	18	9	24	47	6
5	23	48	17	42	11	29	34	46	2	17	8	28	40	28	40	2	17	8	34	46
13	31	7	25	43	19	37	7	19	13	25	37	31	43	31	43	13	25	37	7	19
21	39	8	33	2	27	45	10	22	42	33	48	4	16	4	16	42	33	48	10	22
22	47	16	41	10	35	4	39	30	45	1	21	12	27	44	3	26	41	32	15	14
30	6	24	49	18	36	12	47	6	18	9	24	36	35	20	11	29	49	5	23	38

5. 8 阶完美幻方

①								②								③							
1	20	62	42	8	21	59	47	1	30	48	11	57	38	24	51	1	32	41	16	57	40	17	56
10	32	53	35	15	25	52	38	10	61	39	20	50	5	31	44	10	63	34	23	50	7	26	47
19	63	41	4	22	58	48	5	19	49	6	32	43	9	62	40	19	54	3	30	43	14	59	38
28	54	34	16	29	51	39	9	28	42	13	63	36	18	53	7	28	45	12	61	36	21	52	5
64	45	3	23	57	44	6	18	64	35	17	54	8	27	41	14	64	33	24	49	8	25	48	9
55	33	12	30	50	40	13	27	55	4	26	45	15	60	34	21	55	2	31	42	15	58	39	18
46	2	24	61	43	7	17	60	46	16	59	33	22	56	3	25	46	11	62	35	22	51	6	27
37	11	31	49	36	14	26	56	37	23	52	2	29	47	12	58	37	20	53	4	29	44	13	61

④

1	23	59	45	8	18	62	44
11	29	56	34	14	28	49	39
24	58	46	4	17	63	43	5
30	52	33	15	27	53	40	10
57	47	3	21	64	42	6	20
51	37	16	26	54	36	9	31
48	2	22	60	41	7	19	61
38	12	25	55	35	13	32	50

⑤

1	45	62	23	8	44	59	18
11	34	49	29	14	39	56	28
24	4	43	58	17	5	46	63
30	15	40	52	27	10	33	53
57	21	6	47	64	20	3	42
51	26	9	37	54	31	16	36
48	60	19	2	41	61	22	7
38	55	32	12	35	50	25	13

⑥

1	58	3	60	8	63	6	61
11	52	16	55	14	53	9	50
24	47	22	45	17	42	19	44
30	37	25	34	27	36	32	39
57	2	59	4	64	7	62	5
51	12	46	21	54	13	49	10
48	23	46	21	41	18	43	20
58	29	33	26	35	28	40	31

⑦

1	2	48	47	21	22	60	59
3	4	46	45	23	24	58	57
29	30	52	51	9	10	40	39
31	32	50	49	11	12	38	37
44	43	5	6	64	63	17	18
42	41	7	8	62	61	19	20
56	55	25	26	36	35	13	14
54	53	27	28	34	33	15	16

⑧

1	2	56	55	13	14	60	59
3	4	54	53	15	16	58	57
29	30	44	43	17	18	40	39
31	32	42	41	19	20	38	37
52	51	5	6	64	63	9	10
50	49	7	8	62	61	11	12
48	47	25	26	36	35	21	22
46	45	27	28	34	33	23	24

⑨

1	2	56	55	25	26	48	47
3	4	54	53	27	28	46	45
29	30	44	43	5	6	52	51
31	32	42	41	7	8	50	49
40	39	17	18	64	63	9	10
38	37	19	20	62	61	11	12
60	59	13	14	36	35	21	22
58	57	15	16	34	33	23	24

⑩

1	2	45	46	24	23	60	59
3	4	47	48	22	21	58	57
32	31	52	51	9	10	37	38
30	29	50	49	11	12	39	40
41	42	5	6	64	63	20	19
43	44	7	8	62	61	18	17
56	55	28	27	33	34	13	14
54	53	26	25	35	36	15	16

⑪

1	2	56	55	13	14	60	59
3	4	54	53	15	16	58	57
32	31	41	42	20	19	37	38
30	29	43	44	18	17	39	40
52	51	5	6	64	63	9	10
50	49	7	8	62	61	11	12
45	46	28	27	33	34	24	23
47	48	26	25	35	36	22	21

⑫

1	2	56	55	28	27	45	46
3	4	54	53	26	25	47	48
32	31	41	42	5	6	52	51
30	29	43	44	7	8	50	49
37	38	20	19	64	63	9	10
39	40	18	17	62	61	11	12
60	59	13	14	33	34	24	23
58	57	15	16	35	36	22	21

6. 9阶完美幻方

①

1	23	54	73	68	18	37	32	63
11	42	34	56	6	25	47	78	70
21	49	80	66	13	44	30	58	8
41	36	55	5	27	46	77	72	10
51	79	65	15	43	29	60	7	20
31	62	3	22	53	75	67	17	39
81	64	14	45	28	59	9	19	50
61	2	24	52	74	69	16	38	33
71	12	40	35	57	4	26	48	76

②

1	54	68	37	63	23	73	18	32
11	34	6	47	70	42	56	25	78
21	80	13	30	8	49	66	44	58
41	55	27	77	10	36	5	46	72
51	65	43	60	20	79	15	29	7
31	3	53	67	39	62	22	75	17
81	14	28	9	50	64	45	59	19
61	24	74	16	33	2	52	69	38
71	40	57	26	76	12	35	4	48

③

1	79	40	5	74	44	9	78	39
11	62	54	15	57	46	16	58	50
21	64	34	22	68	29	26	72	33
41	2	80	45	6	75	37	7	76
51	12	55	52	13	59	47	17	63
31	23	65	35	27	69	30	19	70
81	42	3	73	43	4	77	38	8
61	49	14	56	53	18	60	48	10
71	36	24	66	28	25	67	32	20

④

1	40	74	9	39	79	5	44	78
11	54	57	16	50	62	15	46	58
21	34	68	26	33	64	22	29	72
41	80	6	37	76	2	45	75	7
51	55	13	47	63	12	52	59	17
31	65	27	30	70	23	35	69	19
81	3	43	77	8	42	73	4	38
61	14	53	60	10	49	56	18	48
71	24	28	67	20	36	66	25	32

⑤

1	63	32	37	18	68	73	54	23
12	71	76	48	26	4	57	35	40
24	2	61	33	38	16	69	74	52
45	14	64	81	50	19	9	59	28
53	22	3	62	31	39	17	67	75
29	43	15	65	79	51	20	7	60
77	46	27	5	55	36	41	10	72
58	30	44	13	66	80	49	21	8
70	78	47	25	6	56	34	42	11

⑥

1	32	18	73	23	63	37	68	54
12	76	26	57	40	71	48	4	35
24	61	38	69	52	2	33	16	74
45	64	50	9	28	14	81	19	59
53	3	31	17	75	22	62	39	67
29	15	79	20	60	43	65	51	7
77	27	55	41	72	46	5	36	10
58	44	66	49	8	30	13	80	21
70	47	6	34	11	78	25	56	42

第 3 章　方阵的行 Z 变换与幻和组

一、方阵的行 Z 变换与行排列方阵

1. 方阵的行 Z 变换

在正整数集 **F** 上给定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathbf{F}$; $i,j=1,2,3,\cdots,n$. 定义方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行 Z 变换如下: 行 Z: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_1=(b_{ij})$

(1) $\boldsymbol{A}$ 之第一行不变地移作 $\boldsymbol{B}_1$ 的第一行;

(2) $\boldsymbol{A}$ 之第Ⅰ主对角线: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ 变成 $\boldsymbol{B}_1$ 的第一列;

(3) $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行元素按原有顺序, 以 a_{ii} 为头, 前行 $i-1$ 步地移作 $\boldsymbol{B}_1$ 的第 i 行($i=1,2,\cdots,n$). 即第 i 行的元素排列轮回地变成以 a_{ii} 为头的排列. 如下方阵所示:

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{|ccccc|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\\ \hline\end{array}\to\boldsymbol{B}_1\begin{array}{|ccccc|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{21}\\ a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{32}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1}\\ \hline\end{array}\tag{1}$$

对 $\boldsymbol{B}_1$ 再执行行 Z 变换得 $\boldsymbol{B}_2$, 再执行行 Z 变换得 $\boldsymbol{B}_3$, ⋯, 对 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 再执行行 Z 变换必定得 $\boldsymbol{A}$. 因而, 对 $\boldsymbol{A}$ 依次执行行 Z 变换, 可得方阵链:

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_1\to\boldsymbol{B}_2\to\boldsymbol{B}_3\to\cdots\to\boldsymbol{B}_{n-1}\to\boldsymbol{A}\tag{2}$$

在对 $\boldsymbol{B}_k$ 执行行 Z 变换得 $\boldsymbol{B}_{k+1}$ 的过程中, 实际上引起下列变换:

(1) 行线组各线的组成元素不变, 只进行适当的轮回变换;

(2) $\boldsymbol{B}_k$ 的第Ⅰ对角线组变成 $\boldsymbol{B}_{k+1}$ 的列线组. 特别地, 第Ⅰ主对角线变成第一列;

(3) $\boldsymbol{B}_k$ 的列线组变成 $\boldsymbol{B}_{k+1}$ 的第Ⅱ对角线组. 特别地, 第 1 列线变成第 1 条Ⅱ对角线; 第 n 列线变成第 n 条, 即第Ⅱ主对角线.

即在方阵链(2)之由前阵到后阵的变换过程中, 方阵之行线组、列线组、对角线组间有如下变换:

$$\begin{array}{cccc}\text{前阵} & \text{行线组} & \text{对角线组Ⅰ} & \text{列线组}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \text{后阵} & \text{行线组} & \text{列线组} & \text{对角线组Ⅱ.}\end{array}\tag{3}$$

这种行 Z 变换在计算机上很容易实现. 在上列陈述中, 把"行 Z 变换"中之"行"改成"列", "列"改成"行", 可得方阵的"列 Z 变换". 其余的论述同样成立.为方便起见, 今后记 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Z 变换(或行、或列)为

$$\mathrm{Z}_1=\mathrm{Z}\boldsymbol{A},\ \mathrm{Z}_2=\mathrm{Z}^2\boldsymbol{A},\ \cdots,\ \mathrm{Z}_{n-1}=\mathrm{Z}^{n-1}\boldsymbol{A}.\tag{4}$$

显然, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Z 变换对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的代数运算不产生影响.

定理 1. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, $a_{ij},b_{ij}\in\mathbf{F}$, 和实数 λ, μ 有

$$\mathrm{Z}(\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B})=\lambda\mathrm{Z}\boldsymbol{A}+\mu\mathrm{Z}\boldsymbol{B}\tag{5}$$

二、行排列方阵

用 $1,2,3,\cdots,n$ 的任一个排列为行组成的 n 阶方阵称为行排列方阵. 例如:

$$A=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \hline\end{array} \tag{6}$$

对 n 阶行排列方阵 A 执行行 Z 变换, 可得方阵链(2). 其中 B_k 的第 1 列元素为

$$(1,\ k+1,\ 2k+1,\cdots,(n-1)k+1) \pmod n \tag{7}$$
$$(k=1,2,3,\cdots,n-1).$$

第 j 列元素为 $ik+j(i=1,2,3,\cdots,n-1;j=2,3,\cdots,n)$. 由第 1 章定理 1 知: 当 $\gcd(n,k)=1$, 即 n,k 互素时, (7)构成摸 n 完全剩余系: $1,2,3,\cdots,n$. 第 j 列也是如此. 因此,当 $\gcd(n,k)=1$ 时, n 阶方阵 B_k 的各列全都分别是由: $1,2,3,\cdots,n$ 组成的. 实际上, 第 j 列都是第 1 列元素上行 $j-1$ 步的轮回排列. 故 B_k 的各列元素之和都是

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{8}$$

对 n 阶行排列方阵 A 执行列 Z 变换, 不会引起任何变换, 同样, 可以定义 n 阶列排列方阵, 并且有相同的结论. 对 n 阶列排列方阵执行行、列 Z 变换, 有类似结论.

例 1　对 5 阶行排列方阵 A_1 执行行 Z 变换:

$$\underset{A_1}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_1}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_2}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\\5&1&2&3&4\\2&3&4&5&1\\4&5&1&2&3\\\hline\end{array}}$$

$$\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_3}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\\2&3&4&5&1\\5&1&2&3&4\\3&4&5&1&2\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_4}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}A_1, \tag{9}$$

B_1,B_2,B_3,B_4 之各列元素和均等于 15.

例 2　对 5 阶行排列方阵 A_2 执行行 Z 变换, B_1,B_2,B_3,B_4 之各列元素和也均等于 15:

$$\underset{A_2}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&3&4&2&5\\1&3&4&2&5\\1&3&4&2&5\\1&3&4&2&5\\1&3&4&2&5\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_1}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&3&4&2&5\\3&4&2&5&1\\4&2&5&1&3\\2&5&1&3&4\\5&1&3&4&2\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_2}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&3&4&2&5\\4&2&5&1&3\\5&1&3&4&2\\3&4&2&5&1\\2&5&1&3&4\\\hline\end{array}}$$

$$\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_3}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&3&4&2&5\\2&5&1&3&4\\3&4&2&5&1\\5&1&3&4&2\\4&2&5&1&3\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}\underset{B_4}{\begin{array}{|ccccc|}\hline 1&3&4&2&5\\5&1&3&4&2\\2&5&1&3&4\\4&2&5&1&3\\3&4&2&5&1\\\hline\end{array}}\xrightarrow{\text{行 Z}}A_2. \tag{10}$$

例 3　对 6 阶行排列方阵 $\boldsymbol{A}_3$ 执行行 Z 变换:

$$
\boldsymbol{A}_3\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\\3&4&5&6&1&2\\4&5&6&1&2&3\\5&6&1&2&3&4\\6&1&2&3&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}\boldsymbol{B}_2\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\\5&6&1&2&3&4\\1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\\5&6&1&2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}
$$

$$
\boldsymbol{B}_3\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\\1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\\1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}\boldsymbol{B}_4\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\\3&4&5&6&1&2\\1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\\3&4&5&6&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}\boldsymbol{B}_5\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\\5&6&1&2&3&4\\4&5&6&1&2&3\\3&4&5&6&1&2\\2&3&4&5&6&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行Z}}\boldsymbol{A}_3. \tag{11}
$$

其中 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_5$ 之各列元素和均等于 21; 而 $\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_3$ 之各列元素和不完全相等. 其原因就是 $\gcd(1, 6)=\gcd(5, 6)=1$, 而 $\gcd(2, 6)=\gcd(4, 6)=2, \gcd(3, 6)=3$.

例 4　对 9 阶行排列方阵 $\boldsymbol{A}_4$ 执行行 Z 变换:

$$
\boldsymbol{A}_4\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&5&6&7&8&9&1\\3&4&5&6&7&8&9&1&2\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\5&6&7&8&9&1&2&3&4\\6&7&8&9&1&2&3&4&5\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\8&9&1&2&3&4&5&6&7\\9&1&2&3&4&5&6&7&8\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_3\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}_6\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&8&9&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&8&9&1&2&3\end{bmatrix} \tag{12}
$$

$\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_5$ 之各列元素和均等于 45; 而 $\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_6$ 之各列元素和不完全相等. 因为 $\gcd(3, 9)=\gcd(6, 9)=3$.

显然, 这里的行排列方阵、列排列方阵分别相当于是方阵 $\boldsymbol{A}(1)$ 的第一、第二足标组成的方阵. 因此, 对行(列)排列方阵执行的行或列 Z 变换也就分别相当于作用于方阵 $\boldsymbol{A}(1)$ 的行或列 Z 变换. 特别地, 若方阵 $\boldsymbol{A}(1)$ 是构作完美幻方的数字方阵, 那这里对行排列方阵、列排列方阵的研究也就成为研究和构作完美幻方的理论基础. 这可由下面对 n 阶分段方的研究给出.

三、n 阶分段方

把 n^2 个数: 1, 2, …, n^2 依次按 n 个数一组, 分成 n 组, 并依次把各组作为行, 构作 n 阶方阵

A:

$$A=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \\ \hline\end{array} \tag{13}$$

此方称为 n 阶分段方. 引用矩阵理论的线性运算, 可把 n 阶分段方分解成

$$A = C_1 n + D_1 . \tag{14}$$

其中, C_1 是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 组成的 n 阶列排列方阵; D_1 是 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的 n 阶行排列方阵:

$$C_1:\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ \hline\end{array} \qquad D_1:\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline\end{array} \tag{15}$$

对 A 执行行 Z 变换, 显然, 对 C_1 不起作用, 只对 D_1 起作用. 反复执行行变换可得方阵链: $B_1, B_2, B_3,\cdots, B_{n-1}$.

定理 2　当 $\gcd(n, k)= 1$, 即 n, k 互素时, 由 n 阶分段方 A 通过行 Z 变换所得 B_k 的各列元素之和都等于 Σ_n.

证明　由前面的结论可知: 当 $\gcd(n,k)=1$ 时, B_k 的各列元素之和都是:

$$\begin{aligned}&[0+1+2+\cdots+(n-1)]n+(1+2+3+\cdots+n)\\ &=n\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n}{2}\\ &=\frac{n(n^2+1)}{2}=\sum\nolimits_n.\end{aligned} \tag{16}$$

Σ_n 称为 n 阶幻和. 对 n 阶分段方 A 依次执行列 Z 变换可得同样的结论.

因此, 在用数:$1,2,3,\cdots,n^2$ 组成的 n 阶方阵中, 若方阵的各列(或行)内所有元素之和都等于 n 阶幻和, 则称此方为列和方 (或行和方). 每一个列和方提供了数: $1,2,3,\cdots,n^2$ 的一个 n 阶幻和分组. 例如, 5 阶分段方:

$$A=\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ \hline\end{array} \tag{17}$$

对之依次执行行 Z 变换得下列各方:

$$B_1=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 13 & 14 & 15 & 11 & 12 \\ 19 & 20 & 16 & 17 & 18 \\ 25 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \hline\end{array} \qquad B_2=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 15 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 16 \\ 24 & 25 & 21 & 22 & 23 \\ \hline\end{array} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8\\ 12 & 13 & 14 & 15 & 11\\ 20 & 16 & 17 & 18 & 19\\ 23 & 24 & 25 & 21 & 22\\ \hline\end{array}\qquad \boldsymbol{B}_4=\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 14 & 15 & 11 & 12 & 13\\ 18 & 19 & 10 & 16 & 17\\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21\\ \hline\end{array}$$

$\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4$ 都是 5 阶列和方,它们中各列元素之和都等于 5 阶幻和 $\Sigma_5=65$. 对(17)执行列 Z 变换得各行组成相同的类似的行和方. 容易看出, 当 n 是素数时, $\boldsymbol{B}_k$ 都是列和方 ($n=5,7,11,\cdots$).方(17)边外的红字是分段方的行、列排列顺序, 称为分段方的行、列序.

把数列 $1,2,3,\cdots,n^2$ 分成 n 个数一组, 共 n 组, 各组 n 个数之和都等于 n 阶幻和 Σ_n, 则称这种分组为 n 阶幻和分组. 所分之组为 n 阶幻和组. 因此, 每一个 n 阶列和方(行和方)都提供了一个 n 阶幻和分组及其幻和组.

定理 3 当两个分段方的行、列序是对应的同态排列时, 对所得分段方执行行 Z 变换给出的列和方是对应相同的, 即所提供的幻和组是相同的.

证明 这里仍以 5 阶为例, $\Sigma_5=65$. 如分段方(17)的同态序有:

①(1,2,3,4,5) ②(1,3,5,2,4) ③(1,5,4,3,2) ④(1,4,2,5,3)

等. 例如, 由②作列序有:

$$\boldsymbol{A}\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 6 & 8 & 10 & 7 & 9\\ 11 & 13 & 15 & 12 & 14\\ 16 & 18 & 20 & 17 & 19\\ 21 & 23 & 25 & 22 & 24\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_1\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 8 & 10 & 7 & 9 & 6\\ 15 & 12 & 14 & 11 & 13\\ 17 & 19 & 16 & 18 & 20\\ 24 & 21 & 23 & 25 & 22\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_2\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 10 & 7 & 9 & 6 & 8\\ 14 & 11 & 13 & 15 & 12\\ 18 & 20 & 17 & 19 & 16\\ 22 & 24 & 21 & 23 & 25\\ \hline\end{array}$$

$$\boldsymbol{B}_3\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 6 & 8 & 10\\ 13 & 15 & 12 & 14 & 11\\ 19 & 16 & 18 & 20 & 17\\ 25 & 22 & 24 & 21 & 23\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_4\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 9 & 6 & 8 & 10 & 7\\ 12 & 14 & 11 & 13 & 15\\ 20 & 17 & 19 & 16 & 18\\ 23 & 25 & 22 & 24 & 21\\ \hline\end{array}\tag{19}$$

这里的列和方与前面的列和方(18)进行比较, 有如下对应关系:

$$\boldsymbol{B}_1\rightarrow\boldsymbol{B}_2,\quad \boldsymbol{B}_2\rightarrow\boldsymbol{B}_4,\quad \boldsymbol{B}_3\rightarrow\boldsymbol{B}_1,\quad \boldsymbol{B}_4\rightarrow\boldsymbol{B}_3\tag{20}$$

分别对应相同. 再如以②为列序, ④为行序作分段方:

$$\boldsymbol{A}\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 16 & 18 & 20 & 17 & 19\\ 6 & 8 & 10 & 7 & 9\\ 21 & 23 & 25 & 22 & 24\\ 11 & 13 & 15 & 12 & 14\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_1\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 18 & 20 & 17 & 19 & 16\\ 10 & 7 & 9 & 6 & 8\\ 22 & 24 & 21 & 23 & 25\\ 14 & 11 & 13 & 15 & 12\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_2\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 20 & 17 & 19 & 16 & 18\\ 9 & 6 & 8 & 10 & 7\\ 23 & 25 & 22 & 24 & 21\\ 12 & 14 & 11 & 13 & 15\\ \hline\end{array}$$

$$\boldsymbol{B}_3\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 17 & 19 & 16 & 18 & 20\\ 8 & 10 & 7 & 9 & 6\\ 24 & 21 & 23 & 25 & 22\\ 15 & 12 & 14 & 11 & 13\\ \hline\end{array}\quad \boldsymbol{B}_4\begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 3 & 5 & 2 & 4\\ 19 & 16 & 18 & 20 & 17\\ 7 & 9 & 6 & 8 & 10\\ 25 & 22 & 24 & 21 & 23\\ 13 & 15 & 12 & 14 & 11\\ \hline\end{array}\tag{21}$$

这里与(18)各列和方对应如下:

$$\boldsymbol{B}_1\rightarrow\boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_2\rightarrow\boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_3\rightarrow\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_4\rightarrow\boldsymbol{B}_3.\tag{22}$$

其余行、列序的对比可类似给出.

这里“列和方对应相同”，是指两列和方的各列有对应相同的组成元素，而不问各列的排列顺序以及各列内元素的排列顺序.“幻和组相同”具有类似的意义.

用互不同态的排列作为分段方之行、列序来构造不同的分段方，进而给出不同的列和方. 再利用列和方来构造出互不同构的完美幻方、这就是我们编制完美幻方的基本思路. 完美幻方的这种构造方法统称为列和方法或可幻排列法.

例如，对 $n=5$，有如下 6 个不同态 5 级排列：

①(1,2,3,4,5)　②(1,2,4,5,3)　③(1,2,5,3,4)
④(1,2,4,3,5)　⑤(1,2,3,5,4)　⑥(1,2,5,4,3)　(23)

由这 6 个不同态的 5 级排列可给出 36 种行、列序组合，因此可构造出 36 个不同的 5 阶分段方. 进而可给出 36 个互不同构 5 阶完美幻方. 这就是前章已给出基本的 5 阶完美幻方 C_{ij} 总表(一)($i,j=1,2,\cdots,6$). 下面再看几个 5 阶完美幻方的构作方法:

例 1	1	2	5	3	4	B_1					C_{31}					D_{31}				
1	1	2	5	3	4	1	2	5	3	4	1	13	22	9	20	1	10	14	17	23
2	6	7	10	8	9	7	10	8	9	6	7	19	5	11	23	19	22	3	6	15
3	11	12	15	13	14	15	13	14	11	12	15	21	8	17	4	8	11	20	24	2
4	16	17	20	18	19	18	19	16	17	20	18	2	14	25	6	25	4	7	13	16
5	21	22	25	23	24	24	21	22	25	23	24	10	16	3	12	12	18	21	5	9

例 2	1	2	4	5	3	B_1					C_{26}					D_{26}				
1	1	2	4	5	3	1	2	4	5	3	1	25	12	8	19	1	9	23	17	15
2	6	7	9	10	8	7	9	10	8	6	7	18	4	21	15	18	12	5	6	24
5	21	22	24	25	23	24	25	23	21	22	24	11	10	17	3	10	21	19	13	2
4	16	17	19	20	18	20	18	16	17	19	20	2	23	14	6	14	3	7	25	16
3	11	12	14	15	13	13	11	12	14	15	13	9	16	5	22	22	20	11	4	8

(24)

例 3	1	2	3	5	4	B_1					C_{55}					D_{55}				
1	1	2	3	5	4	1	2	3	5	4	1	15	17	9	23	1	8	14	22	20
2	6	7	8	10	9	7	8	10	9	6	7	24	3	11	20	24	17	5	6	13
3	11	12	13	15	14	13	15	14	11	12	13	16	10	22	4	10	11	23	19	2
5	21	22	23	25	24	25	24	21	22	23	25	2	14	18	6	18	4	7	15	21
4	16	17	18	20	19	19	16	17	18	20	19	8	21	5	12	12	25	16	3	9

这里将再给出各 C_{ij} 的拓扑变换所得 5 阶完美幻方总表 D_{ij}(二). 在 C_{ij}, D_{ij} 中，$i,j = 1,2,3,4,5,6$ 的编号(即表外边数码)与(23)同态排列类编号一致. 因排列①,②是中心对称排列，完美幻方 C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, D_{11}, D_{12}, D_{21},D_{22} 是中心对称方阵. 所谓“中心对称方阵”是指，在数字方阵中，把组成数列的中心数(这里是 13)置于方阵的中心位置，则关于中心位置对称位置上的两数之和总是相等的(这里是 $a + a' = 26$). 排列①, ③; ①, ④分别也是以 5、1 为偏中心的偏对称排列，由之所产生的完美幻方也是偏中心对称的. 前者以 25 为对称中心，后者以 1 为对称中心. 但这种偏中心对称方阵，只有通过对称中心数的线上的对称位置两数之和相等，即过对称中心的行、列线及两条对角线 . 例如，在 C_{33} 中，通过对称中心 25 的线上，对称位置二之和为: $a + a' = 20$.

	1					2					3					4					5					6				
1	1	15	24	8	17	1	13	25	9	17	1	14	23	10	17	1	15	23	9	17	1	14	25	8	17	1	13	24	10	17
	23	7	16	5	14	24	7	16	3	15	25	7	16	4	13	24	7	16	5	13	23	7	16	4	15	25	7	16	3	14
	20	4	13	22	6	18	5	14	22	6	19	3	15	22	6	20	3	14	22	6	19	5	13	22	6	18	4	15	22	6
	12	21	10	19	3	12	21	8	20	4	12	21	9	18	5	12	21	10	18	4	12	21	9	20	3	12	21	8	19	5
	9	18	2	11	25	10	19	2	11	23	8	20	2	11	24	8	19	2	11	25	10	18	2	11	24	9	20	2	11	23
2	1	20	14	8	22	1	18	15	9	22	1	19	13	10	22	1	20	13	8	22	1	19	15	8	22	1	18	14	10	22
	13	7	21	5	19	14	7	21	3	20	15	7	21	4	18	14	7	21	5	18	13	7	21	4	20	15	7	21	3	19
	25	4	18	12	6	23	5	19	12	6	24	3	20	12	6	25	3	19	12	6	24	5	18	12	6	23	4	20	12	6
	17	11	10	24	3	17	11	8	25	4	17	11	9	23	5	17	11	10	23	4	17	11	9	25	3	17	11	8	24	5
	9	23	2	16	15	10	24	2	16	13	8	25	2	16	14	8	24	2	16	15	10	23	2	16	14	9	25	2	16	13
3	1	25	19	8	12	1	23	20	9	12	1	24	18	10	12	1	25	18	9	12	1	24	20	8	12	1	23	19	10	12
	18	7	11	5	24	19	7	11	3	25	20	7	11	4	23	19	7	11	5	23	18	7	11	4	25	20	7	11	3	24
	15	4	23	17	6	13	5	24	17	6	14	3	25	17	6	15	3	24	17	6	14	5	23	17	6	13	4	25	17	6
	22	16	10	14	3	22	16	8	15	4	22	16	9	13	5	22	16	10	13	4	22	16	9	15	3	22	16	8	14	5
	9	13	2	21	20	10	14	2	21	18	8	15	2	21	19	8	14	2	21	20	10	13	2	21	19	9	15	2	21	18
4	1	20	24	8	12	1	18	25	9	12	1	19	23	10	12	1	20	23	9	12	1	19	25	8	12	1	18	24	10	12
	23	7	11	5	19	24	7	11	3	20	25	7	11	4	18	24	7	11	5	18	23	7	11	4	20	25	7	11	3	19
	15	4	18	22	6	13	5	19	22	6	14	3	20	22	6	15	3	19	22	6	14	5	18	22	6	13	4	20	22	6
	17	21	10	14	3	17	21	8	15	4	17	21	9	13	5	17	21	10	13	4	17	21	9	15	3	17	21	8	14	5
	9	13	2	16	25	10	14	2	16	23	8	15	2	16	24	8	14	2	16	25	10	13	2	16	24	9	15	2	16	23
5	1	15	19	8	22	1	13	20	9	22	1	14	18	10	22	1	15	18	9	22	1	14	20	8	22	1	13	19	10	22
	18	7	21	5	14	19	7	21	3	15	20	7	21	4	13	19	7	21	5	13	18	7	21	4	15	20	7	21	3	14
	25	4	13	17	6	23	5	14	17	6	24	3	15	17	6	25	3	14	17	6	24	5	13	17	6	23	4	15	17	6
	12	16	10	24	3	12	16	8	25	4	12	16	9	23	5	12	16	10	23	4	12	16	9	25	3	12	16	8	24	5
	9	23	2	11	20	10	24	2	11	18	8	25	2	11	19	8	24	2	11	20	10	23	2	11	19	9	25	2	11	18
6	1	25	14	8	17	1	23	15	9	17	1	24	13	10	17	1	25	13	9	17	1	24	15	8	17	1	23	14	10	17
	13	7	16	5	24	14	7	16	3	25	15	7	16	4	23	14	7	16	5	23	13	7	16	4	25	15	7	16	3	25
	20	4	23	12	6	18	5	24	12	6	19	3	25	12	6	20	3	24	12	6	19	5	23	12	6	18	4	25	12	6
	22	11	10	19	3	22	11	8	20	4	22	11	9	18	5	22	11	10	23	4	22	11	9	20	3	22	11	8	19	5
	9	18	2	21	15	10	19	2	21	13	8	20	2	21	14	8	19	2	21	15	10	18	2	21	14	9	20	2	21	13

5阶完美幻方总表(二)　(D_{ij}, $i,j = 1,2,3,4,5,6$)

四、不存在 2、3 阶完美幻方

不存在 2 阶幻方，自然也就不存在 2 阶完美幻方.

3 阶幻方由数集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 组成，$\Sigma_3=15$. 由分段方：

$$\overset{\boldsymbol{A}}{\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\\hline\end{array}}\ \xrightarrow{\text{行 Z}}\ \overset{\boldsymbol{B}_1}{\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\5&6&4\\9&7&8\\\hline\end{array}}\overset{\boldsymbol{B}_2}{\begin{array}{ccc|}\hline 1&2&3\\6&4&5\\8&9&7\\\hline\end{array}} \tag{25}$$

只有两个列和方幻和组，不足以构造 3 阶完美幻方.

再者，在完美幻方中每个数都将出现在行、列、Ⅰ、Ⅱ对角线组的某一条线中，即每个数都应在 4 个 3 元组中出现，但 1,2,…,9 分为和为 15 的 3 元组只能有下列 8 种：

$$\begin{array}{lll} 1,5,9; & 2,4,9; & 3,4,8;\\ 1,6,8; & 2,5,8; & 3,5,7;\\ 2,6,7; & 4,5,6. & \end{array} \tag{26}$$

在这里，只有数 5 出现在 4 个 3 元组中，而其余各数均不在 4 个 3 元组中. 其中 2,4,6,8 在 3 个 3 元组，1,3,7,9 在 2 个 3 元组中. 因此，用这些 3 元组也不能组合出 3 阶完美幻方.

用两个列和方按如下流程即可给出 3 阶幻方：

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{行 Z}}\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\5&6&4\\9&7&8\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{列 Z}}\begin{array}{|ccc|}\hline 1&6&8\\5&7&3\\9&2&4\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{列轮回}}\begin{array}{|ccc|}\hline 8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\\\hline\end{array} \tag{27}$$

最后一方已经是 3 阶幻方了，但不是完美幻方. 我国古人用如下流程来实现：

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\\hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccccc} &&1&&\\ &4&&2&\\ 7&&5&&3\\ &8&&6&\\ &&9&& \end{array}\rightarrow\begin{array}{ccccc} &&9&&\\ &4&&2&\\ 3&&5&&7\\ &8&&6&\\ &&1&& \end{array}\rightarrow\begin{array}{|ccc|}\hline 4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\\\hline\end{array} \tag{28}$$

九子斜排	上下对易	左右相更	四维梃出	
戴九履一	左三右七	二四为肩	六八为足	(29)

这就是中国著名的所谓"洛书".

定理 4　不存在 3 阶完美幻方.

往后可以看到，这里提出的"行 Z—列 Z—轮回"流程将是本书构造完美幻方的基本思路. 利用转置、旋转等变换，3 阶幻方有下列 8 种同构状态：

	旋转	90°	180°	270°
$\boldsymbol{A}$	$\begin{array}{ccc}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{array}$	$\begin{array}{ccc}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{array}$	$\begin{array}{ccc}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{array}$	$\begin{array}{ccc}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{array}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\begin{array}{ccc}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{array}$	$\begin{array}{ccc}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{array}$	$\begin{array}{ccc}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{array}$	$\begin{array}{ccc}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{array}$

(30)

行、列轮回、循环、拓扑等变换对幻方不是同构变换.

第 4 章　素数阶完美幻方

本章研究除 2, 3 以外的所有素数 $n=5,7,11,13,17,19,\cdots$ 阶的完美幻方的构造法. 由列和方定理知: $B_1,B_2,B_3,\cdots,B_{n-1}$ 都是列和方, 各方中各列元素之和都等于 n 阶幻和 Σ_n. 这些列和方各不相同, 足以建立许多的完美幻方. 从下面对各阶完美幻方的构造中, 容易看到“行 Z—列 Z—轮回”流程的体现.

一、5 阶完美幻方

元素集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,25\}$, 幻和 $\Sigma_5=65$, $\varphi(5)=4$. 同态类数 $\lambda(5)=3!=6$, 各同态类的代表排列是:

①(1,2,3,4,5), ②(1,2,4,5,3), ③(1,2,5,3,4),

④(1,2,4,3,5), ⑤(1,2,3,5,4), ⑥(1,2,5,4,3). (1)

其中①、⑤是对称的同态类. 在这 6 个同态类代表中, 任取其 2 作分段方的行、列序, 构造分段方. 再作行 Z 变换, 可得 4 个列和方, 如第 3 章(17)、(18). 由这 4 个列和方可组合出 5 阶完美幻方. 构造方法是对分段方依次执行行、列 Z 变换:

A_{11}

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

行 Z →

B_1

1	2	3	4	5
7	8	9	10	6
13	14	15	11	12
19	20	16	17	18
25	21	22	23	24

列 Z ↓ (2)

C

1	8	15	17	24
7	14	16	23	5
13	20	22	4	6
19	21	3	10	12
25	2	9	11	18

列 Z ←

C_{11}

1	14	22	10	18
7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12

C_{11} 就是一个 5 阶完美幻方. 它的各线组, 由第 3 章(18)的列和方, 有对应关系如下:

行线组	列线组	对角线组 I	II
B_4	B_1	B_2	B_3

(3)

C_{11} 用完了 A_{11} 所产生的 4 个列和方 B_1,B_2,B_3,B_4. 用这 4 个列和方构造完美幻方时, 总是按 B_1,B_4 和 B_2,B_3 分组配对. 当以一组为行、列线组时, 另一对就是对角线组. 因此, 由一个 5 阶分段方可以而且只能给出一个 5 阶完美幻方. 我们称它为基本的 5 阶完美幻方. 通过转置、拓扑等同构变换, 这些线组及其各线在完美幻方中所担当的角色可以相互转换. 由前已知, 一个 5 阶完美幻方可得 $8\times5^2\ \varphi(5)=800$ 个同构的 5 阶完美幻方. 从而, 由一个 5 阶分段方可以而且只能给出一个 5 阶完美幻方同构类.

选取 5 级排列的 6 个同态类(1)作为分段方的行、列序, 可组合作出 36 个不同的 5 阶分段方, 从而可得 36 个基本的 5 阶完美幻方. 第 2 章已经给出了所有的基本的 5 阶完美幻方组成的总表

$C_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$.第3章又给出了C_{ij}的拓扑变换表$D_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$.再通过同构变换，可得所有的5阶完美幻方. 下面再给出C_{25}的制作过程:

A_{25}

1	2	4	5	3
6	7	9	10	8
11	12	14	15	13
21	22	24	25	23
16	17	19	20	18

行Z →

B_1

1	2	4	5	3
7	9	10	8	6
14	15	13	11	12
25	23	21	22	24
18	16	17	19	20

C

1	9	13	22	20
7	15	21	19	3
14	23	17	5	6
25	16	4	8	12
18	2	10	11	24

列Z ←

C_{25}

1	15	17	8	24
7	23	4	11	20
14	16	10	22	3
25	2	13	19	6
18	9	21	5	12

(4)

(2)、(4)中的C方不是完美幻方. 因为，其中第Ⅱ对角线组是分段方的行线组A_0或列线组A_1. 在一个方阵中,只要有分段方的行线组A_0或列线组A_1成线状出现，该方阵就不可能是完美幻方.因此,总共可得$\Phi(5)=36\times800=28800$个5阶完美幻方. 前两章已给出了所有的基本的5阶完美幻方C_{ij}及其拓扑变换$D_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$. 特别地，其中$C_{ij}, D_{ij}(i,j=1,2)$是对称的5阶完美幻方.

5阶完美幻方中的幻图　在完美幻方中，除了各行各列各对角线上元素和等于幻和Σ_n外，有可能还存在一些n格图，其图中各格数字之和也等于Σ_n. 满足这种条件的n格图称为n阶幻图.

例如，在5阶完美幻方

1	15	17	8	24
7	23	4	11	20
14	16	10	22	3
25	2	13	19	6
18	9	21	5	12

(5)

中,5个数字之和等于$\Sigma_5=65$. 在5阶完美幻方中有如下方格图都可能是5阶幻图:

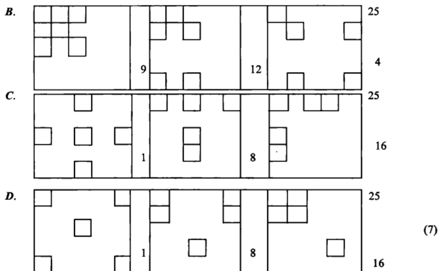
	A					B		B					C				D				D
A	A	A					A														
	A					B		B				C		C		C			D		
														C				D				D

(6)

容易看出，这些图形都是完全对称的(包括中心、水平、垂直对称). 再由完美幻方的行、列轮回所引起的平面延展性可知，一个确定的幻图可平移到完美幻方的任意位置上. 特别在边、角上的情形有如下图形:

内部　边　角

A.　9　12　25　4



(7)

图中数字表示该种方的个数. 现在, 把这些图形方框分别画在玻璃纸上, 并放到任一个 5 阶完美幻方上去套, 所套数字之和一定等于Σ_5吗? 对此有:

定理 1　在任一 5 阶完美幻方中, 处于 ***A, B, C, D*** 型任一 5 方格中的数字之和必等于 5 阶幻和Σ_5, 即他们都是 5 阶幻图.

证明　作图:

B	***A***	***B***	***B***	***B***	***C***	***A***			***C***	***D***	***D***	***D***	***D***	***C***	***C***	***A***	***C***	***C***	***C***
A	***A***	***A***	***B***	***B***	***A***	***A***	***A***			***D***	***D***	***D***	***D***	***C***	***A***	***A***	***A***	***A***	***C***
B	***A***	***B***	***B***	***B***		***A***	***C***	***A***							***C***	***A***	***A***	***A***	***A***
							A	***A***	***A***	***D***	***C***	***C***	***D***	***C***	***C***	***C***	***C***	***A***	***C***
					C			***A***	***C***										

(8)

由各行各列各对角线元素和均为Σ_5, 可得以 ***A, B, C, D*** 为变元的下列方程:

$$\begin{cases} A+2B=3\Sigma_5 \\ 2A+C=3\Sigma_5 \qquad 4B-C=3\Sigma_5, \\ C+2D=3\Sigma_5 \qquad 2A-2D=0, A=D, 2A=2\Sigma_5, \\ 2A+2C=4\Sigma_5 \qquad C=\Sigma_5 \end{cases}$$

从而得　$A=\Sigma_5$,　　$B=C=D=\Sigma_5$.

上面这些 5 阶幻图在完美幻方的同构变换下是可以相互转换的. 例如

A	10	18	1	14	22	10	1	22	18	14	$\pi_2 A \pi_2$
	11	24	7	20	3	17	13	9	5	21	
	17	5	13	21	9	4	25	16	12	8	
A 型	23	6	19	2	15	11	7	3	24	20	***D*** 型
	4	12	25	8	16	23	19	15	6	2	
A°	10	12	19	21	3	10	19	3	12	21	$\pi_2 A^\circ \pi_2$
	24	1	8	15	17	13	22	6	10	4	
	13	20	22	4	6	16	5	14	21	7	
C 型	2	9	11	18	25	24	8	17	1	15	***B*** 型
	16	23	5	7	14	2	11	25	9	18	

(9)

二、7 阶完美幻方

元素集 F = {1,2,3,…,49}，幻和 $\Sigma_7 = 175$, $\varphi(7)= 6$, $\lambda(7)= 5! = 120$, $\mu(7)= 2!4 = 8$. 任给两个 7 级排列作为分段方的行、列序，可作出一个 7 阶分段方.

例 1　以排列π=(1,2,3,4,5,6,7)为列、行序的分段方，然后得列和方：

							A
1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	

(10)

B_1							B_2							B_3						
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14	8	10	11	12	13	14	8	9	11	12	13	14	8	9	10
17	18	19	20	21	15	16	19	20	21	15	16	17	18	21	15	16	17	18	19	20
25	26	27	28	22	23	24	28	22	23	24	25	26	27	24	25	26	27	28	22	23
33	34	35	29	30	31	32	30	31	32	33	34	35	29	34	35	29	30	31	32	33
41	42	36	37	38	39	40	39	40	41	42	36	37	38	37	38	39	40	41	42	36
49	43	44	45	46	47	48	48	49	43	44	45	46	47	47	48	49	43	44	45	46

B_6							B_5							B_4						
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
14	8	9	10	11	12	13	12	13	14	8	9	10	11	13	14	8	9	10	11	12
20	21	15	16	17	18	19	16	17	18	19	20	21	15	18	19	20	21	15	16	17
26	27	28	22	23	24	25	27	28	22	23	24	25	26	23	24	25	26	27	28	22
32	33	34	35	29	30	31	31	32	33	34	35	29	30	35	29	30	31	32	33	34
38	39	40	41	42	36	37	42	36	37	38	39	40	41	40	41	42	36	37	38	39
44	45	46	47	48	49	43	46	47	48	49	43	44	45	45	46	47	48	49	43	44

(11)

各 B_k(k =1,2,3,4,5,6)都是列和方，因各方的各列元素之和都等于Σ_7 = 175. 往后总是用各方的第一列作为代表：

B_1	1	9	17	25	33	41	49	Σ_7= 175
B_2	1	10	19	28	30	39	48	175
B_3	1	11	21	24	34	37	47	175
B_4	1	12	16	27	31	42	46	175
B_5	1	13	18	23	35	40	45	175
B_6	1	14	20	26	32	38	44	175
A_0	1	2	3	4	5	6	7	28
A_1	1	8	15	22	29	36	43	154

(12)

A_0, A_1 是分段方的行线组、列线组,它们不是列、行和方. 往后，对于分段方、列和方总分别用 A, B 及足标来表示. 而 A_0, A_1 总是表示分段方的行线组、列线组.

现在，我们用π的循环排列建立循环排列表. 首先π的循环排列如下：

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\ ;\\
\pi_2 &= \{1, 3, 5, 7, 2, 4, 6\}\ ;\\
\pi_4 &= \{1, 5, 2, 6, 3, 7, 4\}\ ;\\
\pi_3 &= \{1, 4, 7, 3, 6, 2, 5\}\ ;\\
\pi_5 &= \{1, 6, 4, 2, 7, 5, 3\}\ ;\\
\pi_6 &= \{1, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}\ .
\end{aligned} \tag{13}$$

如下作循环排列表，并选取列和方填入. 这里选用 B_1 填入:

	1	2	3	4	5	6	7	1	3	5	7	2	4	6	1	5	2	6	3	7	4
1	1							1	36	22	8	53	29	15	1	22	43	15	36	8	29
2		2						9	44	30	16	2	37	23			2				
3			3					17	3	38	24	10	48	31					3		
4				4				25	11	46	32	18	4	39							4
5					5			33	19	5	40	26	12	47		5					
6						6		41	27	13	48	34	20	6				6			
7	①						7	49	35	21	7	42	28	14						7	②
1	1	26	44	20	38	14	32	1							1	38	26	14	44	32	20
3	9	34	3	28	46	15	40		3					15	9	46	34	15	3	40	28
5	17	42	11	29	5	23	48			5			29		17	5	42	23	11	48	29
7	25	43	19	37	13	31	7				7	42			25	13	43	31	19	7	37
2	33	2	27	45	21	39	8				8	2			33	21	2	39	27	8	45
4	41	10	35	4	22	47	16			22			4		41	22	10	47	35	16	4
6	49	18	36	12	30	6	24		36					6	49	30	18	6	36	24	12
1	1						③	1	27	46	16	42	12	31	1						
5		43			5			9	35	5	24	43	20	39		5					
2		2	36					17	36	13	32	2	28	47			2				
6				29		6		25	44	21	40	10	29	6				6			
3			3		22			33	3	22	48	18	37	14					3		
7						15	7	41	11	30	7	26	45	15						7	
4	④			4			8	49	19	38	8	34	4	23							4
1	1	18	35	45	13	23	40	1							1						
4	9	26	36	4	21	31	48		36												4
7	17	34	44	12	22	39	7			22										7	
3	25	42	3	20	30	47	8				8								3		
6	33	43	11	28	38	6	16					43						6			
2	41	2	19	29	46	14	24						29				2				
5	49	10	27	37	5	15	32							15		5					
1	1	34	11	37	21	47	24	1							1						
6	9	42	19	45	22	6	32							6		22					
4	17	43	27	4	30	14	40						4				43				
2	25	2	35	12	38	15	48					2						15			
7	33	10	36	20	46	23	7				7								36		
5	41	18	44	28	5	31	8			5										8	
3	49	26	3	29	13	39	16	⑤	3												29
1	1						⑥	1	19	30	48	10	28	39	1						
7							7	9	27	38	7	18	29	47							29
6						6		17	35	46	8	26	37	6						8	
5					5			25	36	5	16	34	45	14					36		
4				4				33	44	13	24	42	4	15				15			
3			3					41	3	21	32	43	12	23			43				
2		2						49	11	22	40	2	20	31		22					

循环排列表的构造和填写方法:

1. 表外边数字分别是π的循环排列: π_1, π_6, π_2, π_5, π_4, π_3;

2. 因而表中每格都是 7 阶方. 本来应为 6 行 6 列方, 因每行的后三方与前三方是互为列逆序的, 故省去后三列;

3. 填表时, 首先按左边和上边排列,相同数字交叉处填入该相同数字. 当这些数字(A_0)形成一条线时, 该方不用再填; 在续填中, 当 A_1 也成线形出现时, 该方也不用再填. 因此, A_0, A_1 之第一列(行)可用黑体字填写.

上表选用 B_1 填入. 下面分别再把 B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 填入循环排列表, 直接地各可得 6 个 7 阶完美幻方.

B_2	1 10 19 28 30 39 48 40 49 2 11 20 22 31 23 32 41 43 3 12 21 13 15 24 33 42 44 4 45 5 14 16 25 34 36 35 37 46 6 8 17 26 18 27 29 38 47 7 9	1 10 19 28 30 39 48 23 32 41 43 3 12 21 45 5 14 16 25 34 36 18 27 29 38 47 7 9 40 49 2 11 20 22 31 13 15 24 33 42 44 4 35 37 46 6 8 17 26	1 10 19 28 30 39 48 25 34 36 45 5 14 16 49 2 11 20 22 31 40 17 26 35 37 46 6 8 41 43 3 12 21 23 32 9 18 27 29 38 47 7 33 42 44 4 13 15 24
	1 10 19 28 30 39 48 16 25 34 36 45 5 14 31 40 49 2 11 20 22 46 6 8 17 26 35 37 12 21 23 32 41 43 3 27 29 38 47 7 9 18 42 44 4 13 15 24 33	1 10 19 28 30 39 48 32 41 43 3 12 21 23 14 16 25 34 36 45 5 38 47 7 9 18 27 29 20 22 31 40 49 2 11 44 4 13 15 24 33 42 26 35 37 46 6 8 17	1 10 19 28 30 39 48 21 23 32 41 43 3 12 34 36 45 5 14 16 25 47 7 9 18 27 29 38 11 20 22 31 40 49 2 24 33 42 44 4 13 15 37 46 6 8 17 26 35
B_3	1 11 21 24 34 37 47 38 48 2 12 15 25 35 26 29 39 49 3 13 16 14 17 27 30 40 43 4 44 5 8 18 28 31 41 32 42 45 6 9 19 22 20 23 33 36 46 7 10	1 11 21 24 34 37 47 28 31 41 44 5 8 18 48 2 12 15 25 35 38 19 22 32 42 45 6 9 39 49 3 13 16 26 29 10 20 23 33 36 46 7 30 40 43 4 14 17 27	1 11 21 24 34 37 47 41 44 5 8 18 28 31 25 35 38 48 2 12 15 9 19 22 32 42 45 6 49 3 13 16 26 29 39 33 36 46 7 10 20 23 17 27 30 40 43 4 14
	1 11 21 24 34 37 47 35 38 48 2 12 15 25 13 16 26 29 39 49 3 40 43 4 14 17 27 30 18 28 31 41 44 5 8 45 6 9 19 22 32 42 23 33 36 46 7 10 20	1 11 21 24 34 37 47 16 26 29 39 49 3 13 31 41 44 5 8 18 28 46 7 10 20 23 33 36 12 15 25 35 38 48 2 27 30 40 43 4 14 17 42 45 6 9 19 22 32	1 11 21 24 34 37 47 31 41 44 5 8 18 28 12 15 25 35 38 48 2 42 45 6 9 19 22 32 16 26 29 39 49 3 13 46 7 10 20 23 33 36 27 30 40 43 4 14 17
B_4	1 12 16 27 31 42 46 28 32 36 47 2 13 17 48 3 14 18 22 33 37 19 23 34 38 49 4 8 39 43 5 9 20 24 35 10 21 25 29 40 44 6 30 41 45 7 11 15 26	1 12 16 27 31 42 46 17 28 32 36 47 2 13 33 37 48 3 14 18 22 49 4 8 19 23 34 38 9 20 24 35 39 43 5 25 29 40 44 6 10 21 41 45 7 11 15 26 30	1 12 16 27 31 42 46 37 48 3 14 18 22 33 24 35 39 43 5 9 20 11 15 26 30 41 45 7 47 2 13 17 28 32 36 34 38 49 4 8 19 23 21 25 29 40 44 6 10
	1 12 16 27 31 42 46 24 35 39 43 5 9 20 47 2 13 17 28 32 36 21 25 29 40 44 6 10 37 48 3 14 18 22 33 11 15 26 30 41 45 7 34 38 49 4 8 19 23	1 12 16 27 31 42 46 35 39 43 5 9 20 24 13 17 28 32 36 47 2 40 44 6 10 21 25 29 18 22 33 37 48 3 14 45 7 11 15 26 30 41 23 34 38 49 4 8 19	1 12 16 27 31 42 46 20 24 35 39 43 5 9 32 36 47 2 13 17 28 44 6 10 21 25 29 40 14 18 22 33 37 48 3 26 30 41 45 7 11 15 38 49 4 8 19 23 34

B_5	1	13	18	23	35	40	45	1	13	18	23	35	40	45	1	13	18	23	35	40	45
	42	47	3	8	20	25	30	25	30	42	47	3	8	20	37	49	5	10	15	27	32
	27	32	37	49	5	10	15	49	5	10	15	27	32	37	24	29	41	46	2	14	19
	12	17	22	34	39	44	7	17	22	34	39	44	7	12	11	16	28	33	38	43	6
	46	2	14	19	24	29	41	41	46	2	14	19	24	29	47	3	8	20	25	30	42
	31	36	48	4	9	21	26	9	21	26	31	36	48	4	34	39	44	7	12	17	22
	16	28	33	38	43	6	11	33	38	43	6	11	16	28	21	26	31	36	48	4	9
	1	13	18	23	35	40	45	1	13	18	23	35	40	45	1	13	18	23	35	40	45
	19	24	29	41	46	2	14	30	42	47	3	8	20	25	32	37	49	5	10	15	27
	30	42	47	3	8	20	25	10	15	27	32	37	49	5	14	19	24	29	41	46	2
	48	4	9	21	26	31	36	39	44	7	12	17	22	34	38	43	6	11	16	28	33
	10	15	27	32	37	49	5	19	24	29	41	46	2	14	20	25	30	42	47	3	8
	28	33	38	43	6	11	16	48	4	9	21	26	31	36	44	7	12	17	22	34	39
	39	44	7	12	17	22	34	28	33	38	43	6	11	16	26	31	36	48	4	9	21
B_6	1	14	20	26	32	38	44	1	14	20	26	32	38	44	1	14	20	26	32	38	44
	27	33	39	45	2	8	21	39	45	2	8	21	27	33	40	46	3	9	15	28	34
	46	3	9	15	28	34	40	28	34	40	46	3	9	15	23	29	42	48	5	11	17
	16	22	35	41	47	4	10	10	13	22	35	41	47	4	13	19	25	31	37	43	7
	42	48	5	11	17	23	29	48	5	11	17	23	29	42	45	2	8	21	27	33	39
	12	18	24	30	36	49	6	30	36	49	6	12	18	24	35	41	47	4	10	13	22
	31	37	43	7	13	19	25	19	25	31	37	43	7	13	18	24	30	36	49	6	12
	1	14	20	26	32	38	44	1	14	20	26	32	38	44	1	14	20	26	32	38	44
	33	39	45	2	8	21	27	34	40	46	3	9	15	28	17	23	29	42	48	5	11
	9	15	28	34	40	46	3	11	17	23	29	42	48	5	33	39	45	2	8	21	27
	41	47	4	10	13	22	35	37	43	7	13	19	25	31	49	6	12	18	24	30	36
	17	23	29	42	48	5	11	21	27	33	39	45	2	8	9	15	28	34	40	46	3
	49	6	12	18	24	30	36	47	4	10	13	22	35	41	25	31	37	43	7	13	19
	25	31	37	43	7	13	19	24	30	36	49	6	12	18	41	47	4	10	13	22	35

把这些 7 阶完美幻方的各线组使用列和方列表如下. 从表中可见, 各有 4 方含有 4 个相同的列和方(扮演角色可以不同):

行 B_1	①	②	③	④	⑤	⑥	行 B_2						
列	B_6	B_6	B_4	B_5	B_3	B_2	列	B_5	B_5	B_1	B_4	B_6	B_3
Ⅰ	B_3	B_4	B_5	B_6	B_4	B_4	Ⅰ	B_1	B_6	B_3	B_1	B_1	B_5
Ⅱ	B_5	B_2	B_2	B_2	B_6	B_3	Ⅱ	B_4	B_3	B_4	B_6	B_5	B_4
行 B_3							行 B_4						
列	B_6	B_2	B_1	B_5	B_4	B_4	列	B_2	B_1	B_3	B_3	B_5	B_6
Ⅰ	B_2	B_4	B_6	B_6	B_6	B_1	Ⅰ	B_6	B_2	B_2	B_5	B_2	B_3
Ⅱ	B_5	B_5	B_4	B_1	B_5	B_2	Ⅱ	B_1	B_5	B_1	B_6	B_3	B_1
行 B_5							行 B_6						
列	B_4	B_1	B_3	B_2	B_2	B_6	列	B_4	B_2	B_5	B_1	B_3	B_1
Ⅰ	B_3	B_2	B_1	B_3	B_4	B_3	Ⅰ	B_1	B_5	B_4	B_2	B_5	B_5
Ⅱ	B_2	B_6	B_6	B_6	B_1	B_4	Ⅱ	B_3	B_1	B_3	B_4	B_2	B_3

(14)

因此由 B_1 至 B_6, 虽然各给出 6 个 7 阶完美幻方, 但有些完美幻方的行线组、列线组、对角线组 Ⅰ, Ⅱ 的组成是对应相同的. 通过仔细检查, 作为基本的 7 阶完美幻方只有 9 个. 事实上也有:

$$6\times6\div4=9. \tag{15}$$

故在往后, 对每一个分段方, 只需给出 9 个基本的 7 阶完美幻方就行了.而且这 9 个基本的 7 阶完美幻方只需由 B_1, B_3 就可全部给出.

利用循环排列表，当阶数较大时(例如 $n = 11,13,\cdots$)，将导致表的篇幅很大，不能全面给出. 下面将再介绍一种方法: 1. 选定一个列和方，依次作列 Z 变换; 2. 再按分段方的行序的循环排列进行列重排，亦可得到相应的完美幻方. 称此法为列 Z 变换串方法.

例2　再如以 $\pi_1=(1,2,3,5,6,7,4)$为行序，$\pi_2=(1,2,4,6,7,3,5)$为列序构造分段方，并作行Z变换得列和方:

A

1	2	3	5	6	7	4
8	9	10	12	13	14	11
22	23	24	26	27	28	25
36	37	38	40	41	42	39
43	44	45	47	48	49	46
15	16	17	19	20	21	18
29	30	31	33	34	35	32

(16)

B_1							B_2							B_3						
1	2	3	5	6	7	4	1	2	3	5	6	7	4	1	2	3	5	6	7	4
9	10	12	13	14	11	8	10	12	13	14	11	8	9	12	13	14	11	8	9	10
24	26	27	28	25	22	23	27	28	25	22	23	24	26	25	22	23	24	26	27	28
40	41	42	39	36	37	38	39	36	37	38	40	41	42	38	40	41	42	39	36	37
48	49	46	43	44	45	47	44	45	47	48	49	46	43	49	46	43	44	45	47	48
21	18	15	16	17	19	20	19	20	21	18	15	16	17	16	17	19	20	21	18	15
32	29	30	31	33	34	35	35	32	29	30	31	33	34	34	35	32	29	30	31	33

B_6							B_5							B_4						
1	2	3	5	6	7	4	1	2	3	5	6	7	4	1	2	3	5	6	7	4
11	8	9	10	12	13	14	14	11	8	9	10	12	13	13	14	11	8	9	10	12
28	25	22	23	24	26	27	26	27	28	25	22	23	24	23	24	26	27	28	25	22
41	42	39	36	37	38	40	37	38	40	41	42	39	36	42	39	36	37	38	40	41
47	48	49	46	43	44	45	46	43	44	45	47	48	49	45	47	48	49	46	43	44
17	19	20	21	18	15	16	20	21	18	15	16	17	19	18	15	16	17	19	20	21
30	31	33	34	35	32	29	31	33	34	35	32	29	30	33	34	35	32	29	30	31

再对 B_1 依法而作可得 6 个 7 阶完美幻方:

1	9	24	40	48	21	32	1.	1	9	24	40	48	21	32	2.
2	10	26	41	49	18	29	B_1	10	26	41	49	18	29	2	行 Z
3	12	27	42	46	15	30	转置	27	42	46	15	30	3	12	
5	13	28	39	43	16	31	为行	39	43	16	31	5	13	28	行 B_1
6	14	25	36	44	17	33		44	17	33	6	14	25	36	列 B_2
7	11	22	37	45	19	34		19	34	7	11	22	37	45	
4	8	23	38	47	20	35		35	4	8	23	38	47	20	
1	9	24	40	48	21	32	3.	1	9	24	40	48	21	32	
27	42	46	15	30	3	12	行循环	49	18	29	2	10	26	41	
44	17	33	6	14	25	36	①	12	27	42	46	15	30	3	②
35	4	8	23	38	47	20	行 B_1	16	31	5	13	28	39	43	行 B_1
10	26	41	49	18	29	2	列 B_2	25	36	44	17	33	6	14	列 B_3
39	43	16	31	5	13	28	Ⅰ B_4	34	7	11	22	37	45	19	Ⅰ B_4
19	34	7	11	22	37	45	Ⅱ B_3	38	47	20	35	4	8	23	Ⅱ B_6

(17)

1	9	24	40	48	21	32	③	1	9	24	40	48	21	32	④
42	46	15	30	3	12	27	行 $\boldsymbol{B_1}$	26	41	49	18	29	2	10	行 $\boldsymbol{B_1}$
33	6	14	25	36	44	17	列 $\boldsymbol{B_4}$	46	15	30	3	12	27	42	列 $\boldsymbol{B_5}$
23	38	47	20	35	4	8	Ⅰ $\boldsymbol{B_5}$	31	5	13	28	39	43	16	Ⅰ $\boldsymbol{B_6}$
18	29	2	10	26	41	49	Ⅱ $\boldsymbol{B_2}$	14	25	36	44	17	33	6	Ⅱ $\boldsymbol{B_2}$
13	28	39	43	16	31	5		37	45	19	34	7	11	22	
45	19	34	7	11	22	37		20	35	4	8	23	38	47	
1	9	24	40	48	21	32	⑤	1	9	24	40	48	21	32	⑥
41	49	18	29	2	10	26	行 $\boldsymbol{B_1}$	17	33	6	14	25	36	44	行 $\boldsymbol{B_1}$
30	3	12	27	42	46	15	列 $\boldsymbol{B_6}$	41	49	18	29	2	10	26	列 $\boldsymbol{B_6}$
28	39	43	16	31	5	13	Ⅰ $\boldsymbol{B_3}$	11	22	37	45	19	34	7	Ⅰ $\boldsymbol{B_4}$
17	33	6	14	25	36	44	Ⅱ $\boldsymbol{B_5}$	30	3	12	27	42	46	15	Ⅱ $\boldsymbol{B_2}$
11	22	37	45	19	34	7		47	20	35	4	8	23	38	
47	20	35	4	8	23	38		28	39	43	16	31	5	13	

其结果与以下循环排列表所得相同.

列	行	π_1		π_2		π_5	
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
B_1	A_0	B_2	A_1	B_3	B_6	B_5	B_4
①	$\boldsymbol{B_2}$	B_5	A_0	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_3}$	B_6	A_1
②	$\boldsymbol{B_5}$	$\boldsymbol{B_6}$	$\boldsymbol{B_2}$	A_1	B_4	B_3	A_0
③	$\boldsymbol{B_6}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_5}$	A_0	A_1	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_2}$
④	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_6}$	B_2	A_0	A_1	B_5
⑤	$\boldsymbol{B_4}$	A_1	B_3	$\boldsymbol{B_5}$	$\boldsymbol{B_2}$	A_0	B_6
⑥	A_1	A_0	B_4	$\boldsymbol{B_6}$	$\boldsymbol{B_5}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$

(18)

由上表容易指出完美幻方. 这里是π_1列 3 个, π_2列 2 个, π_5列 1 个. 使用这种方法可以充分利用行的循环变换和列 Z 变换前、后方阵之间的线组转换:

	前方	列	行	Ⅰ	Ⅱ → 消失
列 Z ↓		↓	↓	↓	
	后方	列	Ⅱ	行	Ⅰ → 新生

(19)

因此, 填上表时, 首先由 $\boldsymbol{B_1}$ 按π_1, π_2, π_5 决定各列Ⅰ, Ⅱ的第一个线组; 再通过列 Z 变换确定行所在列的线组排序; 其余各列即可按列依次填入各个线组. 从而得表(18). 再如, 从 $\boldsymbol{B_3}$

1	2	3	5	6	7	4
12	13	14	11	8	9	10
25	22	23	24	26	27	28
38	40	41	42	39	36	37
49	46	43	44	45	47	48
16	17	19	20	21	18	15
34	35	32	29	30	31	33

(20)

出发可得另外 3 个基本的 7 阶完美幻方:

⑦ 行 B_6 ⅠB_2 ⅡB_5							⑧ 行 B_4 ⅠB_6 ⅡB_5							⑨ 行 B_2 ⅠB_5 ⅡB_4						
1	17	41	11	30	47	28	1	23	45	33	13	42	18	1	44	10	19	27	35	39
12	35	43	24	6	18	37	12	41	21	4	22	44	31	12	20	28	32	36	2	45
25	2	19	42	8	31	48	25	43	30	10	40	20	7	25	29	37	3	47	13	21
38	13	32	44	26	7	15	38	19	6	28	46	29	9	38	5	48	14	18	22	30
49	22	3	20	39	9	33	49	32	8	37	17	5	27	49	11	15	23	31	40	6
16	40	14	29	45	27	4	16	3	26	48	35	11	36	16	24	33	41	7	46	8
34	46	23	5	21	36	10	34	14	39	15	2	24	47	34	42	4	43	9	17	26

(21)

当 $n=7$ 时, 由于有 $\lambda(7)=5!=120$ 个 7 级排列同态类. 因任取其 2(可以相同, 也可以不同)均可作为 7 阶完美幻方的行、列序. 各可产生 9 个互不同构的基本的 7 阶完美幻方. 因此用我们的方法——列行和法, 可给出 $120^2\times9=129\ 600$ 个基本的 7 阶完美幻方同构类.

对称的 7 阶完美幻方　用对称排列作分段方行、列序所构造的分段方是中心对称的. 由之产生的完美幻方也具有对称性. 当 $n=7$ 时, 有 $\mu(7)=8$ 个对称的 7 级排列同态类,
它们的代表是:

①(1,2,3,4,5,6,7),	②(1,2,6,7,3,4,5),
③(1,2,5,4,3,6,7),	④(1,2,6,7,5,4,3),
⑤(1,2,3,5,6,7,4),	⑥(1,2,4,6,7,5,3),
⑦(1,2,5,3,6,7,4),	⑧(1,2,4,6,7,3,5).

(22)

因此, 由之可作出 $8^2\times9=576$ 个对称的基本的 7 阶完美幻方同构类. 前面所得 7 阶完美幻方都是对称的完美幻方, 以 25 为对称中心.

在 7 阶完美幻方中, 也有许多其元素和为 $\Sigma_7=175$ 的 7 阶幻图. 例如:

1	26	46	31	14	37	20
9	41	15	**5**	25	45	35
24	49	30	**13**	36	19	4
40	18	**3**	**28**	**44**	34	8
48	29	12	**39**	*17*	7	23
21	2	27	**43**	*33*	*11*	*38*
32	10	42	16	6	*22*	*47*

(23)

中黑体数字和斜体数字组成的图形就都是 7 阶幻图. 常见的 7 阶幻图有如下一些:

A　C　E

B　D　F

(24)

值得注意的是，这些 7 阶幻图都是具有方向性的. 如 ***B*** 图为左右型，也可以为上下型. 而且在一个完美幻方中这些类型不一定同时出现. 同时，图形也不一定具有可移性. 这些都是与 5 阶幻图不同的. 但这些图形在同构变换时又可得到 6 种不同的幻图. 如 ***A*** 图有变换:

A	$\pi_4 A \pi_4$	$\pi_2 A \pi_2$
$A^{\wedge}$	$(\pi_4 A \pi_4)^{\wedge}$	$(\pi_2 A \pi_2)^{\wedge}$

(25)

因此，总共可得 6×6＝36 个各种形式的 7 阶幻图.

三、11 阶完美幻方

元素集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,121\}$，幻和 $\Sigma_{11}=671$, $\varphi(11)=10$, $\lambda(11)=9!$, 有 $\mu(11)=4!\cdot 2^4=384$ 个对称的 11 级排列.

如前可构造 11 阶完美幻方. 例如，由 $\pi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$，有分段方:

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

(26)

执行行 Z 变换得

$\boldsymbol{B}_1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	12
25	26	27	28	29	30	31	32	33	23	24
37	38	39	40	41	42	43	44	34	35	36
49	50	51	52	53	54	55	45	46	47	48
61	62	63	64	65	66	56	57	58	59	60
73	74	75	76	77	67	68	69	70	71	72
85	86	87	88	78	79	80	81	82	83	84
97	98	99	89	90	91	92	93	94	95	96
109	110	100	101	102	103	104	105	106	107	108
121	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

(27)

以及 $\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \cdots, \boldsymbol{B}_{10}$ 等 10 个列和方(各方以第一线为代表):

$\boldsymbol{B}_1$: 1　13　25　37　49　61　73　85　97　109　121; $\sum_{11}=671$

B_2:	1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120;	
B_3:	1	15	29	43	46	60	74	88	91	105	119;	
B_4:	1	16	31	35	50	65	69	84	99	103	118;	
B_5:	1	17	33	38	54	59	75	80	96	101	117;	
B_6:	1	18	24	41	47	64	70	87	93	110	116;	
B_7:	1	19	26	44	51	58	76	83	90	108	115;	
B_8:	1	20	28	36	55	63	71	79	98	106	114;	
B_9:	1	21	30	39	48	57	77	86	95	104	113;	
B_{10}:	1	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112;	
A_1:	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111;	$\sum=616$
A_0:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11.	$\sum=66$

(28)

如 5、7 阶一样，通过建立循环排列表并填入列和方，可得到完美幻方.

	π_1	π_2	π_6	π_8	π_4
π_1					
π_2	1		2	3	4
π_6		5		6	7
π_8	8		9		10
π_4	11	12		13	
π_7	14	15	16		
π_3	17	18	19		
π_5	20	21		22	
π_9	23		24		25
π_{10}		26		27	28

(29)

这里排列π_1的循环排列如下:

$$\begin{array}{ll}\pi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11), & \pi_{10}=(1,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2),\\ \pi_2=(1,3,5,7,9,11,2,4,6,8,10), & \pi_9=(1,10,8,6,4,2,11,9,7,5,3),\\ \pi_4=(1,5,9,2,6,10,3,7,11,4,8), & \pi_7=(1,8,4,11,7,3,10,6,2,9,5),\\ \pi_8=(1,9,6,3,11,8,5,2,10,7,4), & \pi_3=(1,4,7,10,2,5,8,11,3,6,9),\\ \pi_5=(1,6,11,5,10,4,9,3,8,2,7), & \pi_6=(1,7,2,8,3,9,4,10,5,11,6).\end{array} \tag{30}$$

下面是由B_1得到的. 容易看出填入一个列和方可得28个不同的11阶完美幻方. 但不同的列和方填入所得完美幻方有些可以是同构的. 如将所有的列和方分别填入，则每一个 11 阶完美幻方将出现 4 次. 因此，每个分段方总共可得

$$28\times10\div4 = 70 \tag{31}$$

个基本的 11 阶完美幻方. 因为 11 阶循环排列表的篇幅太大, 不可能把 11 阶的循环排列表全面给出.下面采用 Z 变换串和行的重排法给出以列和方 $\boldsymbol{B}_1$ 为列线组的所有 11 阶完美幻方:

1	26	51	76	90	115	19	44	58	83	108	(1)①
13	38	63	88	102	6	31	45	70	95	120	
25	50	75	89	114	18	43	57	82	107	11	列 $\boldsymbol{B}_1$
37	62	87	101	5	30	55	69	94	119	12	行 $\boldsymbol{B}_7$
49	74	99	113	17	42	56	81	106	10	24	
61	86	100	4	29	54	68	93	118	22	36	Ⅰ $\boldsymbol{B}_5$
73	98	112	16	41	66	80	105	9	23	48	Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$
85	110	3	28	53	67	92	117	21	35	60	
97	111	15	40	65	79	104	8	33	47	72	
109	2	27	52	77	91	116	20	34	59	84	
121	14	39	64	78	103	7	32	46	71	96	

1	26	51	76	90	115	19	44	58	83	108	(1)②
49	74	99	113	17	42	56	81	106	10	24	
97	111	15	40	65	79	104	8	33	47	72	
13	38	63	88	102	6	31	45	70	95	120	列 $\boldsymbol{B}_1$
61	86	100	4	29	54	68	93	118	22	36	行 $\boldsymbol{B}_7$
109	2	27	52	77	91	116	20	34	59	84	
25	50	75	89	114	18	43	57	82	107	11	Ⅰ $\boldsymbol{B}_3$
73	98	112	16	41	66	80	105	9	23	48	Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$
121	14	39	64	78	103	7	32	46	71	96	
37	62	87	101	5	30	55	69	94	119	12	
85	110	3	28	53	67	92	117	21	35	60	

1	26	51	76	90	115	19	44	58	83	108	(1)③
61	86	100	4	29	54	68	93	118	22	36	
121	14	39	64	78	103	7	32	46	71	96	
49	74	99	113	17	42	56	81	106	10	24	
109	2	27	52	77	91	116	20	34	59	84	行 $\boldsymbol{B}_7$
37	62	87	101	5	30	55	69	94	119	12	
97	111	15	40	65	79	104	8	33	47	72	Ⅰ $\boldsymbol{B}_9$
25	50	75	89	114	18	43	57	82	107	11	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
85	110	3	28	53	67	92	117	21	35	60	
13	38	63	88	102	6	31	45	70	95	120	
73	98	112	16	41	66	80	105	9	23	48	

1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96	(2)①
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108	
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120	
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11	
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12	行 $\boldsymbol{B}_5$
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24	
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36	Ⅰ $\boldsymbol{B}_7$
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48	Ⅱ $\boldsymbol{B}_4$
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60	
109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72	
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	84	

1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96	(2)②
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120	
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12	
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36	
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60	行 $\boldsymbol{B}_5$
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	84	
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108	Ⅰ $\boldsymbol{B}_{10}$
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11	Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24	
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48	
109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72	

1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96	(2)③
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24	
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	84	
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12	
109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72	行 B_5
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11	
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60	Ⅰ B_8
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120	Ⅱ B_6
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48	
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108	
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36	

1	74	15	88	29	91	43	105	46	119	60	(3)①
13	86	27	89	41	103	55	117	58	10	72	
25	98	39	101	53	115	56	8	70	22	84	列 B_1
37	110	51	113	65	6	68	20	82	23	96	行 B_3
49	111	63	4	77	18	81	32	94	35	108	
61	2	75	16	78	30	93	44	106	47	120	Ⅰ B_9
73	14	87	28	90	42	104	45	118	59	11	Ⅱ B_{10}
85	26	99	40	102	54	116	57	9	71	12	
97	38	100	52	114	66	7	69	21	83	24	
109	50	112	64	5	67	19	81	33	95	36	
121	62	3	76	17	79	31	93	34	107	48	

1	74	15	88	29	91	43	105	46	119	60	(3)②
25	98	39	101	53	115	56	8	70	22	84	
49	111	63	4	77	18	81	32	94	35	108	
73	14	87	28	90	42	104	45	118	59	11	行 B_3
97	38	100	52	114	66	7	69	21	83	24	
121	62	3	76	17	79	31	93	34	107	48	Ⅰ B_8
13	86	27	89	41	103	55	117	58	10	72	Ⅱ B_4
37	110	51	113	65	6	68	20	82	23	96	
61	2	75	16	78	30	93	44	106	47	120	
85	26	99	40	102	54	116	57	9	71	12	
109	50	112	64	5	67	19	81	33	95	36	

1	74	15	88	29	91	43	105	46	119	60	(3)③
97	38	100	52	114	66	7	69	21	83	24	
61	2	75	16	78	30	93	44	106	47	120	
25	98	39	101	53	115	56	8	70	22	84	
121	62	3	76	17	79	31	93	34	107	48	行 B_3
85	26	99	40	102	54	116	57	9	71	12	
49	111	63	4	77	18	81	32	94	35	108	Ⅰ B_5
13	86	27	89	41	103	55	117	58	10	72	Ⅱ B_6
109	50	112	64	5	67	19	81	33	95	36	
73	14	87	28	90	42	104	45	118	59	11	
37	110	51	113	65	6	68	20	82	23	96	

1	103	84	65	35	16	118	99	69	50	31	(4)①
13	115	96	77	47	28	9	100	81	62	43	
25	6	108	78	59	40	21	112	93	74	55	
37	18	120	90	71	52	33	3	105	86	56	列 B_1
49	30	11	102	83	64	34	15	117	98	68	行 B_4
61	42	12	114	95	76	46	27	8	110	80	
73	54	24	5	107	88	58	39	20	111	92	Ⅰ B_7
85	66	36	17	119	89	70	51	32	2	104	Ⅱ B_3
97	67	48	29	10	101	82	63	44	14	116	
109	79	60	41	22	113	94	75	45	26	7	
121	91	72	53	23	4	106	87	57	38	19	

1	103	84	65	35	16	118	99	69	50	31	(4)②
49	30	11	102	83	64	34	15	117	98	68	
97	67	48	29	10	101	82	63	44	14	116	
13	115	96	77	47	28	9	100	81	62	43	
61	42	12	114	95	76	46	27	8	110	80	行 B_4
109	79	60	41	22	113	94	75	45	26	7	
25	6	108	78	59	40	21	112	93	74	55	Ⅰ B_9
73	54	24	5	107	88	58	39	20	111	92	Ⅱ B_2
121	91	72	53	23	4	106	87	57	38	19	
37	18	120	90	71	52	33	3	105	86	56	
85	66	36	17	119	89	70	51	32	2	104	

1	103	84	65	35	16	118	99	69	50	31	(4)③
61	42	12	114	95	76	46	27	8	110	80	
121	91	72	53	23	4	106	87	57	38	19	
49	30	11	102	83	64	34	15	117	98	68	行 B_4
109	79	60	41	22	113	94	75	45	26	7	
37	18	120	90	71	52	33	3	105	86	56	Ⅰ B_{10}
97	67	48	29	10	101	82	63	44	14	116	Ⅱ B_5
25	6	108	78	59	40	21	112	93	74	55	
85	66	36	17	119	89	70	51	32	2	104	
13	115	96	77	47	28	9	100	81	62	43	
73	54	24	5	107	88	58	39	20	111	92	

1	98	63	28	114	79	55	20	106	71	36	(5)①
13	110	75	40	5	91	56	32	118	83	48	
25	111	87	52	17	103	68	44	9	95	60	
37	2	99	64	29	115	81	45	21	107	72	列 B_1
49	14	100	76	41	6	93	57	33	119	84	行 B_8
61	26	112	88	53	18	104	69	34	10	96	
73	38	3	89	65	30	116	81	46	22	108	Ⅰ B_6
85	50	15	101	77	42	7	93	58	23	120	Ⅱ B_9
97	62	27	113	78	54	19	105	70	35	11	
109	74	39	4	90	66	31	117	82	47	12	
121	86	51	16	102	67	43	8	94	59	24	

1	98	63	28	114	79	55	20	106	71	36	(5)②
49	14	100	76	41	6	93	57	33	119	84	
97	62	27	113	78	54	19	105	70	35	11	
13	110	75	40	5	91	56	32	118	83	48	
61	26	112	88	53	18	104	69	34	10	96	行 B_8
109	74	39	4	90	66	31	117	82	47	12	
25	111	87	52	17	103	68	44	9	95	60	Ⅰ B_2
73	38	3	89	65	30	116	81	46	22	108	Ⅱ B_4
121	86	51	16	102	67	43	8	94	59	24	
37	2	99	64	29	115	81	45	21	107	72	
85	50	15	101	77	42	7	93	58	23	120	

1	98	63	28	114	79	55	20	106	71	36.	(5)③
61	26	112	88	53	18	104	69	34	10	96	
121	86	51	16	102	67	43	8	94	59	24	
49	14	100	76	41	6	93	57	33	119	84	
109	74	39	4	90	66	31	117	82	47	12	行 B_8
37	2	99	64	29	115	81	45	21	107	72	
97	62	27	113	78	54	19	105	70	35	11	Ⅰ B_7
25	111	87	52	17	103	68	44	9	95	60	Ⅱ B_5
85	50	15	101	77	42	7	93	58	23	120	
13	110	75	40	5	91	56	32	118	83	48	
73	38	3	89	65	30	116	81	46	22	108	

1	27	53	68	94	120	14	40	66	81	107	(6)①
13	39	65	80	106	11	26	52	67	93	119	
25	51	77	92	118	12	38	64	79	105	10	
37	63	78	104	9	24	50	76	91	117	22	列 $\boldsymbol{B}_1$
49	75	90	116	21	36	62	88	103	8	23	行 $\boldsymbol{B}_2$
61	87	102	7	33	48	74	89	115	20	35	
73	99	114	19	34	60	86	101	6	32	47	Ⅰ $\boldsymbol{B}_9$
85	100	5	31	46	72	98	113	18	44	59	Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$
97	112	17	43	58	84	110	4	30	45	71	
109	3	29	55	70	96	111	16	42	57	83	
121	15	41	56	82	108	2	28	54	69	95	

1	27	53	68	94	120	14	40	66	81	107	(6)②
97	112	17	43	58	84	110	4	30	45	71	
61	87	102	7	33	48	74	89	115	20	35	
25	51	77	92	118	12	38	64	79	105	10	行 $\boldsymbol{B}_2$
121	15	41	56	82	108	2	28	54	69	95	
85	100	5	31	46	72	98	113	18	44	59	Ⅰ $\boldsymbol{B}_{10}$
49	75	90	116	21	36	62	88	103	8	23	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
13	39	65	80	106	11	26	52	67	93	119	
109	3	29	55	70	96	111	16	42	57	83	
73	99	114	19	34	60	86	101	6	32	47	
37	63	78	104	9	24	50	76	91	117	22	

1	27	53	68	94	120	14	40	66	81	107	(6)③
61	87	102	7	33	48	74	89	115	20	35	
121	15	41	56	82	108	2	28	54	69	95	
49	75	90	116	21	36	62	88	103	8	23	行 $\boldsymbol{B}_2$
109	3	29	55	70	96	111	16	42	57	83	
37	63	78	104	9	24	50	76	91	117	22	Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$
97	112	17	43	58	84	110	4	30	45	71	Ⅱ $\boldsymbol{B}_4$
25	51	77	92	118	12	38	64	79	105	10	
85	100	5	31	46	72	98	113	18	44	59	
13	39	65	80	106	11	26	52	67	93	119	
73	99	114	19	34	60	86	101	6	32	47	

1	62	112	52	102	42	92	32	82	22	72	(7)①
13	74	3	64	114	54	104	44	94	23	84	
25	86	15	76	5	66	116	45	106	35	96	
37	98	27	88	17	67	7	57	118	47	108	列 $\boldsymbol{B}_1$
49	110	39	89	29	79	19	69	9	59	120	行 $\boldsymbol{B}_{10}$
61	111	51	101	41	91	31	81	21	71	11	
73	2	63	113	53	103	43	93	33	83	12	Ⅰ $\boldsymbol{B}_3$
85	14	75	4	65	115	55	105	34	95	24	Ⅱ $\boldsymbol{B}_4$
97	26	87	16	77	6	56	117	46	107	36	
109	38	99	28	78	18	68	8	58	119	48	
121	50	100	40	90	30	80	20	70	10	60	

1	62	112	52	102	42	92	32	82	22	72	(7)②
25	86	15	76	5	66	116	45	106	35	96	
49	110	39	89	29	79	19	69	9	59	120	
73	2	63	113	53	103	43	93	33	83	12	行 $\boldsymbol{B}_{10}$
97	26	87	16	77	6	56	117	46	107	36	
121	50	100	40	90	30	80	20	70	10	60	Ⅰ $\boldsymbol{B}_9$
13	74	3	64	114	54	104	44	94	23	84	Ⅱ $\boldsymbol{B}_5$
37	98	27	88	17	67	7	57	118	47	108	
61	111	51	101	41	91	31	81	21	71	11	
85	14	75	4	65	115	55	105	34	95	24	
109	38	99	28	78	18	68	8	58	119	48	

1	62	112	52	102	42	92	32	82	22	72	(7)③
49	110	39	89	29	79	19	69	9	59	120	
97	26	87	16	77	6	56	117	46	107	36	
13	74	3	64	114	54	104	44	94	23	84	
61	111	51	101	41	91	31	81	21	71	11	行 $\boldsymbol{B}_{10}$
109	38	99	28	78	18	68	8	58	119	48	
25	86	15	76	5	66	116	45	106	35	96	Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$
73	2	63	113	53	103	43	93	33	83	12	Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$
121	50	100	40	90	30	80	20	70	10	60	
37	98	27	88	17	67	7	57	118	47	108	
85	14	75	4	65	115	55	105	34	95	24	

1	62	112	52	102	42	92	32	82	22	72	(7)④
97	26	87	16	77	6	56	117	46	107	36	
61	111	51	101	41	91	31	81	21	71	11	
25	86	15	76	5	66	116	45	106	35	96	行 $\boldsymbol{B}_{10}$
121	50	100	40	90	30	80	20	70	10	60	
85	14	75	4	65	115	55	105	34	95	24	
49	110	39	89	29	79	19	69	9	59	120	Ⅰ $\boldsymbol{B}_7$
13	74	3	64	114	54	104	44	94	23	84	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
109	38	99	28	78	18	68	8	58	119	48	
73	2	63	113	53	103	43	93	33	83	12	
37	98	27	88	17	67	7	57	118	47	108	

1	86	39	113	77	30	104	57	21	95	48	(8)①
13	98	51	4	78	42	116	69	33	107	60	
25	110	63	16	90	54	7	81	34	119	72	列 $\boldsymbol{B}_1$
37	111	75	28	102	66	19	93	46	10	84	行 $\boldsymbol{B}_9$
49	2	87	40	114	67	31	105	58	22	96	
61	14	99	52	5	79	43	117	70	23	108	Ⅰ $\boldsymbol{B}_8$
73	26	100	64	17	91	55	8	82	35	120	Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$
85	38	112	76	29	103	56	20	94	47	11	
97	50	3	88	41	115	68	32	106	59	12	
109	62	15	89	53	6	81	44	118	71	24	
121	74	27	101	65	18	93	45	9	83	36	

1	86	39	113	77	30	104	57	21	95	48	(8)②
25	110	63	16	90	54	7	81	34	119	72	
49	2	87	40	114	67	31	105	58	22	96	
73	26	100	64	17	91	55	8	82	35	120	行 $\boldsymbol{B}_9$
97	50	3	88	41	115	68	32	106	59	12	
121	74	27	101	65	18	93	45	9	83	36	Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$
13	98	51	4	78	42	116	69	33	107	60	Ⅱ $\boldsymbol{B}_{10}$
37	111	75	28	102	66	19	93	46	10	84	
61	14	99	52	5	79	43	117	70	23	108	
85	38	112	76	29	103	56	20	94	47	11	
109	62	15	89	53	6	81	44	118	71	24	

1	86	39	113	77	30	104	57	21	95	48	(8)③
61	14	99	52	5	79	43	117	70	23	108	
121	74	27	101	65	18	93	45	9	83	36	
49	2	87	40	114	67	31	105	58	22	96	行 $\boldsymbol{B}_9$
109	62	15	89	53	6	81	44	118	71	24	
37	111	75	28	102	66	19	93	46	10	84	Ⅰ $\boldsymbol{B}_2$
97	50	3	88	41	115	68	32	106	59	12	Ⅱ $\boldsymbol{B}_7$
25	110	63	16	90	54	7	81	34	119	72	
85	38	112	76	29	103	56	20	94	47	11	
13	98	51	4	78	42	116	69	33	107	60	
73	26	100	64	17	91	55	8	82	35	120	

1	116	110	93	87	70	64	47	41	24	18	(9)①
109	93	86	69	63	46	40	23	17	11	115	
85	68	62	45	39	33	16	10	114	108	91	列 B_1
61	55	38	32	15	9	113	107	90	84	67	行 B_6
37	31	14	8	112	106	89	83	77	60	54	
13	7	111	105	99	82	76	59	53	36	30	Ⅰ B_{10}
121	104	98	81	75	58	52	35	29	12	6	Ⅱ B_7
97	81	74	57	51	34	28	22	5	120	103	
73	56	50	44	27	21	4	119	102	96	79	
49	43	26	20	3	118	101	95	78	72	66	
25	19	2	117	100	94	88	71	65	48	42	

1	116	110	93	87	70	64	47	41	24	18	(9)②
85	68	62	45	39	33	16	10	114	108	91	
37	31	14	8	112	106	89	83	77	60	54	
121	104	98	81	75	58	52	35	29	12	6	行 B_6
73	56	50	44	27	21	4	119	102	96	79	
25	19	2	117	100	94	88	71	65	48	42	
109	93	86	69	63	46	40	23	17	11	115	Ⅰ B_2
61	55	38	32	15	9	113	107	90	84	67	Ⅱ B_3
13	7	111	105	99	82	76	59	53	36	30	
97	81	74	57	51	34	28	22	5	120	103	
49	43	26	20	3	118	101	95	78	72	66	

1	116	110	93	87	70	64	47	41	24	18	(9)③
37	31	14	8	112	106	89	83	77	60	54	
73	56	50	44	27	21	4	119	102	96	79	
109	93	86	69	63	46	40	23	17	11	115	行 B_6
13	7	111	105	99	82	76	59	53	36	30	
49	43	26	20	3	118	101	95	78	72	66	
85	68	62	45	39	33	16	10	114	108	91	Ⅰ B_4
121	104	98	81	75	58	52	35	29	12	6	Ⅱ B_5
25	19	2	117	100	94	88	71	65	48	42	
61	55	38	32	15	9	113	107	90	84	67	
97	81	74	57	51	34	28	22	5	120	103	

行	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
A_0	B_2 A_1	B_3 B_{10}	B_4 B_9	B_5 B_8	B_6 B_7
B_2	B_7 A_0	B_9 B_3	B_{10} B_8	B_4 B_6	A_1 B_5
B_7	B_5 B_2	B_8 B_9	B_3 B_6	B_{10} A_1	A_0 B_4
B_5	B_4 B_7	B_6 B_8	B_9 A_1	B_3 A_0	B_2 B_{10}
B_4	B_{10} B_5	A_1 B_6	B_8 A_0	B_9 B_2	B_7 B_3
B_{10}	B_3 B_4	A_0 A_1	B_6 B_2	B_8 B_7	B_5 B_9
B_3	B_9 B_{10}	B_2 A_0	A_1 B_7	B_6 B_5	B_4 B_8
B_9	B_8 B_3	B_7 B_2	A_0 B_5	A_1 B_4	B_{10} B_6
B_8	B_6 B_9	B_5 B_7	B_2 B_4	A_0 B_{10}	B_3 A_1
B_6	A_1 B_8	B_4 B_5	B_7 B_{10}	B_2 B_3	B_9 A_0
A_1	A_0 B_6	B_{10} B_4	B_5 B_3	B_7 B_9	B_8 B_2

(32)

由此例可见, Z 变换串方法对高阶完美幻方的建立很方便. 同时也容易给出各方的所用列和方——幻和组. 如上表所示, 这些方阵也都是对称的, 因排列π_1 是对称的, 从而所得完美幻方都是对称的. 以 $\boldsymbol{B}_2$ 为行线组可得:

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(1)①
85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	行 $\boldsymbol{B}_2$
37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	列 $\boldsymbol{B}_1$
121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	108	
73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	Ⅰ $\boldsymbol{B}_8$
25	38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	Ⅱ $\boldsymbol{B}_{10}$
109	111	3	16	29	42	55	57	70	83	96	
61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	
13	26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	
97	110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	
49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(1)②
37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	行 $\boldsymbol{B}_2$
73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	列 $\boldsymbol{B}_1$
109	111	3	16	29	42	55	57	70	83	96	
13	26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	Ⅰ $\boldsymbol{B}_4$
49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$
85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	
121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	108	
25	38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	
61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	
97	110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(1)③
73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	行 $\boldsymbol{B}_2$
13	26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	列 $\boldsymbol{B}_1$
85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	
25	38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	Ⅰ $\boldsymbol{B}_9$
97	110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$
37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	
109	111	3	16	29	42	55	57	70	83	96	
49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	
121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	108	
61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(2)①
29	42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	行 $\boldsymbol{B}_2$
46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	44	列 $\boldsymbol{B}_3$
74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	61	
91	104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	Ⅰ $\boldsymbol{B}_{11}$
119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	106	Ⅱ $\boldsymbol{B}_4$
15	28	41	54	56	69	82	95	108	121	2	
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30	
60	73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	
88	90	103	116	8	21	23	36	49	62	75	
105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	92	

(2)② 行 $\boldsymbol{B}_2$ 列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_5$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_7$

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	44
91	104	117	9	22	24	37	50	63	76	78
15	28	41	54	56	69	82	95	108	121	2
60	73	86	99	101	114	6	19	32	34	47
105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	92
29	42	55	57	70	83	96	109	111	3	16
74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	61
119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	106
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30
88	90	103	116	8	21	23	36	49	62	75

(2)③ 行 $\boldsymbol{B}_2$ 列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_1$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_6$

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
60	73	86	99	101	114	6	19	32	34	47
119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	106
46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	44
105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	92
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30
91	104	117	9	22	24	37	50	63	76	78
29	42	55	57	70	83	96	109	111	3	16
88	90	103	116	8	21	23	36	49	62	75
15	28	41	54	56	69	82	95	108	121	2
74	87	89	102	115	7	20	33	35	48	61

(3)① 行 $\boldsymbol{B}_2$ 列 $\boldsymbol{B}_4$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_7$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_6$

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	37
69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	56
99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	86
118	10	12	25	38	51	64	77	79	92	105
16	29	42	55	57	70	83	96	109	111	3
35	48	61	74	87	89	102	115	7	20	33
65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	52
84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	71
103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	90

(3)② 行 $\boldsymbol{B}_2$ 列 $\boldsymbol{B}_4$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_8$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_1$

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	37
99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	86
16	29	42	55	57	70	83	96	109	111	3
65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	52
103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	90
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	56
118	10	12	25	38	51	64	77	79	92	105
35	48	61	74	87	89	102	115	7	20	33
84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	71

(3)③ 行 $\boldsymbol{B}_2$ 列 $\boldsymbol{B}_4$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_5$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_9$

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	86
65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	52
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
118	10	12	25	38	51	64	77	79	92	105
84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	71
50	63	76	78	91	104	117	9	22	24	37
16	29	42	55	57	70	83	96	109	111	3
103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	90
69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	56
35	48	61	74	87	89	102	115	7	20	33

(4)① 行 B_2 列 B_5 Ⅰ B_1 Ⅱ B_7

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	83
59	72	85	98	100	113	5	18	31	44	46
33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	20
117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	104
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	41
17	30	43	45	58	71	84	97	110	112	4
101	114	6	19	32	34	47	60	73	86	99
75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	62
38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	25

(4)② 行 B_2 列 B_5 Ⅰ B_8 Ⅱ B_4

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
101	114	6	19	32	34	47	60	73	86	99
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
59	72	85	98	100	113	5	18	31	44	46
38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	25
17	30	43	45	58	71	84	97	110	112	4
117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	104
96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	83
75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	62
54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	41
33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	20

(4)③ 行 B_2 列 B_5 Ⅰ B_{10} Ⅱ B_3

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
59	72	85	98	100	113	5	18	31	44	46
117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	104
54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	41
101	114	6	19	32	34	47	60	73	86	99
38	51	64	77	79	92	105	118	10	12	25
96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	83
33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	20
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
17	30	43	45	58	71	84	97	110	112	4
75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	62

(5)① 行 B_2 列 B_6 Ⅰ B_1 Ⅱ B_{10}

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	22
47	60	73	86	99	101	114	6	19	32	34
70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	57
93	106	119	11	13	26	39	52	65	67	80
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103
18	31	44	46	59	72	85	98	100	113	5
41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	28
64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	51
87	89	102	115	7	20	33	35	48	61	74
110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	97

(5)② 行 B_2 列 B_6 Ⅰ B_5 Ⅱ B_8

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120
41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	28
70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	57
110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	97
18	31	44	46	59	72	85	98	100	113	5
47	60	73	86	99	101	114	6	19	32	34
87	89	102	115	7	20	33	35	48	61	74
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103
24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	22
64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	51
93	106	119	11	13	26	39	52	65	67	80

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(5)③
70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	57	行 B_2
18	31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	列 B_6
87	89	102	115	7	20	33	35	48	61	74	
24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	Ⅰ B_7
93	106	119	11	13	26	39	52	65	67	80	Ⅱ B_9
41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	
110	112	4	17	30	43	45	58	71	84	97	
47	60	73	86	99	101	114	6	19	32	34	
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103	
64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	51	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(6)①
108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	行 B_2
83	96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	列 B_7
58	71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	
44	46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	Ⅰ B_1
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	Ⅱ B_9
115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	
90	103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	
76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	63	
51	64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	
26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(6)②
83	96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	行 B_2
44	46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	列 B_7
115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	
76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	63	Ⅰ B_5
26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	Ⅱ B_6
108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	
58	71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	
90	103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	
51	64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(6)③
44	46	59	72	85	98	100	113	5	18	31	行 B_2
76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	63	列 B_7
108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	Ⅰ B_3
51	64	77	79	92	105	118	10	12	25	38	Ⅱ B_4
83	96	109	111	3	16	29	42	55	57	70	
115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	
26	39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	
58	71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	
90	103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(7)①
28	41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	行 B_2
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	列 B_8
71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	
98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	85	Ⅰ B_6
114	6	19	32	34	47	60	73	86	99	101	Ⅱ B_3
20	33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	
36	49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	
63	76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	
79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	
106	119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(7)②
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	行 B_2
98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	85	列 B_8
20	33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	
63	76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	Ⅰ B_9
106	119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	Ⅱ B_{10}
28	41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	
71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	
114	6	19	32	34	47	60	73	86	99	101	
36	49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	
79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(7)③
63	76	78	91	104	117	9	22	24	37	50	行 B_2
114	6	19	32	34	47	60	73	86	99	101	列 B_8
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	
106	119	11	13	26	39	52	65	67	80	93	Ⅰ B_7
36	49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	Ⅱ B_4
98	100	113	5	18	31	44	46	59	72	85	
28	41	54	56	69	82	95	108	121	2	15	
79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	
20	33	35	48	61	74	87	89	102	115	7	
71	84	97	110	112	4	17	30	43	45	58	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(8)①
86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	行 B_2
39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	列 B_9
113	5	18	31	44	46	59	72	85	98	100	
77	79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	Ⅰ B_4
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	Ⅱ B_1
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	
57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	
21	23	36	49	62	75	88	90	103	116	8	
95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	
48	61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(8)②
95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	行 B_2
57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	列 B_9
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	
113	5	18	31	44	46	59	72	85	98	100	Ⅰ B_7
86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	Ⅱ B_{10}
48	61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	
21	23	36	49	62	75	88	90	103	116	8	
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	
77	79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	
39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(8)③
57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	行 B_2
113	5	18	31	44	46	59	72	85	98	100	列 B_9
48	61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	Ⅰ B_6
39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	Ⅱ B_8
95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	
86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	
21	23	36	49	62	75	88	90	103	116	8	
77	79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(8)④
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	行 B_2
86	99	101	114	6	19	32	34	47	60	73	列 B_9
57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	55	
39	52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	Ⅰ B_5
21	23	36	49	62	75	88	90	103	116	8	Ⅱ B_3
113	5	18	31	44	46	59	72	85	98	100	
95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	82	
77	79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	
48	61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(9)①
82	95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	行 B_2
42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	列 B_{10}
112	4	17	30	43	45	58	71	84	97	110	
72	85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	Ⅰ B_9
32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	19	Ⅱ B_4
102	115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	
62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	
22	24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	
52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(9)②
42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	行 B_2
72	85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	列 B_{10}
102	115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	
22	24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	Ⅰ B_8
52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	Ⅱ B_3
82	95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	
112	4	17	30	43	45	58	71	84	97	110	
32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	19	
62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	

1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120	(9)③
72	85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	行 B_2
22	24	37	50	63	76	78	91	104	117	9	列 B_{10}
82	95	108	121	2	15	28	41	54	56	69	
32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	19	Ⅰ B_1
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	Ⅱ B_5
42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	
102	115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	
52	65	67	80	93	106	119	11	13	26	39	
112	4	17	30	43	45	58	71	84	97	110	
62	75	88	90	103	116	8	21	23	36	49	

Z 变换串方法

1. 确定作为列(行)线组的列和方，如 B_1；
2. 用列(行)Z 变换方法，确定作为行(列)线组的列和方，如 B_2 等；
3. 检查在第Ⅰ、Ⅱ对角线组中，是否有线形的 A_0 或 A_1 出现？

若无，则方阵已是完美幻方．确定作为第Ⅰ、Ⅱ对角线组的列和方；

若有，则通过行的轮回变换，使之第Ⅰ、Ⅱ对角线组都不是非幻和组 A_0 或 A_1，并确定为第Ⅰ、Ⅱ对角线组的列和方.

对 B_1, B_2 有如下 10 个同构的完美幻方. 因此, 这里只得到 46 个基本的 11 阶完美幻方.

B_2					B_1				
编号	行	列	I	II	编号	列	行	I	II
(1)③	B_2	B_1	B_9	B_3	(6)①	B_1	B_2	B_9	B_3
(1)②	B_2	B_1	B_4	B_6	(6)③	B_1	B_2	B_6	B_4
(1)①	B_2	B_1	B_8	B_{10}	(6)②	B_1	B_2	B_{10}	B_8
(2)③	B_2	B_3	B_1	B_6	(9)②	B_1	B_6	B_2	B_3
(3)②	B_2	B_4	B_8	B_1	(5)②	B_1	B_8	B_2	B_4
(4)①	B_2	B_5	B_1	B_7	(1)①	B_1	B_7	B_5	B_2
(5)①	B_2	B_6	B_1	B_{10}	(7)③	B_1	B_{10}	B_6	B_2
(6)①	B_2	B_7	B_1	B_9	(8)③	B_1	B_9	B_2	B_7
(8)①	B_2	B_9	B_4	B_1	(4)②	B_1	B_4	B_9	B_2
(9)③	B_2	B_{10}	B_1	B_5	(2)①	B_1	B_5	B_{10}	B_2

(33)

11 阶完美幻方的对称性 完美幻方的对称性完全由构成分段方的行、列序所决定. 因为, $\mu(11)=384$, 所以有 384 个对称的 11 级排列. 这 384 个 11 级对称排列可如下给出:

1. 在数对 3,9、4,8、5,7 中, 各取一数组成 3 元排列:

345	354	435	453	534	543
347	374	437	473	734	743
385	358	835	853	538	583
387	378	837	873	738	783
945	954	495	459	594	549
947	974	497	479	794	749
985	958	895	859	598	589
987	978	897	879	798	789

(34)

2. 在上表中任取一给定排列, 保持顺序不变, 有 4 个位置可安置中心数 6;

3. 把数 1, 2 安置于排列的头两位, 再利用对称性, 可得如下 8 个对称的 11 级排列.

例如, 由 345 有:

$$\begin{aligned}
&1.\ (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11),\\
&2.\ (1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,6),\\
&3.\ (1,2,3,4,6,8,9,10,11,7,5),\\
&4.\ (1,2,3,4,8,9,10,11,7,6,5),\\
&5.\ (1,2,3,6,9,10,11,7,8,4,5),\\
&6.\ (1,2,3,9,10,11,7,8,6,4,5),\\
&7.\ (1,2,6,10,11,3,4,5,7,8,9),\\
&8.\ (1,2,10,11,7,8,9,6,3,4,5).
\end{aligned} \tag{35}$$

从而可得

$$48\times 8=384 \tag{36}$$

个 11 级对称排列. 再从中任取两个作为 11 阶分段方的行、列序构造分段方. 进而总共可得

$$384^2\times 70=10\ 321\ 920 \tag{37}$$

个对称的 11 阶完美幻方.

四、13 阶完美幻方

$$13^2 = 169,\quad \mathbf{F} = \{1,2,3,\cdots,169\},\quad \Sigma_{13} = 1105.$$

$$\varphi(13) = 12,\ \lambda(13) = 11! = 39\,916\,800,\ \mu(13) = 5!25 = 3840.$$

下面给一个 13 级排列π及其循环排列:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13) = \pi_{12}\\
\pi_2 &= (1,3,5,7,9,11,13,2,4,6,8,10,12) = \pi_{11}\\
\pi_4 &= (1,5,9,13,4,8,12,3,7,11,2,6,10) = \pi_9\\
\pi_8 &= (1,9,4,12,7,2,10,5,13,8,3,11,6) = \pi_5\\
\pi_3 &= (1,4,7,10,13,3,6,9,12,2,5,8,11) = \pi_{10}\\
\pi_6 &= (1,7,13,6,12,5,11,4,10,3,9,2,8) = \pi_7
\end{aligned} \tag{38}$$

现在以这个π_1为行，列序建立分段方 $\boldsymbol{A}$，并直接给出一些 13 阶完美幻方.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\boldsymbol{A}$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	
118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	

(39)

各列和方的第一线组成为: $\Sigma_{13} = 1105$

$\boldsymbol{B}_1$	1	15	29	43	57	71	85	99	113	127	141	155	169	
$\boldsymbol{B}_2$	1	16	31	46	61	76	91	93	108	123	138	153	168	
$\boldsymbol{B}_3$	1	17	33	49	65	68	84	100	116	119	135	151	167	
$\boldsymbol{B}_4$	1	18	35	52	56	73	90	94	111	128	132	149	166	
$\boldsymbol{B}_5$	1	19	37	42	60	78	83	101	106	124	142	147	165	
$\boldsymbol{B}_6$	1	20	39	45	64	70	89	95	114	120	139	145	164	
$\boldsymbol{B}_7$	1	21	28	48	55	75	82	102	109	129	136	156	163	
$\boldsymbol{B}_8$	1	22	30	51	59	67	88	96	117	125	133	154	162	
$\boldsymbol{B}_9$	1	23	32	41	63	72	81	103	112	121	143	152	161	
$\boldsymbol{B}_{10}$	1	24	34	44	54	77	87	97	107	130	140	150	160	
$\boldsymbol{B}_{11}$	1	25	36	47	58	69	80	104	115	126	137	148	159	
$\boldsymbol{B}_{12}$	1	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134	146	158	
$\boldsymbol{A}_0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	91
$\boldsymbol{A}_1$	1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157	1027

(40)

然后给出由 $\boldsymbol{B}_1$ 所产生的完美幻方在循环排列表中的分布状况. 但是, 若将 13 阶的循环排列表全面按表的形式列出, 也将是一张很大的表, 无法给出. 因此, 我们仍用 Z 变换串的如下程序给出 13 阶完美幻方:

1. 确定列线组, 如 $\boldsymbol{B}_1$;
2. 进行行 Z 变换, 转置确定行线组;

3. 对 B_1 进行行序的重排，确定对角线组 I，II.

从而给出 13 阶完美幻方.

	π_1	π_2	π_7	π_5	π_9	π_3
π_1						
π_2	1		18	25	32	39
π_7		10		26	33	40
π_5	2		19		34	41
π_9	3	11		27		42
π_3	4	12	20		35	
π_{10}	5	13	21	28		
π_4	6	14	22	29		
π_8	7	15	23		36	
π_6	8	16		30		43
π_{11}	9		24		37	44
π_{12}		17		31	38	45

(41)

例如，以列和方 B_1 作列线组有：

1	86	158	74	146	62	134	50	122	38	110	26	98	(1)①
15	100	3	88	160	76	148	64	136	52	124	27	112	
29	114	17	102	5	90	162	78	150	53	138	41	126	行 B_{12}
43	128	31	116	19	104	7	79	164	67	152	55	140	
57	142	45	130	33	105	21	93	9	81	166	69	154	
71	156	59	131	47	119	35	107	23	95	11	38	168	
85	157	73	145	61	133	49	121	37	109	25	97	13	I B_3
99	2	87	159	75	147	63	135	51	123	39	111	14	II B_9
113	16	101	4	89	161	77	149	65	137	40	125	28	
127	32	115	18	103	6	91	163	66	151	54	139	42	
141	44	129	32	117	20	92	8	80	165	68	153	56	
155	58	143	46	118	34	106	22	94	10	82	167	70	
169	72	144	60	132	48	120	36	108	24	96	12	84	

1	86	158	74	146	62	134	50	122	38	110	26	98	(1)②
29	114	17	102	5	90	162	78	150	53	138	41	126	
57	142	45	130	33	105	21	93	9	81	166	69	154	B_{12}
85	157	73	145	61	133	49	121	37	109	25	97	13	
113	16	101	4	89	161	77	149	65	137	40	125	28	
141	44	129	32	117	20	92	8	80	165	68	153	56	
169	72	144	60	132	48	120	36	108	24	96	12	84	I B_6
15	100	3	88	160	76	148	64	136	52	124	27	112	II B_{11}
43	128	31	116	19	104	7	79	164	67	152	55	140	
71	156	59	131	47	119	35	107	23	95	11	38	168	
99	2	87	159	75	147	63	135	51	123	39	111	14	
127	32	115	18	103	6	91	163	66	151	54	139	42	
155	58	143	46	118	34	106	22	94	10	82	167	70	

1	86	158	74	146	62	134	50	122	38	110	26	98	(1)③
57	142	45	130	33	105	21	93	9	81	166	69	154	
113	16	101	4	89	161	77	149	65	137	40	125	28	B_{12}
169	72	144	60	132	48	120	36	108	24	96	12	84	
43	128	31	116	19	104	7	79	164	67	152	55	140	
99	2	87	159	75	147	63	135	51	123	39	111	14	
155	58	143	46	118	34	106	22	94	10	82	167	70	Ⅰ B_5
29	114	17	102	5	90	162	78	150	53	138	41	126	Ⅱ B_8
85	157	73	145	61	133	49	121	37	109	25	97	13	
141	44	129	32	117	20	92	8	80	165	68	153	56	
15	100	3	88	160	76	148	64	136	52	124	27	112	
71	156	59	131	47	119	35	107	23	95	11	38	168	
127	32	115	18	103	6	91	163	66	151	54	139	42	
1	86	158	74	146	62	134	50	122	38	110	26	98	(1)④
113	16	101	4	89	161	77	149	65	137	40	125	28	
43	128	31	116	19	104	7	79	164	67	152	55	140	列 B_1
155	58	143	46	118	34	106	22	94	10	82	167	70	行 B_{12}
85	157	73	145	61	133	49	121	37	109	25	97	13	
15	100	3	88	160	76	148	64	136	52	124	27	112	
127	32	115	18	103	6	91	163	66	151	54	139	42	Ⅰ B_2
57	142	45	130	33	105	21	93	9	81	166	69	154	Ⅱ B_7
169	72	144	60	132	48	120	36	108	24	96	12	84	
99	2	87	159	75	147	63	135	51	123	39	111	14	
29	114	17	102	5	90	162	78	150	53	138	41	126	
141	44	129	32	117	20	92	8	80	165	68	153	56	
71	156	59	131	47	119	35	107	23	95	11	38	168	
1	86	158	74	146	62	134	50	122	38	110	26	98	(1)⑤
43	128	31	116	19	104	7	79	164	67	152	55	140	
85	157	73	145	61	133	49	121	37	109	25	97	13	B_{12}
127	32	115	18	103	6	91	163	66	151	54	139	42	
169	72	144	60	132	48	120	36	108	24	96	12	84	
29	114	17	102	5	90	162	78	150	53	138	41	126	
71	156	59	131	47	119	35	107	23	95	11	38	168	Ⅰ B_4
113	16	101	4	89	161	77	149	65	137	40	125	28	Ⅱ B_{10}
155	58	143	46	118	34	106	22	94	10	82	167	70	
15	100	3	88	160	76	148	64	136	52	124	27	112	
57	142	45	130	33	105	21	93	9	81	166	69	154	
99	2	87	159	75	147	63	135	51	123	39	111	14	
141	44	129	32	117	20	92	8	80	165	68	153	56	
1	16	31	46	61	76	91	93	108	123	138	153	168	(2)①
127	142	144	159	5	20	35	50	65	67	82	97	112	
71	86	101	116	118	133	148	163	9	24	39	41	56	行 B_2
15	30	45	60	75	90	92	107	122	137	152	167	13	
141	156	158	4	19	34	49	64	66	81	96	111	126	
85	100	115	130	132	147	162	8	23	38	40	55	70	Ⅰ B_5
29	44	59	74	89	104	106	121	136	151	166	12	14	Ⅱ B_9
155	157	3	18	33	48	63	78	80	95	110	125	140	
99	114	129	131	146	161	7	22	37	52	54	69	84	
43	58	73	88	103	105	120	135	150	165	11	26	28	
169	2	17	32	47	62	77	79	94	109	124	139	154	
113	128	143	145	160	6	21	36	51	53	68	83	98	
57	72	87	102	117	119	134	149	164	10	25	27	42	

1	16	31	46	61	76	91	93	108	123	138	153	168	(2)②
71	86	101	116	118	133	148	163	9	24	39	41	56	
141	156	158	4	19	34	49	64	66	81	96	111	126	
29	44	59	74	89	104	106	121	136	151	166	12	14	行 B_2
99	114	129	131	146	161	7	22	37	52	54	69	84	
169	2	17	32	47	62	77	79	94	109	124	139	154	
57	72	87	102	117	119	134	149	164	10	25	27	42	Ⅰ B_{12}
127	142	144	159	5	20	35	50	65	67	82	97	112	Ⅱ B_4
15	30	45	60	75	90	92	107	122	137	152	167	13	
85	100	115	130	132	147	162	8	23	38	40	55	70	
155	157	3	18	33	48	63	78	80	95	110	125	140	
43	58	73	88	103	105	120	135	150	165	11	26	28	
113	128	143	145	160	6	21	36	51	53	68	83	98	

1	16	31	46	61	76	91	93	108	123	138	153	168	(2)③
141	156	158	4	19	34	49	64	66	81	96	111	126	
99	114	129	131	146	161	7	22	37	52	54	69	84	
57	72	87	102	117	119	134	149	164	10	25	27	42	行 B_2
15	30	45	60	75	90	92	107	122	137	152	167	13	
155	157	3	18	33	48	63	78	80	95	110	125	140	
113	128	143	145	160	6	21	36	51	53	68	83	98	Ⅰ B_7
71	86	101	116	118	133	148	163	9	24	39	41	56	Ⅱ B_{11}
29	44	59	74	89	104	106	121	136	151	166	12	14	
169	2	17	32	47	62	77	79	94	109	124	139	154	
127	142	144	159	5	20	35	50	65	67	82	97	112	
85	100	115	130	132	147	162	8	23	38	40	55	70	
43	58	73	88	103	105	120	135	150	165	11	26	28	

1	16	31	46	61	76	91	93	108	123	138	153	168	(2)④
99	114	129	131	146	161	7	22	37	52	54	69	84	
15	30	45	60	75	90	92	107	122	137	152	167	13	
113	128	143	145	160	6	21	36	51	53	68	83	98	行 B_2
29	44	59	74	89	104	106	121	136	151	166	12	14	
127	142	144	159	5	20	35	50	65	67	82	97	112	
43	58	73	88	103	105	120	135	150	165	11	26	28	Ⅰ B_6
141	156	158	4	19	34	49	64	66	81	96	111	126	Ⅱ B_3
57	72	87	102	117	119	134	149	164	10	25	27	42	
155	157	3	18	33	48	63	78	80	95	110	125	140	
71	86	101	116	118	133	148	163	9	24	39	41	56	
169	2	17	32	47	62	77	79	94	109	124	139	154	
85	100	115	130	132	147	162	8	23	38	40	55	70	

1	100	17	116	33	119	49	135	65	151	68	167	84	(3)①
15	114	31	130	47	133	63	149	66	165	82	12	98	
29	128	45	131	61	147	77	163	80	10	96	26	112	行 B_3
43	142	59	145	75	161	91	8	94	24	110	27	126	
57	156	73	159	89	6	92	22	108	38	124	41	140	
71	157	87	4	103	20	106	36	122	52	138	55	154	Ⅰ B_6
85	2	101	18	117	34	120	50	136	53	152	69	168	Ⅱ B_{12}
99	16	115	32	118	48	134	64	150	67	166	83	13	
113	30	129	46	132	62	148	78	164	81	11	97	14	
127	44	143	60	146	76	162	79	9	95	25	111	28	
141	58	144	74	160	90	7	93	23	109	39	125	42	
155	72	158	88	5	104	21	107	37	123	40	139	56	
169	86	3	102	19	105	35	121	51	137	54	153	70	

1	100	17	116	33	119	49	135	65	151	68	167	84	(3)②
29	128	45	131	61	147	77	163	80	10	96	26	112	
57	156	73	159	89	6	92	22	108	38	124	41	140	B_3
85	2	101	18	117	34	120	50	136	53	152	69	168	
113	30	129	46	132	62	148	78	164	81	11	97	14	
141	58	144	74	160	90	7	93	23	109	39	125	42	Ⅰ B_4
169	86	3	102	19	105	35	121	51	137	54	153	70	Ⅱ B_9
15	114	31	130	47	133	63	149	66	165	82	12	98	
43	142	59	145	75	161	91	8	94	24	110	27	126	
71	157	87	4	103	20	106	36	122	52	138	55	154	
99	16	115	32	118	48	134	64	150	67	166	83	13	
127	44	143	60	146	76	162	79	9	95	25	111	28	
155	72	158	88	5	104	21	107	37	123	40	139	56	

1	100	17	116	33	119	49	135	65	151	68	167	84	(3)③
57	156	73	159	89	6	92	22	108	38	124	41	140	
113	30	129	46	132	62	148	78	164	81	11	97	14	B_3
169	86	3	102	19	105	35	121	51	137	54	153	70	
43	142	59	145	75	161	91	8	94	24	110	27	126	
99	16	115	32	118	48	134	64	150	67	166	83	13	Ⅰ B_7
155	72	158	88	5	104	21	107	37	123	40	139	56	Ⅱ B_{10}
29	128	45	131	61	147	77	163	80	10	96	26	112	
85	2	101	18	117	34	120	50	136	53	152	69	168	
141	58	144	74	160	90	7	93	23	109	39	125	42	
15	114	31	130	47	133	63	149	66	165	82	12	98	
71	157	87	4	103	20	106	36	122	52	138	55	154	
127	44	143	60	146	76	162	79	9	95	25	111	28	

1	100	17	116	33	119	49	135	65	151	68	167	84	(3)④
43	142	59	145	75	161	91	8	94	24	110	27	126	
85	2	101	18	117	34	120	50	136	53	152	69	168	B_3
127	44	143	60	146	76	162	79	9	95	25	111	28	
169	86	3	102	19	105	35	121	51	137	54	153	70	
29	128	45	131	61	147	77	163	80	10	96	26	112	Ⅰ B_5
113	30	129	46	132	62	148	78	164	81	11	97	14	Ⅱ B_{11}
71	157	87	4	103	20	106	36	122	52	138	55	154	
155	72	158	88	5	104	21	107	37	123	40	139	56	
15	114	31	130	47	133	63	149	66	165	82	12	98	
57	156	73	159	89	6	92	22	108	38	124	41	140	
99	16	115	32	118	48	134	64	150	67	166	83	13	
141	58	144	74	160	90	7	93	23	109	39	125	42	

1	128	73	18	132	90	35	149	94	52	166	111	56	(4)①
15	142	87	32	146	104	49	163	108	53	11	125	70	
29	156	101	46	160	105	63	8	122	67	25	139	84	
43	157	115	60	5	119	77	22	136	81	39	153	98	行 B_4
57	2	129	74	19	133	91	36	150	95	40	167	112	
71	16	143	88	33	147	92	50	164	109	54	12	126	
85	30	144	102	47	161	106	64	9	123	68	26	140	Ⅰ B_5
99	44	158	116	61	6	120	78	23	137	82	27	154	Ⅱ B_6
113	58	3	130	75	20	134	79	37	151	96	41	168	
127	72	17	131	89	34	148	93	51	165	110	55	13	
141	86	31	145	103	48	162	107	65	10	124	69	14	
155	100	45	159	117	62	7	121	66	24	138	83	28	
169	114	59	4	118	76	21	135	80	38	152	97	42	

1	128	73	18	132	90	35	149	94	52	166	111	56	(4)②
29	156	101	46	160	105	63	8	122	67	25	139	84	
57	2	129	74	19	133	91	36	150	95	40	167	112	
85	30	144	102	47	161	106	64	9	123	68	26	140	B_4
113	58	3	130	75	20	134	79	37	151	96	41	168	
141	86	31	145	103	48	162	107	65	10	124	69	14	
169	114	59	4	118	76	21	135	80	38	152	97	42	ⅠB_7
15	142	87	32	146	104	49	163	108	53	11	125	70	ⅡB_3
43	157	115	60	5	119	77	22	136	81	39	153	98	
71	16	143	88	33	147	92	50	164	109	54	12	126	
99	44	158	116	61	6	120	78	23	137	82	27	154	
127	72	17	131	89	34	148	93	51	165	110	55	13	
155	100	45	159	117	62	7	121	66	24	138	83	28	

1	128	73	18	132	90	35	149	94	52	166	111	56	(4)③
113	58	3	130	75	20	134	79	37	151	96	41	168	
43	157	115	60	5	119	77	22	136	81	39	153	98	
155	100	45	159	117	62	7	121	66	24	138	83	28	B_4
85	30	144	102	47	161	106	64	9	123	68	26	140	
15	142	87	32	146	104	49	163	108	53	11	125	70	
127	72	17	131	89	34	148	93	51	165	110	55	13	ⅠB_{11}
57	2	129	74	19	133	91	36	150	95	40	167	112	ⅡB_2
169	114	59	4	118	76	21	135	80	38	152	97	42	
99	44	158	116	61	6	120	78	23	137	82	27	154	
29	156	101	46	160	105	63	8	122	67	25	139	84	
141	86	31	145	103	48	162	107	65	10	124	69	14	
71	16	143	88	33	147	92	50	164	109	54	12	126	

1	128	73	18	132	90	35	149	94	52	166	111	56	(4)④
85	30	144	102	47	161	106	64	9	123	68	26	140	
169	114	59	4	118	76	21	135	80	38	152	97	42	
71	16	143	88	33	147	92	50	164	109	54	12	126	B_4
155	100	45	159	117	62	7	121	66	24	138	83	28	
57	2	129	74	19	133	91	36	150	95	40	167	112	
141	86	31	145	103	48	162	107	65	10	124	69	14	ⅠB_8
43	157	115	60	5	119	77	22	136	81	39	153	98	ⅡB_{10}
127	72	17	131	89	34	148	93	51	165	110	55	13	
29	156	101	46	160	105	63	8	122	67	25	139	84	
113	58	3	130	75	20	134	79	37	151	96	41	168	
15	142	87	32	146	104	49	163	108	53	11	125	70	
99	44	158	116	61	6	120	78	23	137	82	27	154	

1	142	101	60	19	147	106	78	37	165	124	83	42	(5)①
15	156	115	74	33	161	120	79	51	10	138	97	56	
29	157	129	88	47	6	134	93	65	24	152	111	70	行 B_5
43	2	143	102	61	20	148	107	66	38	166	125	84	
57	16	144	116	75	34	162	121	80	52	11	139	98	
71	30	158	130	89	48	7	135	94	53	25	153	112	
85	44	3	131	103	62	21	149	108	67	39	167	126	ⅠB_7
99	58	17	145	117	76	35	163	122	81	40	12	140	ⅡB_4
113	72	31	59	118	90	49	8	136	95	54	26	154	
127	86	45	4	132	104	63	22	150	109	68	27	168	
141	100	59	18	46	105	77	36	164	123	82	41	13	
155	114	73	32	160	119	91	50	9	137	96	55	14	
169	128	87	46	5	133	92	64	23	151	110	69	28	

(5)②

B_5

Ⅰ B_2
Ⅱ B_{12}

1	142	101	60	19	147	106	78	37	165	124	83	42
57	16	144	116	75	34	162	121	80	52	11	139	98
113	72	31	159	118	90	49	8	136	95	54	26	154
169	128	87	46	5	133	92	64	23	151	110	69	28
43	2	143	102	61	20	148	107	66	38	166	125	84
99	58	17	145	117	76	35	163	122	81	40	12	140
155	114	73	32	160	119	91	50	9	137	96	55	14
29	157	129	88	47	6	134	93	65	24	152	111	70
85	44	3	131	103	62	21	149	108	67	39	167	126
141	100	59	18	146	105	77	36	164	123	82	41	13
15	156	115	74	33	161	120	79	51	10	138	97	56
71	30	158	130	89	48	7	135	94	53	25	153	112
127	86	45	4	132	104	63	22	150	109	68	27	168

(5)③

B_5

Ⅰ B_9
Ⅱ B_8

1	142	101	60	19	147	106	78	37	165	124	83	42
113	72	31	159	118	90	49	8	136	95	54	26	154
43	2	143	102	61	20	148	107	66	38	166	125	84
155	114	73	32	160	119	91	50	9	137	96	55	14
85	44	3	131	103	62	21	149	108	67	39	167	126
15	156	115	74	33	161	120	79	51	10	138	97	56
127	86	45	4	132	104	63	22	150	109	68	27	168
57	16	144	116	75	34	162	121	80	52	11	139	98
169	128	87	46	5	133	92	64	23	151	110	69	28
99	58	17	145	117	76	35	163	122	81	40	12	140
29	157	129	88	47	6	134	93	65	24	152	111	70
141	100	59	18	146	105	77	36	164	123	82	41	13
71	30	158	130	89	48	7	135	94	53	25	153	112

(5)④

B_5

Ⅰ B_{10}
Ⅱ B_{11}

1	142	101	60	19	147	106	78	37	165	124	83	42
85	44	3	131	103	62	21	149	108	67	39	167	126
169	128	87	46	5	133	92	64	23	151	110	69	28
71	30	158	130	89	48	7	135	94	53	25	153	112
155	114	73	32	160	119	91	50	9	137	96	55	14
57	16	144	116	75	34	162	121	80	52	11	139	98
141	100	59	18	146	105	77	36	164	123	82	41	13
43	2	143	102	61	20	148	107	66	38	166	125	84
127	86	45	4	132	104	63	22	150	109	68	27	168
29	157	129	88	47	6	134	93	65	24	152	111	70
113	72	31	159	118	90	49	8	136	95	54	26	154
15	156	115	74	33	161	120	79	51	10	138	97	56
99	58	17	145	117	76	35	163	122	81	40	12	140

(6)①

行 B_6

Ⅰ B_4
Ⅱ B_3

1	114	45	145	89	20	120	64	164	95	39	139	70
15	128	59	159	103	34	134	78	9	109	40	153	84
29	142	73	4	117	48	148	79	23	123	54	167	98
43	156	87	18	118	62	162	93	37	137	68	12	112
57	157	101	32	132	76	7	107	51	151	82	26	126
71	2	115	46	146	90	21	121	65	165	96	27	140
85	16	129	60	160	104	35	135	66	10	110	41	154
99	30	143	74	5	105	49	149	80	24	124	55	168
113	44	144	88	19	119	63	163	94	38	138	69	13
127	58	158	102	33	133	77	8	108	52	152	83	14
141	72	3	116	47	147	91	22	122	53	166	97	28
155	86	17	130	61	161	92	36	136	67	11	111	42
169	100	31	131	75	6	106	50	150	81	25	125	56

1	114	45	145	89	20	120	64	164	95	39	139	70	(6)②
29	142	73	4	117	48	148	79	23	123	54	167	98	
57	157	101	32	132	76	7	107	51	151	82	26	126	$\boldsymbol{B}_6$
85	16	129	60	160	104	35	135	66	10	110	41	154	
113	44	144	88	19	119	63	163	94	38	138	69	13	
141	72	3	116	47	147	91	22	122	53	166	97	28	
169	100	31	131	75	6	106	50	150	81	25	125	56	Ⅰ $\boldsymbol{B}_5$
15	128	59	159	103	34	134	78	9	109	40	153	84	Ⅱ $\boldsymbol{B}_{12}$
43	156	87	18	118	62	162	93	37	137	68	12	112	
71	2	115	46	146	90	21	121	65	165	96	27	140	
99	30	143	74	5	105	49	149	80	24	124	55	168	
127	58	158	102	33	133	77	8	108	52	152	83	14	
155	86	17	130	61	161	92	36	136	67	11	111	42	

1	114	45	145	89	20	120	64	164	95	39	139	70	(6)③
43	156	87	18	118	62	162	93	37	137	68	12	112	
85	16	129	60	160	104	35	135	66	10	110	41	154	$\boldsymbol{B}_6$
127	58	158	102	33	133	77	8	108	52	152	83	14	
169	100	31	131	75	6	106	50	150	81	25	125	56	
29	142	73	4	117	48	148	79	23	123	54	167	98	
71	2	115	46	146	90	21	121	65	165	96	27	140	Ⅰ $\boldsymbol{B}_7$
113	44	144	88	19	119	63	163	94	38	138	69	13	Ⅱ $\boldsymbol{B}_9$
155	86	17	130	61	161	92	36	136	67	11	111	42	
15	128	59	159	103	34	134	78	9	109	40	153	84	
57	157	101	32	132	76	7	107	51	151	82	26	126	
99	30	143	74	5	105	49	149	80	24	124	55	168	
141	72	3	116	47	147	91	22	122	53	166	97	28	

1	114	45	145	89	20	120	64	164	95	39	139	70	(6)④
85	16	129	60	160	104	35	135	66	10	110	41	154	
169	100	31	131	75	6	106	50	150	81	25	125	56	$\boldsymbol{B}_6$
71	2	115	46	146	90	21	121	65	165	96	27	140	
155	86	17	130	61	161	92	36	136	67	11	111	42	
57	157	101	32	132	76	7	107	51	151	82	26	126	
141	72	3	116	47	147	91	22	122	53	166	97	28	Ⅰ $\boldsymbol{B}_2$
43	156	87	18	118	62	162	93	37	137	68	12	112	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
127	58	158	102	33	133	77	8	108	52	152	83	14	
29	142	73	4	117	48	148	79	23	123	54	167	98	
113	44	144	88	19	119	63	163	94	38	138	69	13	
15	128	59	159	103	34	134	78	9	109	40	153	84	
99	30	143	74	5	105	49	149	80	24	124	55	168	

1	21	28	48	55	75	82	102	109	129	136	156	163	(7)①
29	49	56	76	83	103	110	130	137	144	164	2	22	
57	77	84	104	111	118	138	145	165	3	23	30	50	行 $\boldsymbol{B}_7$
85	92	112	119	139	146	166	4	24	31	51	58	78	
113	120	140	147	167	5	25	32	52	59	66	86	93	
141	148	168	6	26	33	40	60	67	87	94	114	121	
169	7	14	34	41	61	68	88	95	115	122	142	149	Ⅰ $\boldsymbol{B}_3$
15	35	42	62	69	89	96	116	123	143	150	157	8	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
43	63	70	90	97	117	124	131	151	158	9	16	36	
71	91	98	105	125	132	152	159	10	17	37	44	64	
99	106	126	133	153	160	11	18	38	45	65	72	79	
127	134	154	161	12	19	39	46	53	73	80	100	107	
155	162	13	20	27	47	54	74	81	101	108	128	135	

1	21	28	48	55	75	82	102	109	129	136	156	163	(7)②
57	77	84	104	111	118	138	145	165	3	23	30	50	
113	120	140	147	167	5	25	32	52	59	66	86	93	B_7
169	7	14	34	41	61	68	88	95	115	122	142	149	
43	63	70	90	97	117	124	131	151	158	9	16	36	
99	106	126	133	153	160	11	18	38	45	65	72	79	
155	162	13	20	27	47	54	74	81	101	108	128	135	Ⅰ B_{10}
29	49	56	76	83	103	110	130	137	144	164	2	22	Ⅱ B_{12}
85	92	112	119	139	146	166	4	24	31	51	58	78	
141	148	168	6	26	33	40	60	67	87	94	114	121	
15	35	42	62	69	89	96	116	123	143	150	157	8	
71	91	98	105	125	132	152	159	10	17	37	44	64	
127	134	154	161	12	19	39	46	53	73	80	100	107	

1	21	28	48	55	75	82	102	109	129	136	156	163	(7)③
113	120	140	147	167	5	25	32	52	59	66	86	93	
43	63	70	90	97	117	124	131	151	158	9	16	36	B_7
155	162	13	20	27	47	54	74	81	101	108	128	135	
85	92	112	119	139	146	166	4	24	31	51	58	78	
15	35	42	62	69	89	96	116	123	143	150	157	8	
127	134	154	161	12	19	39	46	53	73	80	100	107	Ⅰ B_6
57	77	84	104	111	118	138	145	165	3	23	30	50	Ⅱ B_2
169	7	14	34	41	61	68	88	95	115	122	142	149	
99	106	126	133	153	160	11	18	38	45	65	72	79	
29	49	56	76	83	103	110	130	137	144	164	2	22	
141	148	168	6	26	33	40	60	67	87	94	114	121	
71	91	98	105	125	132	152	159	10	17	37	44	64	

1	21	28	48	55	75	82	102	109	129	136	156	163	(7)④
43	63	70	90	97	117	124	131	151	158	9	16	36	
85	92	112	119	139	146	166	4	24	31	51	58	78	B_7
127	134	154	161	12	19	39	46	53	73	80	100	107	
169	7	14	34	41	61	68	88	95	115	122	142	149	
29	49	56	76	83	103	110	130	137	144	164	2	22	
71	91	98	105	125	132	152	159	10	17	37	44	64	Ⅰ B_9
113	120	140	147	167	5	25	32	52	59	66	86	93	Ⅱ B_{11}
155	162	13	20	27	47	54	74	81	101	108	128	135	
15	35	42	62	69	89	96	116	123	143	150	157	8	
57	77	84	104	111	118	138	145	165	3	23	30	50	
99	106	126	133	153	160	11	18	38	45	65	72	79	
141	148	168	6	26	33	40	60	67	87	94	114	121	

1	22	30	51	59	67	88	96	117	125	133	154	162	(8)①
155	163	2	23	31	52	60	68	89	97	105	126	134	
127	135	156	164	3	24	32	40	61	69	90	98	106	行 B_8
99	107	128	136	144	165	4	25	33	41	62	70	91	
71	79	100	108	129	137	145	166	5	26	34	42	63	
43	64	72	80	101	109	130	138	146	167	6	14	35	
15	36	44	65	73	81	102	110	118	139	147	168	7	Ⅰ B_7
169	8	16	37	45	53	74	82	103	111	119	140	148	Ⅱ B_{12}
141	149	157	9	17	38	46	54	75	83	104	112	120	
113	121	142	150	158	10	18	39	47	55	76	84	92	
85	93	114	122	143	151	159	11	19	27	48	56	77	
57	78	86	94	115	123	131	152	160	12	20	28	49	
29	50	58	66	87	95	116	124	132	153	161	13	21	

1	22	30	51	59	67	88	96	117	125	133	154	162	(8)②
127	135	156	164	3	24	32	40	61	69	90	98	106	
71	79	100	108	129	137	145	166	5	26	34	42	63	$\boldsymbol{B}_8$
15	36	44	65	73	81	102	110	118	139	147	168	7	
141	149	157	9	17	38	46	54	75	83	104	112	120	
85	93	114	122	143	151	159	11	19	27	48	56	77	
29	50	58	66	87	95	116	124	132	153	161	13	21	Ⅰ $\boldsymbol{B}_3$
155	163	2	23	31	52	60	68	89	97	105	126	134	Ⅱ $\boldsymbol{B}_5$
99	107	128	136	144	165	4	25	33	41	62	70	91	
43	64	72	80	101	109	130	138	146	167	6	14	35	
169	8	16	37	45	53	74	82	103	111	119	140	148	
113	121	142	150	158	10	18	39	47	55	76	84	92	
57	78	86	94	115	123	131	152	160	12	20	28	49	

1	22	30	51	59	67	88	96	117	125	133	154	162	(8)③
141	149	157	9	17	38	46	54	75	83	104	112	120	
99	107	128	136	144	165	4	25	33	41	62	70	91	$\boldsymbol{B}_8$
57	78	86	94	115	123	131	152	160	12	20	28	49	
15	36	44	65	73	81	102	110	118	139	147	168	7	
155	163	2	23	31	52	60	68	89	97	105	126	134	
113	121	142	150	158	10	18	39	47	55	76	84	92	Ⅰ $\boldsymbol{B}_4$
71	79	100	108	129	137	145	166	5	26	34	42	63	Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$
29	50	58	66	87	95	116	124	132	153	161	13	21	
169	8	16	37	45	53	74	82	103	111	119	140	148	
127	135	156	164	3	24	32	40	61	69	90	98	106	
85	93	114	122	143	151	159	11	19	27	48	56	77	
43	64	72	80	101	109	130	138	146	167	6	14	35	

1	22	30	51	59	67	88	96	117	125	133	154	162	(8)④
99	107	128	136	144	165	4	25	33	41	62	70	91	
15	36	44	65	73	81	102	110	118	139	147	168	7	$\boldsymbol{B}_8$
113	121	142	150	158	10	18	39	47	55	76	84	92	
29	50	58	66	87	95	116	124	132	153	161	13	21	
127	135	156	164	3	24	32	40	61	69	90	98	106	
43	64	72	80	101	109	130	138	146	167	6	14	35	Ⅰ $\boldsymbol{B}_{10}$
141	149	157	9	17	38	46	54	75	83	104	112	120	Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$
57	78	86	94	115	123	131	152	160	12	20	28	49	
155	163	2	23	31	52	60	68	89	97	105	126	134	
71	79	100	108	129	137	145	166	5	26	34	42	63	
169	8	16	37	45	53	74	82	103	111	119	140	148	

85	93	114	122	143	151	159	11	19	27	48	56	77	
1	72	143	32	103	161	63	121	23	81	152	41	112	(9)①
15	86	144	46	117	6	77	135	37	95	166	55	126	
29	100	158	60	118	20	91	149	51	109	11	69	140	行 $\boldsymbol{B}_9$
43	114	3	74	132	34	92	163	65	123	25	83	154	
57	128	17	88	146	48	106	8	66	137	39	97	168	
71	142	31	102	160	62	120	22	80	151	40	111	13	
85	156	45	116	5	76	134	36	94	165	54	125	14	Ⅰ $\boldsymbol{B}_{12}$
99	157	59	130	19	90	148	50	108	10	68	139	28	Ⅱ $\boldsymbol{B}_{11}$
113	2	73	131	33	104	162	64	122	24	82	153	42	
127	16	87	145	47	105	7	78	136	38	96	167	56	
141	32	101	159	61	119	21	79	150	52	110	12	70	
155	44	115	4	75	133	35	93	164	53	124	26	84	
169	58	129	18	89	147	49	107	9	67	138	27	98	

1	72	143	32	103	161	63	121	23	81	152	41	112	(9)②
57	128	17	88	146	48	106	8	66	137	39	97	168	
113	2	73	131	33	104	162	64	122	24	82	153	42	B_9
169	58	129	18	89	147	49	107	9	67	138	27	98	
43	114	3	74	132	34	92	163	65	123	25	83	154	
99	157	59	130	19	90	148	50	108	10	68	139	28	
155	44	115	4	75	133	35	93	164	53	124	26	84	Ⅰ B_4
29	100	158	60	118	20	91	149	51	109	11	69	140	Ⅱ B_2
85	156	45	116	5	76	134	36	94	165	54	125	14	
141	32	101	159	61	119	21	79	150	52	110	12	70	
15	86	144	46	117	6	77	135	37	95	166	55	126	
71	142	31	102	160	62	120	22	80	151	40	111	13	
127	16	87	145	47	105	7	78	136	38	96	167	56	

1	72	143	32	103	161	63	121	23	81	152	41	112	(9)③
43	114	3	74	132	34	92	163	65	123	25	83	154	
85	156	45	116	5	76	134	36	94	165	54	125	14	B_9
127	16	87	145	47	105	7	78	136	38	96	167	56	
169	58	129	18	89	147	49	107	9	67	138	27	98	
29	100	158	60	118	20	91	149	51	109	11	69	140	
71	142	31	102	160	62	120	22	80	151	40	111	13	Ⅰ B_6
113	2	73	131	33	104	162	64	122	24	82	153	42	Ⅱ B_8
155	44	115	4	75	133	35	93	164	53	124	26	84	
15	86	144	46	117	6	77	135	37	95	166	55	126	
57	128	17	88	146	48	106	8	66	137	39	97	168	
99	157	59	130	19	90	148	50	108	10	68	139	28	
141	32	101	159	61	119	21	79	150	52	110	12	70	

1	72	143	32	103	161	63	121	23	81	152	41	112	(9)④
155	44	115	4	75	133	35	93	164	53	124	26	84	
127	16	87	145	47	105	7	78	136	38	96	167	56	B_9
99	157	59	130	19	90	148	50	108	10	68	139	28	
71	142	31	102	160	62	120	22	80	151	40	111	13	
43	114	3	74	132	34	92	163	65	123	25	83	154	
15	86	144	46	117	6	77	135	37	95	166	55	126	Ⅰ B_{10}
169	58	129	18	89	147	49	107	9	67	138	27	98	Ⅱ B_3
141	32	101	159	61	119	21	79	150	52	110	12	70	
113	2	73	131	33	104	162	64	122	24	82	153	42	
85	156	45	116	5	76	134	36	94	165	54	125	14	
57	128	17	88	146	48	106	8	66	137	39	97	168	
29	100	158	60	118	20	91	149	51	109	11	69	140	

1	44	87	130	160	34	77	107	150	24	54	97	140	(10)①
15	58	101	131	5	48	91	121	164	38	68	111	154	
29	72	115	145	19	62	92	135	9	52	82	125	168	行 B_{10}
43	86	129	159	33	76	106	149	23	53	96	139	13	
57	100	143	4	47	90	120	163	37	67	110	153	14	
71	114	144	18	61	104	134	8	51	81	124	167	28	
85	128	158	32	75	105	148	22	65	95	138	12	42	Ⅰ B_{11}
99	142	3	46	89	119	162	36	66	109	152	26	56	Ⅱ B_8
113	156	17	60	103	133	7	50	80	123	166	27	70	
127	157	31	74	117	147	21	64	94	137	11	41	84	
141	2	45	88	118	161	35	78	108	151	25	55	98	
155	16	59	102	132	6	49	79	122	165	39	69	112	
169	32	73	116	146	20	63	93	136	10	40	83	126	

1	44	87	130	160	34	77	107	150	24	54	97	140	(10)②
29	72	115	145	19	62	92	135	9	52	82	125	168	
57	100	143	4	47	90	120	163	37	67	110	153	14	B_{10}
85	128	158	32	75	105	148	22	65	95	138	12	42	
113	156	17	60	103	133	7	50	80	123	166	27	70	
141	2	45	88	118	161	35	78	108	151	25	55	98	
169	32	73	116	146	20	63	93	136	10	40	83	126	ⅠB_9
15	58	101	131	5	48	91	121	164	38	68	111	154	ⅡB_2
43	86	129	159	33	76	106	149	23	53	96	139	13	
71	114	144	18	61	104	134	8	51	81	124	167	28	
99	142	3	46	89	119	162	36	66	109	152	26	56	
127	157	31	74	117	147	21	64	94	137	11	41	84	
155	16	59	102	132	6	49	79	122	165	39	69	112	

1	44	87	130	160	34	77	107	150	24	54	97	140	(10)③
113	156	17	60	103	133	7	50	80	123	166	27	70	
43	86	129	159	33	76	106	149	23	53	96	139	13	B_{10}
155	16	59	102	132	6	49	79	122	165	39	69	112	
85	128	158	32	75	105	148	22	65	95	138	12	42	
15	58	101	131	5	48	91	121	164	38	68	111	154	
127	157	31	74	117	147	21	64	94	137	11	41	84	ⅠB_7
57	100	143	4	47	90	120	163	37	67	110	153	14	ⅡB_6
169	32	73	116	146	20	63	93	136	10	40	83	126	
99	142	3	46	89	119	162	36	66	109	152	26	56	
29	72	115	145	19	62	92	135	9	52	82	125	168	
141	2	45	88	118	161	35	78	108	151	25	55	98	
71	114	144	18	61	104	134	8	51	81	124	167	28	

1	44	87	130	160	34	77	107	150	24	54	97	140	(10)④
85	128	158	32	75	105	148	22	65	95	138	12	42	
169	32	73	116	146	20	63	93	136	10	40	83	126	B_{10}
71	114	144	18	61	104	134	8	51	81	124	167	28	
155	16	59	102	132	6	49	79	122	165	39	69	112	
57	100	143	4	47	90	120	163	37	67	110	153	14	
141	2	45	88	118	161	35	78	108	151	25	55	98	ⅠB_4
43	86	129	159	33	76	106	149	23	53	96	139	13	ⅡB_5
127	157	31	74	117	147	21	64	94	137	11	41	84	
29	72	115	145	19	62	92	135	9	52	82	125	168	
113	156	17	60	103	133	7	50	80	123	166	27	70	
15	58	101	131	5	48	91	121	164	38	68	111	154	
99	142	3	46	89	119	162	36	66	109	152	26	56	

1	58	115	159	47	104	148	36	80	137	25	69	126	(11)①
15	72	129	4	61	105	162	50	94	151	39	83	140	
29	86	143	18	75	119	7	64	108	165	40	97	154	行 B_{11}
43	100	144	32	89	133	21	78	122	10	54	111	168	
57	114	158	46	103	147	35	79	136	24	68	125	13	
71	128	3	60	117	161	49	93	150	38	82	139	14	
85	142	17	74	118	6	63	107	164	52	96	153	28	ⅠB_9
99	156	31	88	132	20	77	121	9	53	110	167	42	ⅡB_{10}
113	157	45	102	146	34	91	135	23	67	124	12	56	
127	2	59	116	160	48	92	149	37	81	138	26	70	
141	16	73	130	5	62	106	163	51	95	152	27	84	
155	32	87	131	19	76	120	8	65	109	166	41	98	
169	44	101	145	33	90	134	22	66	123	11	55	112	

1	58	115	159	47	104	148	36	80	137	25	69	126	(11)②
29	86	143	18	75	119	7	64	108	165	40	97	154	
57	114	158	46	103	147	35	79	136	24	68	125	13	B_{11}
85	142	17	74	118	6	63	107	164	52	96	153	28	
113	157	45	102	146	34	91	135	23	67	124	12	56	
141	16	73	130	5	62	106	163	51	95	152	27	84	
169	44	101	145	33	90	134	22	66	123	11	55	112	Ⅰ B_{12}
15	72	129	4	61	105	162	50	94	151	39	83	140	Ⅱ B_8
43	100	144	32	89	133	21	78	122	10	54	111	168	
71	128	3	60	117	161	49	93	150	38	82	139	14	
99	156	31	88	132	20	77	121	9	53	110	167	42	
127	2	59	116	160	48	92	149	37	81	138	26	70	
155	32	87	131	19	76	120	8	65	109	166	41	98	

1	58	115	159	47	104	148	36	80	137	25	69	126	(11)③
43	100	144	32	89	133	21	78	122	10	54	111	168	
85	142	17	74	118	6	63	107	164	52	96	153	28	B_{11}
127	2	59	116	160	48	92	149	37	81	138	26	70	
169	44	101	145	33	90	134	22	66	123	11	55	112	
29	86	143	18	75	119	7	64	108	165	40	97	154	
71	128	3	60	117	161	49	93	150	38	82	139	14	Ⅰ B_3
113	157	45	102	146	34	91	135	23	67	124	12	56	Ⅱ B_2
155	32	87	131	19	76	120	8	65	109	166	41	98	
15	72	129	4	61	105	162	50	94	151	39	83	140	
57	114	158	46	103	147	35	79	136	24	68	125	13	
99	156	31	88	132	20	77	121	9	53	110	167	42	
141	16	73	130	5	62	106	163	51	95	152	27	84	

1	58	115	159	47	104	148	36	80	137	25	69	126	(11)④
85	142	17	74	118	6	63	107	164	52	96	153	28	
169	44	101	145	33	90	134	22	66	123	11	55	112	B_{11}
71	128	3	60	117	161	49	93	150	38	82	139	14	
155	32	87	131	19	76	120	8	65	109	166	41	98	
57	114	158	46	103	147	35	79	136	24	68	125	13	
141	16	73	130	5	62	106	163	51	95	152	27	84	Ⅰ B_5
43	100	144	32	89	133	21	78	122	10	54	111	168	Ⅱ B_7
127	2	59	116	160	48	92	149	37	81	138	26	70	
29	86	143	18	75	119	7	64	108	165	40	97	154	
113	157	45	102	146	34	91	135	23	67	124	12	56	
15	72	129	4	61	105	162	50	94	151	39	83	140	
99	156	31	88	132	20	77	121	9	53	110	167	42	

上例，以作 B_1 列线组，其余各列和方分别作行线组，总共得到 45 个 13 阶完美幻方，符合循环排列表所要求的数目.

如同对 $n=11$ 一样用同样的方法，可构造 13 级对称排列：

1. 在数对：3,11、4,10、5,9、6,8 中，各取一数构造 4 级排列；

2. 任取一个给定的 4 级排列，有 5 个位置可安置中心数 7；

3. 把数 1,2 安置于排列的头两位，再利用对称性可得 10 个对称的 11 级排列，由此可得 11 级对称排列数为：

$$\mu(13)=4!\times2^4\times5\times2=3840,$$

从这些排列中任取 2 个作 13 阶分段方的行、列序构造 13 阶分段方，进一步构造列和方、完美幻方.

五、17 阶完美幻方

这里讲述可构造 17 阶完美幻方的对称排列.

以对称排列: $\pi(1,2,3,4,5,12,8,7,9,11,10,6,13,14,15,16,17)$为行列序, 得分段方 A_1:

1	2	3	4	5	12	8	7	9	11	10	6	13	14	15	16	17	A_1
18	19	20	21	22	29	25	24	26	28	27	23	30	31	32	33	34	
35	36	37	38	39	46	42	41	43	45	44	40	47	48	49	50	51	
52	53	54	55	56	63	59	58	60	62	61	57	64	65	66	67	68	
69	70	71	72	73	80	76	75	77	79	78	74	81	82	83	84	85	
188	189	190	191	192	199	195	194	196	198	197	193	200	201	202	203	204	
120	121	122	123	124	131	127	126	128	130	129	125	132	133	134	135	136	
103	104	105	106	107	114	110	109	111	113	112	108	115	116	117	118	119	
137	138	139	140	141	148	144	143	145	147	146	142	149	150	151	152	153	
171	172	173	174	175	182	178	177	179	181	180	176	183	184	185	186	187	
154	155	156	157	158	165	161	160	162	164	163	159	166	167	168	169	170	
86	87	88	89	90	97	93	92	94	96	95	91	98	99	100	101	102	
205	206	207	208	209	216	212	211	213	215	214	210	217	218	219	220	221	
222	223	224	225	226	233	229	228	230	232	231	227	234	235	236	237	238	
239	240	241	242	243	250	246	245	247	249	248	244	251	252	253	254	255	
256	257	258	259	260	267	263	262	264	266	265	261	268	269	270	271	272	
273	274	275	276	277	284	280	279	281	283	282	278	285	286	287	288	289	

下面是对称的分段方 A_1 的各列和方中心线(包含中心数 145 的列线), 这里还同时计算了各中心线的各次和, 并按次和的相等状况进行了配对:

B_5	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287
B_7	4	27	35	58	83	192	125	104	145	186	165	98	207	232	255	263	286

2465 480645 105425585 24689505977 6028485110825

B_{12}	15	28	39	68	74	195	121	116	145	174	169	95	216	222	251	262	275
B_{10}	14	25	51	62	71	200	131	118	145	172	159	90	219	228	239	265	276

2465 470845 101166065 23157498617 5514822494825

B_2	11	23	48	67	69	190	124	110	145	180	166	100	221	223	242	267	279
B_9	5	31	46	66	76	203	126	119	145	171	164	87	214	224	244	259	285

2465 473025 102112625

B_{15}	7	29	38	53	85	202	132	112	145	178	158	88	205	237	252	261	283
B_8	13	21	40	54	78	189	130	103	145	187	160	101	212	236	250	269	277

2465 478465 104479025

(42)

B_4	10	32	36	63	79	201	120	107	145	183	170	89	211	227	254	258	280
B_{13}	8	20	50	57	75	191	136	115	145	175	154	99	215	233	240	270	282

2465 475745 103295825

B_3	2	22	41	61	82	204	122	114	145	176	168	86	208	229	249	268	288
B_6	6	18	42	64	70	194	133	105	145	185	157	96	220	226	248	272	284

2465 482205 106105925

B_{14}	16	30	45	59	72	188	134	108	145	182	156	102	218	231	245	260	274
B_{11}	12	34	44	56	84	198	123	117	145	173	167	92	206	234	246	256	278

2465 469285 100485725

由此可见, 用列和方 B_5, B_7、B_{12}, B_{10} 作完美幻方的对角线组, 并以其中心线为主对角线, 则所得的主对角线之 1, 2, 3, 4, 5 各次和都相等. 我们称这种完美幻方为 5 次特优的 17 阶完美幻方, 这里得到 13 个. 以其他列和方对为对角线组, 则可得许多的 3 次特优的 17 阶完美幻方.

下面以 A_1 的 B_5 作行线组，可得 17 阶完美幻方如下：

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	
2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	$A_1 B_5$
3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	
4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	
5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	
12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	
8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	162	95	220	225	247	269	274	
7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	
9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	
11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	
10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	
6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	
13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	
14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	
15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	
16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	
17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)①
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	行 B_5
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	列 B_{12}
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	Ⅰ B_4
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	Ⅱ B_2
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)②
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	行 B_5
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	列 B_{12}
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	Ⅰ B_{11}
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	Ⅱ B_{10}
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)③
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	行 B_5
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	列 B_{12}
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	ⅠB_{14}
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	ⅡB_3
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)④
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	行 B_5
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	列 B_{12}
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	ⅠB_{15}
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	ⅡB_{13}
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)⑤
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	行 B_5
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	列 B_{12}
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	ⅠB_8
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	ⅡB_1
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)⑥
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	行 B_5
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	列 B_{12}
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	ⅠB_{16}
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	ⅡB_9
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)⑦
54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	
124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	行 B_5
178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	列 B_{12}
213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	
265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	
30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	ⅠB_6
83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	ⅡB_7
119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	
155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	
225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	
284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	
41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	
198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	
142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	
99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	
254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)①
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	行 B_5
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	列 B_1
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	ⅠB_{10}
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	ⅡB_6
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)②
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	行 B_5
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	列 B_1
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	Ⅰ B_{16}
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	Ⅱ B_2
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)③
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	行 B_5
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	列 B_1
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	Ⅰ B_7
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	Ⅱ B_4
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)④
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	行 B_5
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	列 B_1
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	Ⅰ B_{12}
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	Ⅱ B_{11}
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)⑤
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	行 B_5
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	列 B_1
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	ⅠB_9
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	ⅡB_{15}
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(2)⑥
271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	
235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	行 B_5
91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	列 B_1
181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	
109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	
199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	ⅠB_{14}
55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	ⅡB_8
19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	
289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	
253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	
217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	
163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	
145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	
127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	
73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	
37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)①
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	行 B_5
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	列 B_2
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	ⅠB_3
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	ⅡB_{16}
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)②
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	行 B_5
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	列 B_2
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	ⅠB_6
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	ⅡB_1
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)③
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	行 B_5
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	列 B_2
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	ⅠB_8
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	ⅡB_4
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)④
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	行 B_5
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	列 B_2
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	ⅠB_{11}
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	ⅡB_{14}
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)⑤
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	行 B_5
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	列 B_2
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	ⅠB_{10}
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	ⅡB_{13}
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(3)⑥
59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	
132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	行 B_5
172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	列 B_2
211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	
269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	
20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	ⅠB_7
77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	ⅡB_9
117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	
157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	
232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	
288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	
39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	
197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	
153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	
97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	
244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)①
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	行 B_5
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	列 B_3
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	ⅠB_{12}
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	ⅡB_2
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)②
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	行 B_5
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	列 B_3
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	ⅠB_{13}
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	ⅡB_6
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)③
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	行 B_5
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	列 B_3
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	ⅠB_{11}
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	ⅡB_9
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)④
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	行 B_5
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	列 B_3
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	ⅠB_7
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	ⅡB_{10}
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)⑤
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	行 B_5
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	列 B_3
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	ⅠB_1
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	ⅡB_{15}
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(4)⑥
167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	
62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	行 B_5
233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	列 B_3
121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	
287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	
180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	ⅠB_{14}
42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	ⅡB_{16}
207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	
203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	
261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	
143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	
21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	
102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	
81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	
247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	
107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(5)①
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	行 B_5
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	列 B_4
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	ⅠB_1
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	ⅡB_2
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	

(5)② 行 B_5 列 B_4 ⅠB_9 ⅡB_{14}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165

(5)③ 行 B_5 列 B_4 ⅠB_8 ⅡB_7

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84

(5)④ 行 B_5 列 B_4 ⅠB_3 ⅡB_{10}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(5)⑤
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	行 B_5
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	列 B_4
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	ⅠB_{15}
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	ⅡB_{11}
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(5)⑥
173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	
22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	行 B_5
161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	列 B_4
43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	
95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	
64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	ⅠB_{16}
219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	ⅡB_6
85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	
223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	
191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	
250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	
126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	
266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	
108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	
286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	
152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(6)①
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	行 B_5
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	列 B_6
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	ⅠB_{16}
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	ⅡB_{12}
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152

(6)②

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_6$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_4$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_{11}$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175

(6)③

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_6$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_8$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_9$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48

(6)④

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_6$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_{15}$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_{10}$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(6)⑤
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	行 B_5
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	列 B_6
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	ⅠB_{13}
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	ⅡB_1
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(6)⑥
201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	
164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	行 B_5
267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	列 B_6
53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	
151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	
231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	ⅠB_3
25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	ⅡB_2
122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	
101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	
278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	
75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	
174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	
255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	
47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	
111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	
209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(7)①
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	行 B_5
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	列 B_7
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	ⅠB_{11}
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	ⅡB_{13}
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	

(7)②

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_7$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_8$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_{15}$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51

(7)③

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_7$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_4$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_{14}$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191

(7)④

行 $\boldsymbol{B}_5$ 列 $\boldsymbol{B}_7$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_{12}$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_9$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(7)⑤
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	行 B_5
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	列 B_7
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	Ⅰ B_{10}
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	Ⅱ B_2
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(7)⑥
221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	
118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	行 B_5
49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	列 B_7
252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	
183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	
74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	Ⅰ B_{16}
282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	Ⅱ B_1
96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	
128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	
24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	
229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	
148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	
56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	
259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	
156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	
189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(8)①
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	行 B_5
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	列 B_8
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	Ⅰ B_2
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	Ⅱ B_6
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23

(8)②

行 $\boldsymbol{B}_5$
列 $\boldsymbol{B}_8$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_{11}$
Ⅱ$\boldsymbol{B}_7$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61

(8)③

行 $\boldsymbol{B}_5$
列 $\boldsymbol{B}_8$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_9$
Ⅱ$\boldsymbol{B}_4$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169

(8)④

行 $\boldsymbol{B}_5$
列 $\boldsymbol{B}_8$

Ⅰ$\boldsymbol{B}_{10}$
Ⅱ$\boldsymbol{B}_{12}$

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(8)⑤
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	行 B_5
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	列 B_8
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	ⅠB_{13}
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	ⅡB_{16}
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(8)⑥
248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	
89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	行 B_5
150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	列 B_8
195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	
51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	
283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	ⅠB_1
224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	ⅡB_3
166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	
114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	
84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	
26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	
257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	
210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	
175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	
134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	
58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)①
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	行 B_5
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	列 B_9
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	ⅠB_6
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	ⅡB_3
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)②
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	行 B_5
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	列 B_9
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	Ⅰ B_{10}
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	Ⅱ B_{14}
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)③
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	行 B_5
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	列 B_9
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	Ⅰ B_{11}
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	Ⅱ B_8
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)④
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	行 B_5
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	列 B_9
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	Ⅰ B_{16}
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	Ⅱ B_{15}
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)⑤
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	行 B_5
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	列 B_9
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	Ⅰ B_{12}
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	Ⅱ B_1
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(9)⑥
36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	
71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	行 B_5
123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	列 B_9
141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	
165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	
212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	Ⅰ B_2
245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	Ⅱ B_{13}
281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	
28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	
61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	
193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	
115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	
184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	
100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	
237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	
272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(10)①
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	行 B_5
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	列 B_{10}
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	Ⅰ B_{12}
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	Ⅱ B_7
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	

⑽② 行 B_5 列 B_{10} ⅠB_{15} ⅡB_{14}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33

⑽③ 行 B_5 列 B_{10} ⅠB_6 ⅡB_9

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53

⑽④ 行 B_5 列 B_{10} ⅠB_3 ⅡB_8

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(10)⑤
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	行 B_5
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	列 B_{10}
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	ⅠB_4
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	ⅡB_{13}
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	
1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(10)⑥
94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	
204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	行 B_5
279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	列 B_{10}
169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	
76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	
270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	ⅠB_{11}
182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	ⅡB_2
65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	
243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	
149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	
38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	
227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	
105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	
27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	
206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	
130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	
1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(11)①
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	行 B_5
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	列 B_{11}
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	ⅠB_6
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	ⅡB_{12}
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)②
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	行 B_5
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	列 B_{11}
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	ⅠB_3
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	ⅡB_{13}
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)③
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	行 B_5
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	列 B_{11}
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	ⅠB_{16}
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	ⅡB_7
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(1)④
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	行 B_5
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	列 B_{11}
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	ⅠB_1
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	ⅡB_{14}
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(11)⑤
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	行 B_5
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	列 B_{11}
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	·
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	Ⅰ B_{15}
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	Ⅱ B_2
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(11)⑥
218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	
113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	行 B_5
46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	列 B_{11}
240	263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	
185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	
78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	63	Ⅰ B_4
280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	Ⅱ B_{10}
88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	
135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	
23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	
228	251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	
140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	
68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	40	
268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	
162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	
192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(12)①
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	行 B_5
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	列 B_{13}
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	Ⅰ B_3
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	Ⅱ B_{12}
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	

⑿② 行 B_5 列 B_{13} ⅠB_7 ⅡB_1

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156

⑿③ 行 B_5 列 B_{13} ⅠB_{15} ⅡB_6

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79

⑿④ 行 B_5 列 B_{13} ⅠB_4 ⅡB_{16}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⑿⑤
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	行 B_5
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	列 B_{13}
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	Ⅰ B_{10}
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	Ⅱ B_8
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⑿⑥
186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	
31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	276	9	行 B_5
159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	列 B_{13}
45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	
92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	147	185	156	
63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	275	7	30	35	Ⅰ B_2
208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	Ⅱ B_{14}
70	195	125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	
238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	93	210	
202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	
251	256	284	10	33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	
129	118	140	179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	
264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	
110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	
277	11	32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	
139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⒀①
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83	行 B_5
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271	列 B_{14}
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187	
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	Ⅰ B_9
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	Ⅱ B_3
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25	
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211	
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95

(13)②
行 B_5
列 B_{14}
ⅠB_4
ⅡB_{12}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128

(13)③
行 B_5
列 B_{14}
ⅠB_7
ⅡB_{15}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240

(13)④
行 B_5
列 B_{14}
ⅠB_{11}
ⅡB_6

⒀⑤ 行 B_5 列 B_{14} ⅠB_{13} ⅡB_8

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139

⒀⑥ 行 B_5 列 B_{14} ⅠB_{10} ⅡB_{16}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226
87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167
146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114
190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	34	39	62	83
40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	242	264	286	2	25
276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	98	205	233	248	271
234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	168	88	211
158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	187
116	138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128
80	197	135	106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52
32	37	58	81	188	131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11
263	278	17	22	45	66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240
220	225	247	269	274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95
177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139
136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193
60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38

⒁① 行 B_5 列 B_{15} ⅠB_{12} ⅡB_{14}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(14)②
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	行 B_5
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	列 B_{15}
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	Ⅰ B_8
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	Ⅱ B_6
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(14)③
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	行 B_5
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	列 B_{15}
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	Ⅰ B_7
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	Ⅱ B_{13}
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(14)④
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	行 B_5
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	列 B_{15}
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	Ⅰ B_9
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	Ⅱ B_2
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⒁⑤
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	行 $\boldsymbol{B}_5$
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	列 $\boldsymbol{B}_{15}$
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	Ⅰ$\boldsymbol{B}_1$
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	Ⅱ$\boldsymbol{B}_{11}$
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⒁⑥
246	261	289	5	28	49	54	75	200	120	114	146	186	157	94	218	223	
98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	160	行 $\boldsymbol{B}_5$
138	178	159	102	209	232	253	258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	列 $\boldsymbol{B}_{15}$
194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	66	71	
48	53	76	193	136	107	147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	
275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	226	249	270	Ⅰ$\boldsymbol{B}_3$
230	252	257	280	6	34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	Ⅱ$\boldsymbol{B}_4$
168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	125	119	141	181	
106	145	184	155	93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	
79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	274	8	23	51	56	
33	38	60	82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	
260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	179	167	87	212	227	255	
214	237	242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	
187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	50	55	77	201	121	110	142	
131	112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	
57	85	192	130	117	139	177	166	86	216	231	254	259	281	14	19	42	

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	⒂①
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	行 $\boldsymbol{B}_5$
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	列 $\boldsymbol{B}_{16}$
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	
242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	Ⅰ$\boldsymbol{B}_{14}$
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	Ⅱ$\boldsymbol{B}_7$
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	
93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	
112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	
82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	

(15)②

行 B_5
列 B_{16}

Ⅰ B_3
Ⅱ B_{11}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27
93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86
82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75
242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253
112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107

(15)③

行 B_5
列 B_{16}

Ⅰ B_1
Ⅱ B_{10}

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27
82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86
242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75
112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140
93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253

(15)④

行 B_5
列 B_{16}

Ⅰ B_{13}
Ⅱ B_9

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285
242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237
93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173
112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131
82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45

1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(15)⑤
93	210	238	243	266	287	3	24	47	52	80	197	135	106	145	184	155	
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	行 B_5
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	列 B_{16}
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	
82	189	127	108	153	175	164	100	207	228	251	256	284	10	33	38	60	
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	Ⅰ B_8
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	Ⅱ B_{12}
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	
242	264	286	2	25	40	68	73	198	134	105	143	183	154	97	214	237	
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	
112	152	174	162	99	206	229	244	272	277	11	32	37	58	81	188	131	
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	
1	29	44	67	72	196	133	104	144	176	170	90	215	236	241	262	285	(15)⑥
160	98	205	233	248	271	276	9	31	36	59	74	204	124	113	151	173	
66	71	194	132	103	148	180	169	89	213	235	240	263	278	17	22	45	行 B_5
226	249	270	275	7	30	35	63	78	203	123	111	150	172	161	91	221	列 B_{16}
125	119	141	181	168	88	211	234	239	267	282	16	21	43	65	70	195	
274	8	23	51	56	79	202	122	109	149	171	165	95	220	225	247	269	
179	167	87	212	227	255	260	283	15	20	41	64	69	199	129	118	140	Ⅰ B_{15}
50	55	77	201	121	110	142	187	158	96	219	224	245	268	273	12	27	Ⅱ B_4
216	231	254	259	281	14	19	42	57	85	192	130	117	139	177	166	86	
200	120	114	146	186	157	94	218	223	246	261	289	5	28	49	54	75	
258	279	13	18	46	61	84	191	128	116	138	178	159	102	209	232	253	
147	185	156	92	217	222	250	265	288	4	26	48	53	76	193	136	107	
34	39	62	83	190	126	115	137	182	163	101	208	230	252	257	280	6	

这里共得 91 个 17 阶完美幻方.

六、素数 n 阶完美幻方

$n=2r+1$, $r=1,2,\cdots n$ 为素数. $\varphi(n)=2r$, $\lambda(n)=(n-1)!$, $\mu(n)=(r-1)!\,2^{r-1}$. 元素集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$.

$$\Sigma_n=\frac{n(n^2+1)}{2} \tag{45}$$

每个 n 级排列有 $n-1$ 个循环排列: $\pi_1, \pi_2, \pi_3,\ldots, \pi_{n-1}$. 任取二个 7 级排列作分段方的行、列序构作 n 阶分段方 A. 再执行行 Z 变换可得 $n-1=2r$ 个列和方:

$$B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{n-1} \ . \tag{46}$$

由循环排列可建立循环排列表, 并任取一个列和方填入可得相应阶数的完美幻方.

定理 2 对素数 $n = 2r + 1(r = 2,3,\cdots)$，把每一个列和方 B_j 填入循环排列表，可得$(r-1)(2r-3)$个 n 阶完美幻方.

证明 n 阶循环排列表共有 $r\cdot 2r = 2r^2$ 个 n 阶方格. 各 B_j 填入后有一行以 A_0 为行线组. 其余各行中，各有一方以 A_0 或 A_1 为第 I 或第 II 对角线组. 但是，其中有一方的两个对角线组分别是 A_0, A_1 线组. 因此，在 n 阶循环排列表中总共可得:

$$2r^2 - r - 2(2r-1) + 1 = 2r^2 - 5r + 3 = (r-1)(2r-3) \tag{47}$$

$(n=2r+1)$个 n 阶完美幻方.

所有的各 $B_j(j=1,2,\cdots,n-1)$，分别填入循环排列表，可得

$$M_n = r(r-1)(2r-3) \div 2 \tag{48}$$

个互不同构的基本的 n 阶完美幻方，从而总共有

$$N_n = r(r-1)(2r-3)[(n-1)!]^2 \div 2 \tag{49}$$

个基本的互不同构的 n 阶完美幻方. 其中对称的 n 阶完美幻方数为

$$\mu_n = r(r-1)(2r-3)[\mu(n)]^2 \div 2 \tag{50}$$

由上可得如下数据表:

M_n, N_n, μ_n 计算表

n	r	$\varphi(n)$	$\lambda(n)$	$\mu(n)$	$\sum_n$	M_n	N_n	μ_n
5	2	4	6	2	65	1	36	4
7	3	6	120	8	175	9	129600	576
11	5	10	9!	384	671	70	$[9!]^2 70$	$[384]^2 70$
13	6	12	11!	3840	1105	135	$[11!]^2 135$	$[3840]^2 135$
17	8	16	15!	645120	2465	364	$[15!]^2 364$	$[645120]^2 364$
19	9	18	17!	2580480	3439	540	$[17!]^2 540$	$[2580480]^2 540$
23	11	22	21!	$10!2^{10}$	6095	1045	$[21!]^2 1045$	$[10!2^{10}]^2 1045$
29	14	28	27!	$13!2^{13}$	12209	2275	$[27!]^2 2275$	$[13!2^{13}]^2 2275$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

由此，我们对素数阶完美幻方的编制理论和制作方法有了基本的了解. 通过我们的研究，可以肯定，对阶数大于 3 的任意素数 n: 在连续自然数集 $\mathbf{F} = \{1,2,3,\cdots, n^2\}$ 上，都可以用这里介绍的方法编制出具有相应阶数的完美幻方，而且是成批量的编制.

例 29 阶完美幻方举例.

下面是用我们的方法直接编制的几个 29 阶完美幻方. 其中

$$\mathbf{F} = \{1,2,3,\cdots,841\},\ \Sigma_{29} = 12\,209. \tag{51}$$

1	422	814	394	786	366	758	338	730	310	702	282	674	254	646	226	648	198	590	170	562	142	534	114	506	86	478	58	450
31	452	3	424	816	396	788	368	760	340	732	312	704	284	676	256	648	228	620	200	592	172	564	144	536	116	508	59	480
61	482	33	454	5	426	818	398	790	370	762	342	734	314	706	286	678	258	650	230	622	202	594	174	566	117	538	89	510
91	512	63	484	35	456	7	428	820	400	792	372	764	344	736	316	708	288	680	260	652	232	624	175	596	147	568	119	540
121	542	93	514	65	486	37	458	9	430	822	402	794	374	766	346	738	318	710	290	682	233	654	205	626	177	598	149	570
151	572	123	544	95	516	67	488	39	460	11	432	824	404	796	376	768	348	740	291	712	263	684	235	656	207	628	179	600
181	602	153	574	125	546	97	518	69	490	41	462	13	434	826	406	798	349	770	321	742	293	714	265	686	237	658	209	630
211	632	183	604	155	576	127	548	99	520	71	492	43	464	15	407	828	379	800	351	772	323	744	295	716	267	688	239	660
241	662	213	634	185	606	157	578	129	550	101	522	73	465	45	437	17	409	830	381	802	353	774	325	746	297	718	269	690
271	692	243	664	215	636	187	608	159	580	131	523	103	495	75	467	47	439	19	411	832	383	804	355	776	327	748	299	720
301	722	273	694	245	666	217	638	189	581	161	553	133	525	105	497	77	469	49	441	21	413	834	385	806	357	778	329	750
331	752	303	724	275	696	247	639	219	611	191	583	163	555	135	527	107	499	79	471	51	443	23	415	836	387	808	359	780
361	782	333	754	305	697	277	669	249	641	221	613	193	585	165	557	137	529	109	501	81	473	53	445	25	417	838	389	810
391	812	363	755	335	727	307	699	279	671	251	643	223	615	195	587	167	559	139	531	111	503	83	475	55	447	27	419	840
421	813	393	785	365	757	337	729	309	701	281	673	253	645	225	617	197	589	169	561	141	533	113	505	85	477	57	449	29
451	2	423	815	395	787	367	759	339	731	311	703	283	675	255	647	227	619	199	591	171	563	143	535	115	507	87	479	30
481	32	453	4	425	817	397	789	369	761	341	733	313	705	285	677	257	649	229	621	201	593	173	565	145	537	88	509	60
511	62	483	34	455	6	427	819	399	791	371	763	343	735	315	707	287	679	259	651	231	623	203	595	146	567	118	539	90
541	92	513	64	485	36	457	8	429	821	401	793	373	765	345	737	317	709	289	681	261	653	204	625	176	597	148	569	120
571	122	543	94	515	66	487	38	459	10	431	823	403	795	375	767	347	739	319	711	262	683	234	655	206	627	178	599	150
601	152	573	124	545	96	517	68	489	40	461	12	433	825	405	797	377	769	320	741	292	713	264	685	236	657	208	629	180
631	182	603	154	575	126	547	98	519	70	491	42	463	14	435	827	378	799	350	771	322	743	294	715	266	687	238	659	210
661	212	633	184	605	156	577	128	549	100	521	72	493	44	436	16	408	829	380	801	352	773	324	745	296	717	268	689	240
691	242	663	214	635	186	607	158	579	130	551	102	494	74	466	46	438	18	410	831	382	803	354	775	326	747	298	719	270
721	272	693	244	665	216	637	188	609	160	552	132	524	104	496	76	468	48	440	20	412	833	384	805	356	777	328	749	300
751	302	723	274	695	246	667	218	610	190	582	162	554	134	526	106	498	78	470	50	442	22	414	835	386	807	358	779	330
781	332	753	304	725	276	668	248	640	210	612	192	584	164	556	136	528	108	500	80	472	52	444	24	416	837	388	809	360
811	362	783	334	726	306	698	278	670	240	642	222	614	194	586	166	558	138	530	110	502	82	474	54	446	26	418	839	390
841	392	784	364	756	336	728	308	700	270	672	252	644	224	616	196	588	168	560	140	532	112	504	84	476	56	448	28	420

①

1	422	814	394	786	366	758	338	730	310	702	282	674	254	646	226	648	198	590	170	562	142	534	114	506	86	478	58	450
61	482	33	454	5	426	818	398	790	370	762	342	734	314	706	286	678	258	650	230	622	202	594	174	566	117	538	89	510
121	542	93	514	65	486	37	458	9	430	822	402	794	374	766	346	738	318	710	290	682	233	654	205	626	177	598	149	570
181	602	153	574	125	546	97	518	69	490	41	462	13	434	826	406	798	349	770	321	742	293	714	265	686	237	658	209	630
241	662	213	634	185	606	157	578	129	550	101	522	73	465	45	437	17	409	830	381	802	353	774	325	746	297	718	269	690
301	722	273	694	245	666	217	638	189	581	161	553	133	525	105	497	77	469	49	441	21	413	834	385	806	357	778	329	750
361	782	333	754	305	697	277	669	249	641	221	613	193	585	165	557	137	529	109	501	81	473	53	445	25	417	838	389	810
421	813	393	785	365	757	337	729	309	701	281	673	253	645	225	617	197	589	169	561	141	533	113	505	85	477	57	449	29
481	32	453	4	425	817	397	789	369	761	341	733	313	705	285	677	257	649	229	621	201	593	173	565	145	537	88	509	60
541	92	513	64	485	36	457	8	429	821	401	793	373	765	345	737	317	709	289	681	261	653	204	625	176	597	148	569	120
601	152	573	124	545	96	517	68	489	40	461	12	433	825	405	797	377	769	320	741	292	713	264	685	236	657	208	629	180
661	212	633	184	605	156	577	128	549	100	521	72	493	44	436	16	408	829	380	801	352	773	324	745	296	717	268	689	240
721	272	693	244	665	216	637	188	609	160	552	132	524	104	496	76	468	48	440	20	412	833	384	805	356	777	328	749	300
781	332	753	304	725	276	668	248	640	210	612	192	584	164	556	136	528	108	500	80	472	52	444	24	416	837	388	809	360
841	392	784	364	756	336	728	308	700	270	672	252	644	224	616	196	588	168	560	140	532	112	504	84	476	56	448	28	420
31	452	3	424	816	396	788	368	760	340	732	312	704	284	676	256	648	228	620	200	592	172	564	144	536	116	508	59	480
91	512	63	484	35	456	7	428	820	400	792	372	764	344	736	316	708	288	680	260	652	232	624	175	596	147	568	119	540
151	572	123	544	95	516	67	488	39	460	11	432	824	404	796	376	768	348	740	291	712	263	684	235	656	207	628	179	600
211	632	183	604	155	576	127	548	99	520	71	492	43	464	15	407	828	379	800	351	772	323	744	295	716	267	688	239	660
271	692	243	664	215	636	187	608	159	580	131	523	103	495	75	467	47	439	19	411	832	383	804	355	776	327	748	299	720
331	752	303	724	275	696	247	639	219	611	191	583	163	555	135	527	107	499	79	471	51	443	23	415	836	387	808	359	780
391	812	363	755	335	727	307	699	279	671	251	643	223	615	195	587	167	559	139	531	111	503	83	475	55	447	27	419	840
451	2	423	815	395	787	367	759	339	731	311	703	283	675	255	647	227	619	199	591	171	563	143	535	115	507	87	479	30
511	62	483	34	455	6	427	819	399	791	371	763	343	735	315	707	287	679	259	651	231	623	203	595	146	567	118	539	90
571	122	543	94	515	66	487	38	459	10	431	823	403	795	375	767	347	739	319	711	262	683	234	655	206	627	178	599	150
631	182	603	154	575	126	547	98	519	70	491	42	463	14	435	827	378	799	350	771	322	743	294	715	266	687	238	659	210
691	242	663	214	635	186	607	158	579	130	551	102	494	74	466	46	438	18	410	831	382	803	354	775	326	747	298	719	270
751	302	723	274	695	246	667	218	610	190	582	162	554	134	526	106	498	78	470	50	442	22	414	835	386	807	358	779	330
811	362	783	334	726	306	698	278	670	240	642	222	614	194	586	166	558	138	530	110	502	82	474	54	446	26	418	839	390

②

1	422	814	394	786	366	758	338	730	310	702	282	674	254	646	226	648	198	590	170	562	142	534	114	506	86	478	58	450
121	542	93	514	65	486	37	458	9	430	822	402	794	374	766	346	738	318	710	290	682	233	654	205	626	177	598	149	570
241	662	213	634	185	606	157	578	129	550	101	522	73	465	45	437	17	409	830	381	802	353	774	325	746	297	718	269	690
361	782	333	754	305	697	277	669	249	641	221	613	193	585	165	557	137	529	109	501	81	473	53	445	25	417	838	389	810
481	32	453	4	425	817	397	789	369	761	341	733	313	705	285	677	257	649	229	621	201	593	173	565	145	537	88	509	60
601	152	573	124	545	96	517	68	489	40	461	12	433	825	405	797	377	769	320	741	292	713	264	685	236	657	208	629	180
721	272	693	244	665	216	637	188	609	160	552	132	524	104	496	76	468	48	440	20	412	833	384	805	356	777	328	749	300
841	392	784	364	756	336	728	308	700	270	672	252	644	224	616	196	588	168	560	140	532	112	504	84	476	56	448	28	420
91	512	63	484	35	456	7	428	820	400	792	372	764	344	736	316	708	288	680	260	652	232	624	175	596	147	568	119	540
211	632	183	604	155	576	127	548	99	520	71	492	43	464	15	407	828	379	800	351	772	323	744	295	716	267	688	239	660
331	752	303	724	275	696	247	639	219	611	191	583	163	555	135	527	107	499	79	471	51	443	23	415	836	387	808	359	780
451	2	423	815	395	787	367	759	339	731	311	703	283	675	255	647	227	619	199	591	171	563	143	535	115	507	87	479	30
571	122	543	94	515	66	487	38	459	10	431	823	403	795	375	767	347	739	319	711	262	683	234	655	206	627	178	599	150
691	242	663	214	635	186	607	158	579	130	551	102	494	74	466	46	438	18	410	831	382	803	354	775	326	747	298	719	270
811	362	783	334	726	306	698	278	670	240	642	222	614	194	586	166	558	138	530	110	502	82	474	54	446	26	418	839	390
61	482	33	454	5	426	818	398	790	370	762	342	734	314	706	286	678	258	650	230	622	202	594	174	566	117	538	89	510
181	602	153	574	125	546	97	518	69	490	41	462	13	434	826	406	798	349	770	321	742	293	714	265	686	237	658	209	630
301	722	273	694	245	666	217	638	189	581	161	553	133	525	105	497	77	469	49	441	21	413	834	385	806	357	778	329	750
421	813	393	785	365	757	337	729	309	701	281	673	253	645	225	617	197	589	169	561	141	533	113	505	85	477	57	449	29
541	92	513	64	485	36	457	8	429	821	401	793	373	765	345	737	317	709	289	681	261	653	204	625	176	597	148	569	120
661	212	633	184	605	156	577	128	549	100	521	72	493	44	436	16	408	829	380	801	352	773	324	745	296	717	268	689	240
781	332	753	304	725	276	668	248	640	210	612	192	584	164	556	136	528	108	500	80	472	52	444	24	416	837	388	809	360
31	452	3	424	816	396	788	368	760	340	732	312	704	284	676	256	648	228	620	200	592	172	564	144	536	116	508	59	480
151	572	123	544	95	516	67	488	39	460	11	432	824	404	796	376	768	348	740	291	712	263	684	235	656	207	628	179	600
271	692	243	664	215	636	187	608	159	580	131	523	103	495	75	467	47	439	19	411	832	383	804	355	776	327	748	299	720
391	812	363	755	335	727	307	699	279	671	251	643	223	615	195	587	167	559	139	531	111	503	83	475	55	447	27	419	840
511	62	483	34	455	6	427	819	399	791	371	763	343	735	315	707	287	679	259	651	231	623	203	595	146	567	118	539	90
631	182	603	154	575	126	547	98	519	70	491	42	463	14	435	827	378	799	350	771	322	743	294	715	266	687	238	659	210
751	302	723	274	695	246	667	218	610	190	582	162	554	134	526	106	498	78	470	50	442	22	414	835	386	807	358	779	330

③

1	422	814	394	786	366	758	338	730	310	702	282	674	254	646	226	648	198	590	170	562	142	534	114	506	86	478	58	450
241	662	213	634	185	606	157	578	129	550	101	522	73	465	45	437	17	409	830	381	802	353	774	325	746	297	718	269	690
481	32	453	4	425	817	397	789	369	761	341	733	313	705	285	677	257	649	229	621	201	593	173	565	145	537	88	509	60
721	272	693	244	665	216	637	188	609	160	552	132	524	104	496	76	468	48	440	20	412	833	384	805	356	777	328	749	300
91	512	63	484	35	456	7	428	820	400	792	372	764	344	736	316	708	288	680	260	652	232	624	175	596	147	568	119	540
331	752	303	724	275	696	247	639	219	611	191	583	163	555	135	527	107	499	79	471	51	443	23	415	836	387	808	359	780
571	122	543	94	515	66	487	38	459	10	431	823	403	795	375	767	347	739	319	711	262	683	234	655	206	627	178	599	150
811	362	783	334	726	306	698	278	670	240	642	222	614	194	586	166	558	138	530	110	502	82	474	54	446	26	418	839	390
181	602	153	574	125	546	97	518	69	490	41	462	13	434	826	406	798	349	770	321	742	293	714	265	686	237	658	209	630
421	813	393	785	365	757	337	729	309	701	281	673	253	645	225	617	197	589	169	561	141	533	113	505	85	477	57	449	29
661	212	633	184	605	156	577	128	549	100	521	72	493	44	436	16	408	829	380	801	352	773	324	745	296	717	268	689	240
31	452	3	424	816	396	788	368	760	340	732	312	704	284	676	256	648	228	620	200	592	172	564	144	536	116	508	59	480
271	692	243	664	215	636	187	608	159	580	131	523	103	495	75	467	47	439	19	411	832	383	804	355	776	327	748	299	720
511	62	483	34	455	6	427	819	399	791	371	763	343	735	315	707	287	679	259	651	231	623	203	595	146	567	118	539	90
751	302	723	274	695	246	667	218	610	190	582	162	554	134	526	106	498	78	470	50	442	22	414	835	386	807	358	779	330
121	542	93	514	65	486	37	458	9	430	822	402	794	374	766	346	738	318	710	290	682	233	654	205	626	177	598	149	570
361	782	333	754	305	697	277	669	249	641	221	613	193	585	165	557	137	529	109	501	81	473	53	445	25	417	838	389	810
601	152	573	124	545	96	517	68	489	40	461	12	433	825	405	797	377	769	320	741	292	713	264	685	236	657	208	629	180
841	392	784	364	756	336	728	308	700	270	672	252	644	224	616	196	588	168	560	140	532	112	504	84	476	56	448	28	420
211	632	183	604	155	576	127	548	99	520	71	492	43	464	15	407	828	379	800	351	772	323	744	295	716	267	688	239	660
451	2	423	815	395	787	367	759	339	731	311	703	283	675	255	647	227	619	199	591	171	563	143	535	115	507	87	479	30
691	242	663	214	635	186	607	158	579	130	551	102	494	74	466	46	438	18	410	831	382	803	354	775	326	747	298	719	270
61	482	33	454	5	426	818	398	790	370	762	342	734	314	706	286	678	258	650	230	622	202	594	174	566	117	538	89	510
301	722	273	694	245	666	217	638	189	581	161	553	133	525	105	497	77	469	49	441	21	413	834	385	806	357	778	329	750
541	92	513	64	485	36	457	8	429	821	401	793	373	765	345	737	317	709	289	681	261	653	204	625	176	597	148	569	120
781	332	753	304	725	276	668	248	640	210	612	192	584	164	556	136	528	108	500	80	472	52	444	24	416	837	388	809	360
151	572	123	544	95	516	67	488	39	460	11	432	824	404	796	376	768	348	740	291	712	263	684	235	656	207	628	179	600
391	812	363	755	335	727	307	699	279	671	251	643	223	615	195	587	167	559	139	531	111	503	83	475	55	447	27	419	840
631	182	603	154	575	126	547	98	519	70	491	42	463	14	435	827	378	799	350	771	322	743	294	715	266	687	238	659	210

④

第 5 章　完美幻方之运算

一、完美幻方的线性运算

定理 1　设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{F}$, $i,j=1,2,3,\cdots,n$．分别是幻和为 Σ_A, Σ_B 的 n 阶完美幻方. $\mathbf{F}$ 是不同自然数组成的集合. λ_1, λ_2 是任意整常数，且 $\lambda_1 a_{ij}+\lambda_2 b_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 n^2 个互不相同的整数. 则

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B=(\lambda_1 a_{ij}+\lambda_2 b_{ij}) \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

也是 n 阶完美幻方. 其幻和

$$\Sigma \lambda_{1A+\lambda_2 B}=\lambda_1 \Sigma_A+\lambda_2 \Sigma_B. \tag{2}$$

证明　由矩阵的线性运算知

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B=(\lambda_1 a_{ij}+\lambda_2 b_{ij})=\lambda_1(a_{ij})+\lambda_2(b_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$\lambda_1 a_{ij}+\lambda_2 b_{ij}$ 是互不相同的自然数，且 $\lambda_1 A+\lambda_2 B$ 的各行、各列、各对角线元素之和是相应的 A, B 的各行、各列、各对角线上元素之和分别乘 λ_1、λ_2 后相加而得. 因此，$\lambda_1 A+\lambda_2 B$ 是幻和为 $\lambda_1 \Sigma_A+\lambda_2 \Sigma_B$ 的 n 阶完美幻方.

定理 2　设 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in \mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$．$i,j=1,2,3,\cdots,n$ 是幻和为 Σ_A 的完美幻方. 用等差数列:

$$b,\ b+d,\ b+2d,\cdots,\ b+(a_{ij}-1)d,\cdots,b+(n^2-1)d \tag{3}$$

替代 A 对应元素: $1,2,3,\cdots,a_{ij},\cdots,n^2$ (b,d 是常数). 则

$$[b+(a_{ij}-1)d]=(b-d)+dA \tag{4}$$

也是 n 阶完美幻方. 其幻和为

$$\Sigma[b+(a_{ij}-1)d]=(b-d)\,n+d\Sigma A. \tag{5}$$

证明　略

例 1

$A+B=$

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	6

$+$

1	14	7	12
8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6

$=$

2	26	13	27
16	24	5	23
21	7	32	8
29	11	18	10

$\Sigma=68.$　(6)

例 2　设

$A=$

1	14	22	10	18
7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12

$\Sigma=65.$

$$3A = \begin{array}{|ccccc|} 3 & 42 & 66 & 30 & 54 \\ 21 & 60 & 9 & 33 & 72 \\ 39 & 63 & 27 & 51 & 15 \\ 57 & 6 & 45 & 69 & 18 \\ 75 & 24 & 48 & 12 & 36 \end{array} \quad \Sigma=195, \qquad 5A = \begin{array}{|ccccc|} 5 & 70 & 110 & 50 & 90 \\ 35 & 100 & 15 & 55 & 120 \\ 65 & 105 & 45 & 85 & 25 \\ 95 & 10 & 75 & 115 & 30 \\ 125 & 40 & 80 & 20 & 60 \end{array} \quad \Sigma=325. \tag{7}$$

$$A+5^2 = \begin{array}{|ccccc|} 26 & 39 & 47 & 35 & 43 \\ 32 & 45 & 28 & 36 & 49 \\ 38 & 46 & 34 & 42 & 30 \\ 44 & 27 & 40 & 48 & 31 \\ 50 & 33 & 41 & 29 & 37 \end{array} \quad \Sigma=190, \qquad A+2\times5^2 = \begin{array}{|ccccc|} 51 & 64 & 72 & 60 & 68 \\ 57 & 70 & 53 & 61 & 74 \\ 63 & 71 & 59 & 67 & 55 \\ 69 & 52 & 65 & 73 & 56 \\ 75 & 58 & 66 & 54 & 62 \end{array} \quad \Sigma=315. \tag{8}$$

例 3　一个由素数组成的 5 阶完美幻方. 由素数:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 47 & 73 & 157 \\ 11 & 13 & 53 & 79 & 163 \\ 29 & 31 & 71 & 97 & 181 \\ 41 & 43 & 83 & 109 & 193 \\ 59 & 61 & 101 & 127 & 211 \end{array} \rightarrow C = \begin{array}{|ccccc|} 5 & 97 & 61 & 163 & 83 \\ 13 & 193 & 47 & 29 & 127 \\ 71 & 59 & 79 & 43 & 157 \\ 109 & 7 & 181 & 101 & 11 \\ 211 & 53 & 41 & 73 & 31 \end{array} \tag{9}$$

$$\Sigma = 409.$$

这些完美幻方虽然都不是由连续的自然数组成的, 但都具有明显的等差性. 如(6)之

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 8 & 11 & 13 & 16 \\ 18 & 21 & 23 & 26 \\ 24 & 27 & 29 & 32 \end{array} \tag{10}$$

相邻行或相邻列各对数之差都是相等的, (9)也是如此. 因此, 在组成完美幻方的所有数构成的分段方中, 分段方的相邻行或相邻列之差总是相等的. 但不同行或列间的差距可以是不等的. 这大概是构作完美幻方最起码的必要条件. 本章最主要的内容是证明下节完美幻方的乘法定理.

二、乘法定理

由低阶的完美幻方如何生成更高阶的完美幻方? 这些新产生的高阶完美幻方是否具有指定的性质? 我们将要进行的就是这种讨论. 首先讨论完美幻方的合成, 然后给出完美幻方的乘法定理.

设 $A=(a_{ij}), a_{ij}=1,2,3,\cdots,p^2$, $i,j=1,2,3,\cdots,p$ 幻和为 Σ_p 的 p 阶完美幻方;

$B=(b_{kh}), b_{kh}=1,2,3,\cdots,q^2$, $k,h=1,2,\cdots,q$ 是幻和为 Σ_q 的 q 阶完美幻方.

令

$$b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2 \qquad (b_{kh}=1,2,\ldots,q^2;\ k,h=1,2,\cdots,q;\ a_{ij}=1,2,\cdots,p^2;\ i,j=1,2,\cdots,p) \tag{11}$$

随着 a_{ij}, b_{kh} 取不同之值, (6)式给出 $(pq)^2$ 个连续的自然数: $1,2,3,\cdots,(pq)^2$. 现在对这 $(pq)^2$ 个数进行分组.

1. 固定 a_{ij},变动 b_{kh}.

这时$(pq)^2$个数分成p^2个组，每组q^2个数. 把q^2 个数按完美幻方 $\boldsymbol{B}=(b_{kh})$的安排取代 b_{kh}，得

$$\boldsymbol{B}_{ij}=(b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2)=\boldsymbol{B}+(A_{ij}-1)q^2$$
$$(a_{ij}=1,2,\cdots,p^2;\ i,j=1,2,\cdots,p). \tag{12}$$

$\boldsymbol{B}_{ij}$也是 q 阶完美幻方，其幻和为

$$\Sigma_{\boldsymbol{B}ij}=\Sigma_{ij}=\Sigma_q+(a_{ij}-1)q\cdot q^2$$
$$=\Sigma_q+(a_{ij}-1)q^3 \qquad (i,j=1,2,\cdots,p). \tag{13}$$

用 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 取代完美幻方 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中的 a_{ij}，得一个(pq)阶数字方阵:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=A(\boldsymbol{B}_{ij})=\begin{array}{|cccc|}\hline \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1p}\\ \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \boldsymbol{B}_{p1} & \boldsymbol{B}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{pp}\\ \hline\end{array} \tag{14}$$

各 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 称为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的因子完美幻方.

2. 固定 b_{kh}, 变动 a_{ij}

这时将$(pq)^2$个数分成q^2组，每组p^2个数. 把p^2个数取代 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$中的p^2个数得

$$\boldsymbol{A}°_{kh}=[b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2]=b_{kh}+(A-1)q^2$$
$$(b_{kh}=1,2,\cdots,q^2;\ k,h=1,2,\cdots,q). \tag{15}$$

$\boldsymbol{A}°_{kh}$ 是以 b_{kh} 为首项，公差 q^2 的等差数列组成的 p 阶完美幻方. 其幻和

$$\Sigma_{kh}=\Sigma\boldsymbol{A}°_{kh}=pb_{kh}-(\Sigma_p-p)q^2$$
$$=q^2\Sigma_p-p(q^2-b_{kh}) \quad (k,h=1,2,\cdots,q). \tag{16}$$

用 q^2 个完美幻方 $\boldsymbol{A}°_{kh}$ 取代 $\boldsymbol{B}=(b_{kh})$中的 b_{kh} ,得一个(pq)阶数字方阵

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°=B(\boldsymbol{A}°_{kh})=\begin{array}{|cccc|}\hline \boldsymbol{A}°_{11} & \boldsymbol{A}°_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}°_{1q}\\ \boldsymbol{A}°_{21} & \boldsymbol{A}°_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}°_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \boldsymbol{A}°_{q1} & \boldsymbol{A}°_{q2} & \cdots & \boldsymbol{A}°_{qq}\\ \hline\end{array} \tag{17}$$

各 $\boldsymbol{A}°_{ij}$ 称为 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°$ 的因子完美幻方.

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 都称为完美幻方 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积. pq 级排列

$$\pi=(1,2,3,\cdots,pq),$$

有因子循环排列:

$$\pi_p=(1,p+1,2p+1,\cdots,(q-1)p+1;2,p+2,\cdots,(q-1)p+2;\cdots;p,2p,\cdots,qp);$$
$$\pi_q=(1,q+1,2q+1,\cdots,(p-1)q+1;\ 2,q+2,\cdots,(p-1)q+2;\cdots;\ q,2q,\cdots,pq). \tag{18}$$

定理 3　pq 阶方阵 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°$之间有关系:

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°=\pi_p(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\pi_p,\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\pi_q(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°)\pi_q\ . \tag{19}$$

证明　由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 变成 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°$，实际是把 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 中各因子完美幻方 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的处于同一位置的元素: $b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2$ 集中起来，按它们在 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 中的相对位置，即按 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的安排布置成 p 阶方阵. 从而得 $b_{kh}+(A-1)q^2$. 此为 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°$ 的因子完美幻方，从而得到 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°$. 此种变换就是对 pq 阶方阵 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的行、列均按因子循环排列π_p 重排. 因而有 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°=\pi_p(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\pi_p$. 同理有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\pi_q(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}°)\pi_q$.

对称地，令

$$a_{ij}+(b_{kh}-1)p^2 \qquad (a_{ij}=1,2,\cdots,p^2;\ i,j=1,2,\cdots,p;$$

$$b_{kh}=1,2,\cdots,q^2;\ k,h=1,2,\cdots,q). \tag{20}$$

1. 固定 b_{kh}, 变动 a_{ij}. 得

$$A_{kh}=(a_{ij}+(b_{kh}-1)p^2)=A+(b_{kh}-1)p^2$$
$$(b_{kh}=1,2,\cdots,q^2;\ k,h=1,2,\cdots,q). \tag{21}$$

2. 固定 a_{ij}, 变动 b_{kh}. 得

$$B^{\circ}_{ij}=(a_{ij}+(b_{kh}-1)p^2)=a_{ij}+(B-1)p^2$$
$$(a_{ij}=1,2,\cdots,p^2;\ i,j=1,2,\cdots,p). \tag{22}$$

从而又有

$$B\times A = B(A_{kh})=\begin{array}{|cccc|}\hline A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qq}\\ \hline\end{array} \tag{23}$$

$$A\times B^{\circ} = A(B^{\circ}_{ij})=\begin{array}{|cccc|}\hline B^{\circ}_{11} & B^{\circ}_{12} & \cdots & B^{\circ}_{1p}\\ B^{\circ}_{21} & B^{\circ}_{22} & \cdots & B^{\circ}_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B^{\circ}_{p1} & B^{\circ}_{p2} & \cdots & B^{\circ}_{pp}\\ \hline\end{array} \tag{24}$$

各 A_{kh}, B°_{ij} 分别是 $B\times A$, $A\times B^{\circ}$的因子完美幻方. $A\times B$, $B^{\circ}\times A$ 之间有关系:

$$A\times B^{\circ}=\pi_q(B\times A)\pi_q.$$
$$B\times A=\pi_p(A\times B^{\circ})\pi_p. \tag{25}$$

定理 4 设 A,B 分别是如前所诉 p, q 阶完美幻方. 则

$$A\times B,\ B\times A^{\circ},\ B\times A,\ A\times B^{\circ} \tag{26}$$

都是 pq 阶完美幻方, 其幻和都是

$$\sum{}_{pq}=\frac{pq(p^2q^2+1)}{2}. \tag{27}$$

证明 只需对 $A\times B$, $B\times A^{\circ}$ 证明即可. 因为各 $B_{ij}=B+(a_{ij}-1)q$, $i,j=1,2,3,\cdots,p$ 都是 q 阶完美幻方, 其幻和为 $\Sigma_{ij}=\Sigma_{B_{ij}}=\Sigma_q+(a_{ij}-1)q^3$. 又因 $A=(a_{ij})$是 p 阶完美幻方. 故 $A\times B=(B_{ij})$之各行、各列元素之和分别是

$$\sum{}_{A\times B}=p\sum{}_q+q^3\left(\sum{}_q-p\right)=p\frac{q(q^2+1)}{2}+q^3\left(\frac{p(p^2+1)}{2}-p\right)$$
$$=\frac{pq(p^2q^2+1)}{2}=\sum{}_{pq}.$$

同理, $B\times A^{\circ}$之各行, 各列元素之和也都分别是Σ_{pq}.

$A\times B$, $B\times A^{\circ}$各对角线上元素之和的计算稍复杂些. 分别说明如下:

(1) 若对角线上元素全由各因子完美幻方 A_{ij}, B_{kh}之主对角线元素组成, 则由 A, B 之完美性, 易知这些对角线元素和都等于Σ_{pq}. 这些对角线是

$A\times B$ 之第 $1, q+1, 2q+1,\cdots,(p-1)q+1$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线;

$B\times A$ 之第 $1, p+1, 2p+1,\cdots,(q-1)p+1$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线.

(2) $A\times B$ 之第 $1,2,3,\cdots,q$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线就是 $B\times A^{\circ}$ 之第 $1,p+1,\ 2p+1,\cdots,(q-1)p+1$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线. 同样, $B\times A^{\circ}$之第 $1,2,3,\cdots,p$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线就是 $A\times B$ 之第 $1,q+1,2q+1,\cdots,(p-1)q+1$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线. 因此, 这些对角线上元素之和也是Σ_{pq}.

(3) 对 $A\times B$, $B\times A^{\circ}$之其余对角线. 可先对 A, B 进行列的轮回, 再作乘积: $AP\times B$, $BP\times A$. 这就分别把 $A\times B$, $B\times A^{\circ}$之第 2 组, 第 $q+1,q+2,\cdots,2q$ 条第Ⅰ(Ⅱ)对角线同构地变成 $A\times B$ 之第 $1,2,\cdots,q$ 条对角线. 从而如前获证.

对 A 先执行列轮回, 再乘以 B, 有关系:

$$AP\times B=(A\times B)P^{q} \tag{28}$$

其对角线之变化如下:

	A	→	AP
Ⅰ	$(1,2,\cdots,p)$		$(p,1,2,\cdots,p-1)$
Ⅱ	$(1,2,\cdots,p)$		$(2,3,4,\cdots,p,1)$
	$A\times B$	→	$AP\times B$
Ⅰ	(①,②,⋯, ⓟ)		(ⓟ,①,②,⋯, ⓟ−1)
Ⅱ	(①,②,⋯, ⓟ)		(②,③,⋯, ⓟ,①)

这里①:$[(i-1)q+1,(i-1)q+2,\cdots,iq]$

推论 若 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in \mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$, $i,j=1,2,3,\cdots,n$ 是 n 阶完美幻方. 则 $A\times A$, $A\times A^{\circ}$是 n^2 阶完美幻方, 且此二方互不同构.

定理 5 完美幻方 A, B, C 之乘积满足结合律

$$(A\times B)\times C = A\times(B\times C). \tag{29}$$

证明 为了叙述简明, 这里省去幻方元素之双足标. 设有完美幻方

$$A=(a)\quad a=1,2,3,\cdots,p^2\quad 幻和\Sigma_p,$$
$$B=(b)\quad b=1,2,3,\cdots,q^2\quad 幻和\Sigma_q,$$
$$C=(c)\quad c=1,2,3,\cdots,r^2\quad 幻和\Sigma_r.$$

令 $A\times B=D=(d)$, $d=1,2,3,\cdots,(pq)^2$, $d=b+(a-1)q^2$,

$$幻和\Sigma_{pq}=p\Sigma_q+q^3(\Sigma_p-p).$$

$B\times C=\mathrm{E}=(e)$, $e=1,2,3,\cdots,(qr)^2$, $e=c+(b-1)r^2$,

$$幻和\Sigma_{qr}=q\Sigma_r+r^3(\Sigma_q-q).$$

其中 $A\times B$, $B\times C$ 分别是 pq, qr 阶完美幻方. 再令

$$(A\times B)\times C=D\times C=(\mathrm{X}),\ A\times(B\times C)=A\times\mathrm{E}=(\mathrm{Y}),$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{X}&=c+(d-1)r^2=c+[b+(a-1)q^2-1]r^2\\&=c+(b-1)r^2+(a-1)(qr)^2\\&=e+(a-1)(qr)^2=Y.\end{aligned}$$

而幻和

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{(A\times B)\times C}&=\sum\nolimits_{D\times C}=pq\sum\nolimits_r+r^3\left(\sum\nolimits_{pq}-pq\right)\\&=pq\sum\nolimits_r+r^3\left(p\sum\nolimits_q+q^3\left(\sum\nolimits_p-p\right)-pq\right)\\&=pq\sum\nolimits_r+r^3p\sum\nolimits_q+r^3q^3\sum\nolimits_p-pqr^3-pq^3r^3\\&=\frac{pqr(p^2q^2r^2+1)}{2}=\sum\nolimits_{pqr}.\end{aligned}$$

同理，$\Sigma_{A\times(B\times C)}=\Sigma_{A\times E}=\Sigma_{pqr}$.

所以 $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

可见，利用低阶完美幻方通过完美幻方的乘法定理可以构造出许多的高阶完美幻方.

例如对 $n=$：

$16=4\times4,\quad 20=4\times5,\quad 25=5\times5,$

$28=4\times7,\quad 35=5\times7,\quad 64=4\times4\times4,$

$80=4\times4\times5,\quad 100=4\times5\times5,\cdots$

由于完美幻方的乘法满足结合律，却不满足交换律. 又由于低阶完美幻方的选择性可以有很多. 从而由低阶完美幻方可构造出许多虽然同阶但又互不同构的高阶完美幻方.

例如，由 4 阶的 $\boldsymbol{A}$, 5 阶的 $\boldsymbol{B}$, 通过乘法定理可构造 100 阶完美幻方，如:

$$A\times(B\times B),\ (A\times B)\times B,\ (B\times A)\times B,\ B\times(B\times A)\ \cdots$$

3. 例.

例 1　已知有 4 阶完美幻方:

A_1

1	14	7	12
8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6

A_2

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

A_3

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

PA_1　$\Sigma_4=34$

8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6
1	14	7	12

(30)

下面分别给出 $A\times A$, $A\times A^{o}$ 等.

1. $n=16=4\times4$ 阶，$\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,256\}$，$\Sigma_{16}=2056$.

$A_1\times A_1$

1	**14**	**7**	**12**	209	222	215	220	97	110	103	108	177	190	183	188
8	**11**	**2**	**13**	216	219	210	221	104	107	98	109	184	187	178	189
10	**5**	**16**	**3**	218	213	224	211	106	101	112	99	186	181	192	179
15	**4**	**9**	**6**	223	212	217	214	111	100	105	102	191	180	185	182
113	126	119	124	**161**	**174**	**167**	**172**	17	30	23	28	193	206	199	204
120	123	114	125	**168**	**171**	**162**	**174**	24	27	18	29	200	203	194	205
122	117	128	115	**170**	**165**	**176**	**163**	24	21	32	19	202	197	208	195
127	116	121	118	**175**	**164**	**169**	**166**	31	20	25	22	207	196	201	198
145	158	151	156	65	78	71	76	**241**	**254**	**249**	**252**	33	46	39	44
152	155	146	157	72	75	66	77	**248**	**251**	**242**	**253**	40	43	34	45
154	149	160	147	74	69	80	67	**250**	**245**	**256**	**243**	42	37	48	35
159	148	153	150	79	68	73	70	**255**	**244**	**249**	**246**	47	36	41	38
225	238	231	236	49	62	55	60	129	142	135	140	**81**	**94**	**87**	**92**
232	235	226	237	56	59	50	61	136	139	130	141	**88**	**91**	**82**	**93**
234	229	240	227	58	53	64	51	138	133	144	131	**90**	**85**	**96**	**83**
239	228	233	230	63	52	57	54	143	132	137	134	**95**	**84**	**89**	**86**

$A_1 \times A_1{}^{\circ}$

1	207	97	177	**14**	222	110	190	**7**	215	103	183	**12**	220	108	188
113	**161**	17	193	126	**174**	30	206	119	**167**	23	199	124	**172**	28	204
145	65	**241**	33	158	78	**254**	46	151	71	**247**	39	156	76	**252**	44
225	49	129	**81**	238	62	142	**94**	231	55	135	**87**	236	60	140	**92**
8	216	104	184	**11**	219	107	187	**2**	210	98	178	**13**	221	109	189
120	**168**	24	200	123	**171**	27	203	114	**162**	18	194	125	**173**	29	205
152	72	**248**	40	155	75	**251**	43	146	66	**242**	34	157	77	**253**	45
232	56	136	**88**	235	59	139	**91**	226	50	130	**82**	237	61	141	**93**
10	218	106	186	**5**	213	101	181	**16**	224	112	192	**3**	211	99	179
122	**170**	26	202	117	**165**	21	197	128	**176**	32	208	115	**163**	19	195
154	74	**250**	42	149	69	**245**	37	160	80	**256**	48	147	67	**243**	35
234	58	138	**90**	229	53	133	**85**	240	64	144	**96**	227	51	131	**83**
15	223	111	191	**4**	212	100	180	**9**	217	105	185	**6**	214	102	182
127	**175**	31	227	116	**164**	20	196	121	**169**	25	201	118	**166**	22	198
159	79	**255**	47	148	68	**244**	36	153	73	**249**	41	150	70	**246**	38
239	63	143	95	228	52	132	**84**	233	57	137	**89**	230	54	134	**86**

$A_1 \times A_1$ 第 I ② 对角线: 8 5 9 124 168 165 169 76 248 245 249 140 88 85 89 188;

$A_1 \times A_1{}^{\circ}$ 第 I ⑤ 对角线: 8 168 248 88 5 165 245 85 9 169 249 89 12 172 252 92.

两条对角线有 4 对不同的元素: 124 76 140 188; 12 172 252 92. 这说明它们是不同构的. 但这 8 个数处是 $A_1 \times A_1{}^{\circ}$ 的右上角 4 阶完美幻方

12	220	108	188
124	**172**	28	204
156	76	**252**	44
236	60	140	**92**

$$\Sigma_4 = 528 \tag{31}$$

中的两条对角线, 其元素之和相等. 作行或列的轮回也可得到 16 阶完美幻方.

$P(A_1 \times A_1)$

113	126	119	124	161	174	167	172	17	30	23	28	193	206	199	204
120	123	114	125	168	171	162	174	24	27	18	29	200	203	194	205
122	117	128	115	170	165	176	163	24	21	32	19	202	197	208	195
127	116	121	118	175	164	169	166	31	20	25	22	207	196	201	198
145	158	151	156	65	78	71	76	241	254	249	252	33	46	39	44
152	155	146	157	72	75	66	77	248	251	242	253	40	43	34	45
154	149	160	147	74	69	80	67	250	245	256	243	42	37	48	35
159	148	153	150	79	68	73	70	255	244	249	246	47	36	41	38
225	238	231	236	49	62	55	60	129	142	135	140	81	94	87	92
232	235	226	237	56	59	50	61	136	139	130	141	88	91	82	93
234	229	240	227	58	53	64	51	138	133	144	131	90	85	96	83
239	228	233	230	63	52	57	54	143	132	137	134	95	84	89	86
1	14	7	12	209	222	215	220	97	110	103	108	177	190	183	188
8	11	2	13	216	219	210	221	104	107	98	109	184	187	178	189
10	5	16	3	218	213	224	211	106	101	112	99	186	181	192	179
15	4	9	6	223	212	217	214	111	100	105	102	191	180	185	182

$P(A_1 \times A_1^\circ)$

8	216	104	184	11	219	107	187	2	210	98	178	13	221	109	189
120	168	24	200	123	171	27	203	114	162	18	194	125	173	29	205
152	72	248	40	155	75	251	43	146	66	242	34	157	77	253	45
232	56	136	88	235	59	139	91	226	50	130	82	237	61	141	93
10	218	106	186	5	213	101	181	16	224	112	192	3	211	99	179
122	170	26	202	117	165	21	197	128	176	32	208	115	163	19	195
154	74	250	42	149	69	245	37	160	80	256	48	147	67	243	35
234	58	138	90	229	53	133	85	240	64	144	96	227	51	131	83
15	223	111	191	4	212	100	180	9	217	105	185	6	214	102	182
127	175	31	227	116	164	20	196	121	169	25	201	118	166	22	198
159	79	255	47	148	68	244	36	153	73	249	41	150	70	246	38
239	63	143	95	228	52	132	84	233	57	137	89	230	54	134	86
1	207	97	177	14	222	110	190	7	215	103	183	12	220	108	188
113	161	17	193	126	174	30	206	119	167	23	199	124	172	28	204
145	65	241	33	158	78	254	46	151	71	247	39	156	76	252	44
225	49	129	81	238	62	142	94	231	55	135	87	236	60	140	92

$PA_1 \times A_1^\circ$

8	11	2	13	216	219	210	221	104	107	98	109	184	187	178	189
10	5	16	3	218	213	224	211	106	101	112	99	186	181	192	179
15	4	9	6	223	212	217	214	111	100	105	102	191	180	185	182
1	14	7	12	209	222	215	220	97	110	103	108	177	190	183	188
120	123	114	125	168	171	162	174	24	27	18	29	200	203	194	205
122	117	128	115	170	165	176	163	24	21	32	19	202	197	208	195
127	116	121	118	175	164	169	166	31	20	25	22	207	196	201	198
113	126	119	124	161	174	167	172	17	30	23	28	193	206	199	204
152	155	146	157	72	75	66	77	248	251	242	253	40	43	34	45
154	149	160	147	74	69	80	67	250	245	256	243	42	37	48	35
159	148	153	150	79	68	73	70	255	244	249	246	47	36	41	38
145	158	151	156	65	78	71	76	241	254	249	252	33	46	39	44
232	235	226	237	56	59	50	61	136	139	130	141	88	91	82	93
234	229	240	227	58	53	64	51	138	133	144	131	90	85	96	83
239	228	233	230	63	52	57	54	143	132	137	134	95	84	89	86
225	238	231	236	49	62	55	60	129	142	135	140	81	94	87	92

$\Sigma_{16}=2056.$

对 A_2, A_3 可同样进行讨论. 在 $A_1 \times A_1$, $A_1 \times A_1^\circ$ 中各 4 阶方都是完美幻方, 各方的幻和又组成一个 4 阶完美幻方:

$A_1 \times A_1$

34	866	418	738
482	674	98	802
610	290	994	162
930	226	546	354

$A_1 \times A_1^\circ$

484	536	508	528
512	524	488	532
520	500	544	492
540	496	516	504

$\Sigma_4 = 2056.$ (32)

A_2

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

A_3

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

$\Sigma_4 = 34.$

$A_2 \times A_3$

1	14	4	15	177	190	180	191	81	94	84	95	225	238	228	239
8	11	5	10	184	187	181	186	88	91	85	90	232	235	229	234
13	2	16	3	189	178	192	179	93	82	96	83	237	226	240	227
12	7	9	6	188	183	185	182	92	87	89	86	236	231	233	230
113	126	116	127	193	206	196	207	33	46	36	47	145	158	148	159
120	123	117	122	200	203	197	202	40	43	37	42	152	155	149	154
125	114	128	115	205	194	208	195	45	34	48	35	157	146	160	147
124	119	121	118	204	199	201	198	44	39	41	38	156	151	153	150
161	174	164	175	17	30	20	31	241	254	244	255	65	78	68	79
168	171	165	170	24	27	21	26	248	251	245	250	72	75	69	74
173	162	176	163	29	18	32	19	253	242	256	243	77	66	80	67
172	167	169	166	28	23	25	22	252	247	249	246	76	71	73	70
209	222	212	223	97	110	100	111	129	142	132	143	49	62	52	63
216	219	213	218	104	107	101	106	136	139	133	138	56	59	53	58
221	210	224	211	109	98	112	99	141	130	144	131	61	50	64	51
220	215	217	214	108	103	105	102	140	135	137	134	60	55	57	54

$A_3 \times A_2$

1	12	6	15	209	220	214	223	49	60	54	63	225	232	230	239
8	13	3	10	216	220	211	218	56	61	51	58	232	233	227	234
11	2	16	5	219	210	224	213	59	50	64	53	235	226	240	228
14	7	9	4	222	215	217	212	62	55	57	52	238	231	233	229
113	124	118	127	161	172	166	175	65	76	70	79	145	156	150	159
120	125	115	122	168	173	163	170	72	77	67	74	152	157	147	154
123	114	128	117	171	162	176	165	75	66	80	69	155	146	160	149
126	119	121	116	174	167	169	164	78	71	73	68	158	151	153	148
193	204	198	207	17	28	22	31	241	252	246	255	33	44	38	47
200	204	195	202	24	29	19	26	248	253	243	250	40	45	35	42
203	194	208	197	27	18	32	21	251	242	256	245	43	34	48	37
206	199	201	196	30	23	25	20	254	247	249	244	46	39	41	36
177	188	182	191	97	108	102	111	129	141	134	143	81	92	86	95
184	189	179	186	104	109	99	106	136	142	131	138	88	93	83	90
187	178	192	181	107	98	112	101	139	130	144	133	91	82	96	85
190	183	185	180	110	103	105	100	142	135	137	132	94	87	89	84

$A_2 \times A_3$ 与 $A_3 \times A_2$ 是不同构的.

例 2　由 4 阶完美幻方 A_1 和 5 阶完美幻方

B

1	14	22	10	18
7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
19	2	15	23	6
25	8	16	4	12

$\Sigma_5 = 65,$ (33)

可得 $n = 4 \times 5 = 20$ 阶完美幻方, $\mathbf{F} = \{1, 2, 3, \cdots, 400\}$, $\Sigma_{20} = 4010$.

$A_1 \times B$ $\Sigma_{20} = 4010.$

1	14	22	10	18	326	339	347	335	343	151	164	172	160	168	276	289	297	285	293
7	20	3	11	24	332	345	328	336	349	157	170	153	161	174	282	295	278	286	299
13	21	9	17	5	338	346	334	342	330	163	171	159	167	155	288	296	284	292	280
19	2	15	23	6	244	327	340	348	331	169	152	165	173	156	294	277	290	298	281
25	8	16	4	12	350	333	341	329	337	175	158	166	154	162	300	283	291	279	287
176	189	197	185	193	251	264	272	260	268	26	39	47	35	43	301	314	322	310	318
182	195	178	186	199	257	270	253	261	274	32	45	28	36	49	307	320	303	311	324
188	196	184	192	180	263	271	259	267	255	38	46	34	42	34	313	321	309	317	305
194	177	190	198	181	269	252	265	273	256	44	27	40	48	31	319	302	315	323	306
200	183	191	179	187	275	258	266	253	262	50	33	41	29	37	325	308	316	304	312
226	239	247	235	243	101	114	122	110	118	376	389	397	385	393	51	64	72	60	68
232	245	228	236	249	107	120	103	111	124	382	395	378	386	399	57	70	53	61	74
238	246	234	242	230	113	121	109	117	105	388	396	384	392	380	63	71	59	67	55
244	227	240	248	231	119	102	115	123	106	394	377	390	398	381	69	52	65	73	56
250	233	241	229	237	125	108	116	104	112	400	383	391	379	387	75	58	66	54	62
351	364	372	360	368	76	89	97	85	93	201	214	222	210	218	126	139	147	135	143
357	370	353	361	374	82	95	78	86	99	207	220	203	211	224	132	145	128	136	149
363	371	359	367	355	88	96	84	92	80	213	221	209	217	205	138	146	134	142	130
369	352	365	373	356	94	77	90	98	81	219	202	215	223	206	144	127	140	148	131
375	358	366	354	362	100	83	91	79	87	225	208	216	204	212	150	133	141	129	137

$B \times A_1^{\circ}$ $\Sigma_{20} = 4010.$

1	326	151	276	14	339	164	289	22	347	172	297	10	335	160	285	18	343	168	293
176	251	26	301	189	264	39	314	197	272	47	322	185	260	35	300	193	268	43	318
226	101	376	51	239	114	389	64	247	122	397	72	235	110	385	60	243	118	391	68
351	76	201	126	364	89	214	139	372	97	222	147	360	85	210	135	369	93	218	143
7	332	157	282	20	345	170	295	3	328	153	278	11	336	161	286	24	347	155	280
182	257	32	307	195	270	45	320	178	253	28	303	186	261	36	311	199	274	49	324
232	107	382	57	245	120	395	70	238	103	378	53	236	111	386	61	249	124	399	74
357	82	207	132	370	95	220	145	353	78	203	128	361	86	211	136	374	99	204	149
13	338	163	288	21	346	171	296	9	334	159	284	17	342	167	292	5	330	155	274
188	263	38	313	196	271	46	321	184	259	34	309	192	267	42	317	180	255	30	305
238	113	388	63	246	121	396	71	234	109	384	59	242	117	392	67	230	105	380	55
363	88	213	138	371	96	221	146	359	84	209	134	367	92	217	142	355	80	205	130
19	344	169	294	2	327	152	277	15	340	165	280	23	348	173	298	6	331	156	281
194	269	44	319	177	252	27	302	190	265	40	315	198	273	48	323	181	256	31	306
244	119	394	69	227	102	377	52	240	115	390	65	248	103	398	73	231	106	381	36
369	94	219	144	352	77	222	127	365	90	215	140	373	98	223	148	356	81	206	131
25	350	175	300	8	333	158	283	16	341	166	291	4	329	154	279	12	337	162	287
200	275	50	325	183	258	33	308	191	268	41	316	179	254	29	304	187	262	37	312
250	125	400	75	233	108	383	58	241	116	391	66	229	104	379	34	237	112	387	62
375	100	225	150	358	83	208	133	366	91	216	141	350	79	204	129	362	87	212	137

各方的因子幻方也是完美幻方，其幻和也组成完美幻方如下($\Sigma = 4010$):

$A_1 \times B$

65	1690	815	1440
940	1315	190	1516
1190	565	1940	315
1815	440	1065	690

$B \times A_1^{\circ}$

354	806	838	790	822
778	830	762	794	846
802	834	786	818	770
826	758	810	842	774
850	782	814	766	798

(34)

$B \times A_1$

1	14	7	12	209	222	215	220	337	350	343	348	145	158	151	156	273	286	279	284
8	11	2	13	216	219	210	221	344	347	338	349	152	155	146	157	280	283	274	285
10	5	16	3	218	213	224	211	346	341	352	339	154	149	160	147	282	277	288	275
15	4	9	6	223	212	217	214	351	340	345	342	159	148	153	150	287	276	281	278
97	110	103	108	305	318	311	316	33	46	39	44	161	174	167	172	369	382	375	380
104	107	98	109	312	315	306	317	40	43	34	45	168	171	162	173	376	379	370	381
106	101	112	99	314	309	320	307	42	37	48	35	170	165	176	163	378	373	384	371
111	100	105	102	319	308	313	310	47	36	41	38	175	164	169	166	383	372	377	374
193	206	199	204	321	334	327	332	129	142	135	140	257	270	263	268	65	78	71	76
200	203	194	205	328	331	322	333	126	139	130	141	264	267	258	269	72	75	66	77
202	197	208	195	330	325	336	323	138	133	144	131	266	261	272	259	74	69	80	67
207	196	201	198	335	324	329	326	143	132	137	134	271	260	265	262	79	68	73	70
289	302	295	300	17	30	23	28	225	238	231	236	353	366	359	364	81	94	87	92
296	299	290	301	24	27	18	29	232	235	226	237	360	363	354	365	88	91	82	93
298	293	304	291	26	21	32	19	234	229	240	227	362	357	368	355	90	85	96	83
303	292	297	294	31	20	25	22	239	228	233	230	367	356	361	358	95	84	89	86
385	398	391	396	113	126	119	124	241	254	247	252	49	62	55	60	177	190	183	188
392	395	386	397	120	123	114	15	248	251	242	253	56	59	50	61	184	187	178	189
394	389	400	387	122	117	128	115	250	245	256	243	58	53	64	51	186	181	192	179
399	388	393	390	127	116	121	118	255	244	249	246	63	52	57	54	191	180	185	182

$A_1 \times B^o$

1	209	337	145	273	14	222	350	158	286	7	215	343	151	279	12	220	348	156	284
97	305	33	161	369	110	318	46	174	382	103	311	39	167	375	108	316	44	172	380
193	321	129	257	65	206	334	142	270	78	199	327	135	263	71	204	332	140	268	76
289	17	225	353	81	302	30	238	366	94	295	23	231	359	87	300	28	236	364	92
385	113	241	49	177	398	126	254	62	190	391	119	247	55	183	396	124	252	60	188
8	216	344	152	280	11	219	347	155	283	2	210	338	146	274	13	221	349	157	285
104	312	40	168	367	107	315	43	171	379	98	306	34	162	370	109	317	45	173	381
200	328	126	264	72	203	331	139	267	75	194	322	130	258	66	205	333	141	269	77
296	24	232	360	88	299	27	235	363	91	290	18	226	354	82	301	29	237	365	93
392	120	248	56	184	395	123	251	59	187	386	114	242	50	178	397	125	253	61	189
10	218	346	154	282	5	213	341	149	277	16	224	352	160	288	3	211	339	147	275
106	314	42	170	378	101	309	37	165	373	112	320	48	176	384	99	307	35	163	371
202	330	138	266	74	197	325	133	261	69	208	336	144	272	80	195	323	131	259	67
298	26	234	362	90	293	21	229	357	85	304	32	240	368	96	291	19	227	355	83
394	122	250	58	186	389	117	245	53	181	400	128	256	64	192	387	115	243	51	179
15	223	351	159	287	4	212	340	148	276	9	217	345	153	281	6	214	342	150	278
111	319	47	175	383	100	308	36	164	372	105	313	41	169	377	102	310	38	166	374
207	335	143	271	79	196	324	132	260	68	201	329	137	265	73	198	326	134	262	70
303	31	239	367	95	292	20	228	356	84	297	25	233	361	89	294	22	230	358	86
399	127	255	63	191	388	116	244	52	180	393	121	249	57	185	390	118	246	54	182

各方之因子幻方也是完美幻方，其幻和也组成完美幻方如下($\Sigma = 4010$):

$B \times A_1$

34	866	1378	610	1122
418	1250	162	674	1506
802	1314	546	1058	290
1186	98	930	1442	354
1570	482	994	226	738

$A_1 \times B^o$

965	1030	995	1020
1000	1015	970	1025
1010	985	1040	975
1035	980	1005	990

(35)

$P^A(B\times A_1)=PB\times A_1$ $\Sigma_{20}=4010.$

97	110	103	108	305	318	311	316	33	46	39	44	161	174	167	172	369	382	375	380
104	107	98	109	312	315	306	317	40	43	34	45	168	171	162	173	376	379	370	381
106	101	112	99	314	309	320	307	42	37	48	35	170	165	176	163	378	373	384	371
111	100	105	102	319	308	313	310	47	36	41	38	175	164	169	166	383	372	377	374
193	206	199	204	321	334	327	332	129	142	135	140	257	270	263	268	65	78	71	76
200	203	194	205	328	331	322	333	136	139	130	141	264	267	258	269	72	75	66	77
202	197	208	195	330	325	336	323	138	133	144	131	266	261	272	259	74	69	80	67
207	196	201	198	335	324	329	326	143	132	137	134	271	260	265	262	79	68	73	70
289	302	295	300	17	30	23	28	225	238	231	236	353	366	359	364	81	94	87	92
296	299	290	301	24	27	18	29	232	235	226	237	360	363	354	365	88	91	82	93
298	293	304	291	26	21	32	19	234	229	240	227	362	357	368	355	90	85	96	83
303	292	297	294	31	20	25	22	239	228	233	230	367	356	361	358	95	84	89	86
385	398	391	396	113	126	119	124	241	254	247	252	49	62	55	60	177	190	183	188
392	395	386	397	120	123	114	15	248	251	242	253	56	59	50	61	184	187	178	189
394	389	400	387	122	117	128	115	250	245	256	243	58	53	64	51	186	181	192	179
399	388	393	390	127	116	121	118	255	244	249	246	63	52	57	54	191	180	185	182
1	14	7	12	209	222	215	220	337	350	343	348	145	158	151	156	273	286	279	284
8	11	2	13	216	219	210	221	344	347	338	349	152	155	146	157	280	283	274	285
10	5	16	3	218	213	224	211	346	341	352	339	154	149	160	147	282	277	288	275
15	4	9	6	223	212	217	214	351	340	345	342	159	148	153	150	287	276	281	278

$A_1\times PB^{o}$ $\Sigma_{20}=4010.$

97	305	33	161	369	110	318	46	174	382	103	311	39	167	375	108	316	44	172	380
193	321	129	257	65	206	334	142	270	78	199	327	135	263	71	204	332	140	268	76
289	17	225	353	81	302	30	238	366	94	295	23	231	359	87	300	28	236	364	92
385	113	241	49	177	398	126	254	62	190	391	119	247	55	183	396	124	252	60	188
1	209	337	145	273	14	222	350	158	286	7	215	343	151	279	12	220	348	156	284
104	312	40	168	376	107	315	43	171	379	98	306	34	162	370	109	317	45	173	381
200	328	136	264	72	203	331	139	267	75	194	322	130	258	66	205	333	141	269	77
296	24	232	360	88	299	27	235	363	91	290	18	226	354	82	301	29	237	365	93
392	120	248	56	184	395	123	251	59	187	386	114	242	50	178	397	125	253	61	189
8	216	344	152	280	11	219	347	155	283	2	210	338	146	274	13	221	349	157	285
106	314	42	170	378	101	309	37	165	373	112	320	48	176	384	99	307	35	163	371
202	330	138	266	74	197	325	133	261	69	208	336	144	272	80	195	323	131	259	67
298	26	234	362	90	293	21	229	357	85	304	32	240	368	96	291	19	227	355	83
394	122	250	58	186	389	117	245	53	181	400	128	256	64	192	387	115	243	51	179
10	218	346	154	282	5	213	341	149	277	16	224	352	160	288	3	211	339	147	275
111	319	47	175	383	100	308	36	164	372	105	313	41	169	377	102	310	38	166	374
207	335	143	271	79	196	324	132	260	68	201	329	137	265	73	198	326	134	262	70
303	31	239	367	95	292	20	228	356	84	297	25	233	361	89	294	22	230	358	86
399	127	255	63	191	388	116	244	52	180	393	121	249	57	185	390	118	246	54	182
15	223	351	159	287	4	21	340	148	276	9	217	345	153	281	6	214	342	150	278

各方之因子幻方也是完美幻方，其幻和也组成完美幻方如下($\Sigma = 4010$)：

$PB \times A_1$

418	1250	162	674	1506
802	1314	546	1058	290
1186	98	930	1442	354
1570	482	994	226	738
34	866	1378	610	1122

$A_1 \times PB^{o}$

965	1030	995	1020
1000	1015	970	1025
1010	985	1040	975
1035	980	1005	990

$P^8(B \times A_1) = P^2 B \times A_1$　　　　$\Sigma_{20} = 4010.$

193	206	199	204	321	334	327	332	129	142	135	140	257	270	263	268	65	78	71	76
200	203	194	205	328	331	322	333	126	139	130	141	264	267	258	269	72	75	66	77
202	197	208	195	330	325	336	323	138	133	144	131	266	261	272	259	74	69	80	67
207	196	201	198	335	324	329	326	143	132	137	134	271	260	265	262	79	68	73	70
289	302	295	300	17	30	23	28	225	238	231	236	353	366	359	364	81	94	87	92
296	299	290	301	24	27	18	29	232	235	226	237	360	363	354	365	88	91	82	93
298	293	304	291	26	21	32	19	234	229	240	227	362	357	368	355	90	85	96	83
303	292	297	294	31	20	25	22	239	228	233	230	367	356	361	358	95	84	89	86
385	398	391	396	113	126	119	124	241	254	247	252	49	62	55	60	177	190	183	188
392	395	386	397	120	123	114	15	248	251	242	253	56	59	50	61	184	187	178	189
394	389	400	387	122	117	128	115	250	245	256	243	58	53	64	51	186	181	192	179
399	388	393	390	127	116	121	118	255	244	249	246	63	52	57	54	191	180	185	182
1	14	7	12	209	222	215	220	337	350	343	348	145	158	151	156	273	286	279	284
8	11	2	13	216	219	210	221	344	347	338	349	152	155	146	157	280	283	274	285
10	5	16	3	218	213	224	211	346	341	352	339	154	149	160	147	282	277	288	275
15	4	9	6	223	212	217	214	351	340	345	342	159	148	153	150	287	276	281	278
97	110	103	108	305	318	311	316	33	46	39	44	161	174	167	172	369	382	375	380
104	107	98	109	312	315	306	317	40	43	34	45	168	171	162	173	376	379	370	381
106	101	112	99	314	309	320	307	42	37	48	35	170	165	176	163	378	373	384	371
111	100	105	102	319	308	313	310	47	36	41	38	175	164	169	166	383	372	377	374

$A_1 \times P^2 B^{o}$　　　　$\Sigma_{20} = 4010.$

193	321	129	257	65	206	334	142	270	78	199	327	135	263	71	204	332	140	268	76
289	17	225	353	81	302	30	238	366	94	295	23	231	359	87	300	28	236	364	92
385	113	241	49	177	398	126	254	62	190	391	119	247	55	183	396	124	252	60	188
1	209	337	145	273	14	222	350	158	286	7	215	343	151	279	12	220	348	156	284
97	305	33	161	369	110	318	46	174	382	103	311	39	167	375	108	316	44	172	380
200	328	126	264	72	203	331	139	267	75	194	322	130	258	66	205	333	141	269	77
296	24	232	360	88	299	27	235	363	91	290	18	226	354	82	301	29	237	365	93
392	120	248	56	184	395	123	251	59	187	386	114	242	50	178	397	125	253	61	189
8	216	344	152	280	11	219	347	155	283	2	210	338	146	274	13	221	349	157	285
104	312	40	168	367	107	315	43	171	379	98	306	34	162	370	109	317	45	173	381
202	330	138	266	74	197	325	133	261	69	208	336	144	272	80	195	323	131	259	67
298	26	234	362	90	293	21	229	357	85	304	32	240	368	96	291	19	227	355	83
394	122	250	58	186	389	117	245	53	181	400	128	256	64	192	387	115	243	51	179
10	218	346	154	282	5	213	341	149	277	16	224	352	160	288	3	211	339	147	275
106	314	42	170	378	101	309	37	165	373	112	320	48	176	384	99	307	35	163	371
207	335	143	271	79	196	324	132	260	68	201	329	137	265	73	198	326	134	262	70
303	31	239	367	95	292	20	228	356	84	297	25	233	361	89	294	22	230	358	86
399	127	255	63	191	388	116	244	52	180	393	121	249	57	185	390	118	246	54	182
15	223	351	159	287	4	21	340	148	276	9	217	345	153	281	6	214	342	150	278
111	319	47	175	383	100	308	36	164	372	105	313	41	169	377	102	310	38	166	374

例 3 $n=25=5\times5$ 阶, $\mathbf{F}=\{1,2,\cdots,625\}$, $\Sigma_{25}=7825$.

B

1	19	12	8	25
7	23	5	16	14
20	11	9	22	3
24	2	18	15	6
13	10	21	4	17

$$\Sigma_5=65. \tag{36}$$

1	19	12	8	25	451	469	462	458	475	276	294	287	283	300	176	194	187	183	200	601	619	612	608	625
7	23	5	16	14	457	473	455	466	464	282	298	280	291	289	182	198	180	191	189	607	623	605	616	614
20	11	9	22	3	470	461	459	472	453	295	286	284	297	278	195	186	184	197	178	620	611	609	622	603
24	2	18	15	6	474	452	498	465	456	299	277	293	290	281	199	177	193	190	181	624	602	618	615	606
13	10	21	4	17	463	460	471	454	467	288	285	296	279	292	188	185	196	179	192	613	610	621	604	617
151	169	162	158	175	551	569	562	558	575	101	119	112	108	125	376	394	387	383	400	326	344	337	333	350
157	173	155	166	164	557	573	555	566	564	107	123	105	116	114	382	398	380	391	389	332	348	330	341	339
170	161	159	172	153	570	561	559	572	553	120	111	109	122	103	395	386	384	397	378	345	336	334	347	328
174	152	168	165	156	574	552	568	565	556	124	102	118	115	106	399	377	393	390	381	349	327	343	340	331
163	160	171	154	167	563	560	571	554	567	113	110	121	104	117	388	385	396	379	392	338	335	346	329	342
476	494	487	483	500	251	269	262	258	275	201	219	212	208	225	526	544	537	533	550	51	69	62	58	75
482	498	480	491	489	257	273	255	266	264	207	223	205	216	214	532	548	530	541	539	57	73	55	66	64
495	486	484	497	478	270	261	259	272	253	220	211	209	222	203	545	536	534	547	528	70	61	59	72	53
499	477	493	490	481	274	252	298	265	256	224	202	218	215	206	549	527	543	540	531	74	52	68	65	56
488	485	496	479	492	263	260	271	254	267	213	210	221	204	217	538	535	546	529	542	63	60	71	54	67
576	594	587	583	600	26	44	37	33	50	426	444	437	433	450	351	369	362	358	375	126	144	137	133	150
582	598	580	591	589	32	48	30	41	39	432	448	430	441	439	357	373	355	366	364	132	148	130	141	139
595	586	584	597	578	45	36	34	47	28	445	436	434	447	428	370	361	359	372	353	145	136	134	147	128
599	577	593	590	581	49	27	43	40	31	449	427	443	440	431	374	352	398	365	356	149	127	143	140	131
588	585	596	579	592	38	35	46	29	42	438	435	446	429	442	363	360	371	354	367	138	135	146	129	142
301	319	312	308	325	226	244	237	233	250	501	519	512	508	525	76	94	87	83	100	401	419	412	408	425
307	323	305	316	314	232	248	230	241	239	507	523	505	516	514	82	98	80	91	89	407	423	405	416	414
320	311	309	322	303	245	236	234	247	228	520	511	509	522	503	95	86	84	97	78	420	411	409	422	403
324	302	318	315	306	249	227	243	240	231	524	502	518	515	506	99	77	93	90	81	424	402	418	415	406
313	310	321	304	317	238	235	246	229	242	513	510	521	504	517	88	85	96	79	92	413	410	421	404	417

B×B $\Sigma_{25}=7825$.

各 5 阶方之幻和组成 5 阶完美幻方:

$B \times B$

65	2315	1440	940	3065
815	2815	565	1940	1690
2440	1315	1065	2690	315
2940	190	2190	1815	690
1565	1190	2565	440	2065

$B \times B^{\circ}$

1505	1595	1560	1540	1625
1535	1615	1525	1580	1570
1600	1555	1545	1610	1515
1620	1510	1590	1575	1530
1565	1550	1605	1520	1585

$\Sigma = 7825.$ (37)

1	451	276	176	601	19	469	294	194	619	12	462	287	187	612	8	458	283	183	608	25	475	300	200	625
151	551	101	376	326	169	569	119	394	344	162	562	112	387	337	158	558	108	383	333	175	575	125	400	350
476	251	201	526	51	494	269	219	544	69	487	262	212	537	62	483	258	208	533	58	500	275	225	550	75
576	26	426	351	126	594	44	444	369	144	587	37	437	362	137	583	33	433	358	133	600	50	450	375	150
301	226	501	76	401	319	244	519	94	419	312	237	512	87	412	308	233	508	83	408	325	250	525	100	425
7	457	282	182	607	23	473	298	198	623	5	455	280	180	605	16	466	291	191	616	14	464	289	189	614
157	557	107	382	332	173	573	123	398	348	155	555	105	380	330	166	566	116	391	341	164	564	114	389	339
482	257	207	532	57	498	273	223	548	73	480	255	205	530	55	491	266	216	541	66	489	264	214	539	64
582	32	432	357	132	598	48	448	373	148	580	30	430	355	130	591	41	441	366	141	589	39	439	364	139
307	232	507	82	407	323	248	523	98	423	305	230	505	80	405	316	241	516	91	416	314	239	514	89	414
20	470	295	195	620	11	461	286	186	611	9	459	284	184	609	22	472	297	197	622	3	453	278	178	603
170	570	120	395	345	161	561	111	386	336	159	559	109	384	334	172	572	122	397	347	153	553	103	378	328
495	270	220	545	70	486	261	211	536	61	484	259	209	534	59	497	272	222	547	72	478	253	203	528	53
595	45	445	370	145	586	36	436	361	136	584	34	434	359	134	597	47	447	372	147	578	28	428	353	128
320	245	520	95	420	311	236	511	86	411	309	234	509	84	409	322	247	522	97	422	303	228	503	78	403
24	474	299	199	624	2	452	277	177	602	18	468	293	193	618	15	465	290	190	615	6	456	281	181	606
174	574	124	399	349	152	552	102	377	327	168	568	118	393	343	165	565	115	390	340	156	556	106	381	331
499	274	224	549	74	477	252	202	527	52	493	268	218	543	68	490	265	215	540	65	481	256	206	531	56
599	49	449	374	149	577	27	427	352	127	593	43	443	368	143	590	40	440	365	140	581	31	431	356	131
324	249	524	99	424	302	227	502	77	402	318	243	518	93	418	315	240	515	90	415	306	231	506	81	406
13	463	288	188	613	10	460	285	185	610	21	471	296	196	621	4	454	279	179	604	17	467	292	192	617
163	563	113	388	338	160	560	110	385	335	171	571	121	396	346	154	554	104	379	329	167	567	117	392	342
488	263	213	538	63	485	260	210	535	60	496	271	221	546	71	479	254	204	529	54	492	267	217	542	67
588	38	438	363	138	585	35	435	360	135	596	46	446	371	146	579	29	429	354	129	592	42	442	367	142
313	238	513	88	413	310	235	510	85	410	321	246	521	96	421	304	229	504	79	404	317	242	517	92	417

$B \times B^{\circ}$

476	494	487	483	500	251	269	262	258	275	201	219	212	208	225	526	544	537	533	550	51	69	62	58	75
482	498	480	491	489	257	273	255	266	264	207	223	205	216	214	532	548	530	541	539	57	73	55	66	64
495	486	484	497	478	270	261	259	272	253	220	211	209	222	203	545	536	534	547	528	70	61	59	72	53
499	477	493	490	481	274	252	298	265	256	224	202	218	215	206	549	527	543	540	531	74	52	68	65	56
488	485	496	479	492	263	260	271	254	267	213	210	221	204	217	538	535	546	529	542	63	60	71	54	67
576	594	587	583	600	26	44	37	33	50	426	444	437	433	450	351	369	362	358	375	126	144	137	133	150
582	598	580	591	589	32	48	30	41	39	432	448	430	441	439	357	373	355	366	364	132	148	130	141	139
595	586	584	597	578	45	36	34	47	28	445	436	434	447	428	370	361	359	372	353	145	136	134	147	128
599	577	593	590	581	49	27	43	40	31	449	427	443	440	431	374	352	398	365	356	149	127	143	140	131
588	585	596	579	592	38	35	46	29	42	438	435	446	429	442	363	360	371	354	367	138	135	146	129	142
301	319	312	308	325	226	244	237	233	250	501	519	512	508	525	76	94	87	83	100	401	419	412	408	425
307	323	305	316	314	232	248	230	241	239	507	523	505	516	514	82	98	80	91	89	407	423	405	416	414
320	311	309	322	303	245	236	234	247	228	520	511	509	522	503	95	86	84	97	78	420	411	409	422	403
324	302	318	315	306	249	227	243	240	231	524	502	518	515	506	99	77	93	90	81	424	402	418	415	406
313	310	321	304	317	238	235	246	229	242	513	510	521	504	517	88	85	96	79	92	413	410	421	404	417
1	19	12	8	25	451	469	462	458	475	276	294	287	283	300	176	194	187	183	200	601	619	612	608	625
7	23	5	16	14	457	473	455	466	464	282	298	280	291	289	182	198	180	191	189	607	623	605	616	614
20	11	9	22	3	470	461	459	472	453	295	286	284	297	278	195	186	184	197	178	620	611	609	622	603
24	2	18	15	6	474	452	498	465	456	299	277	293	290	281	199	177	193	190	181	624	602	618	615	606
13	10	21	4	17	463	460	471	454	467	288	285	296	279	292	188	185	196	179	192	613	610	621	604	617
151	169	162	158	175	551	569	562	558	575	101	119	112	108	125	376	394	387	383	400	326	344	337	333	350
157	173	155	166	164	557	573	555	566	564	107	123	105	116	114	382	398	380	391	389	332	348	330	341	339
170	161	159	172	153	570	561	559	572	553	120	111	109	122	103	395	386	384	397	378	345	336	334	347	328
174	152	168	165	156	574	552	568	565	556	124	102	118	115	106	399	377	393	390	381	349	327	343	340	331
163	160	171	134	167	563	560	571	554	567	113	110	121	104	117	388	385	396	379	392	338	335	346	329	342

$P^2(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})$

例 4　$n=28=4\times7$ 阶完美幻方，$\mathbf{F}=\{1,2,\cdots,784\}$，$\Sigma_{28}=10\,990$.

下面以 4 阶完美幻方 $\boldsymbol{A}$ 和 7 阶完美幻方 $\boldsymbol{B}$ 合成 28 阶完美幻方:

$\boldsymbol{A}$

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

$\boldsymbol{B}$

1	38	26	14	44	32	20
9	46	34	15	3	40	28
17	5	42	23	11	48	29
25	13	43	31	19	7	37
33	21	2	39	27	8	45
41	22	10	47	35	16	4
49	30	18	6	36	24	12

(38)

1	38	26	14	44	32	20	638	675	663	651	681	669	657	148	185	173	161	191	179	167	687	724	712	700	730	718	706
9	46	34	15	3	40	28	646	683	671	652	640	677	665	156	193	181	162	150	187	175	695	732	720	701	689	726	714
17	5	42	23	11	48	29	654	642	679	660	648	685	666	164	152	189	170	158	195	176	703	691	728	709	697	734	715
25	13	43	31	19	7	37	662	650	680	668	656	644	674	172	160	190	178	166	154	184	711	699	729	717	705	693	723
33	21	2	39	27	8	45	670	658	639	676	664	645	682	180	168	149	186	174	155	192	719	707	688	725	713	694	731
41	22	10	47	35	16	4	678	659	647	684	672	653	641	188	169	157	194	182	163	151	727	708	696	733	721	702	690
49	30	18	6	36	24	12	686	667	655	643	673	661	649	196	177	165	153	183	171	159	735	716	704	692	722	710	698
344	381	369	357	387	375	363	491	528	516	504	534	522	510	197	234	222	210	240	228	216	442	479	467	455	485	473	461
352	389	377	358	346	383	371	499	536	524	505	493	530	518	205	242	230	211	199	236	224	450	487	475	456	444	481	469
360	348	385	366	354	391	372	507	495	532	513	501	538	519	213	201	238	219	207	244	225	458	446	483	464	452	489	470
368	356	386	374	362	350	380	515	503	533	521	509	497	527	221	209	239	227	215	203	233	466	454	484	472	460	448	478
376	364	345	382	370	351	388	523	511	492	529	517	498	535	229	217	198	235	223	204	241	474	462	443	480	468	449	486
384	365	353	390	378	359	347	531	512	500	537	525	506	494	237	218	206	243	231	212	200	482	463	451	488	476	457	445
392	373	361	349	379	367	355	539	520	508	496	526	514	502	245	226	214	202	232	220	208	490	471	459	447	477	465	453
589	626	614	602	632	620	608	50	87	75	63	93	81	69	736	773	761	749	779	767	755	99	136	124	112	142	130	118
597	634	622	603	591	628	616	58	95	83	64	52	89	77	744	781	769	750	738	775	763	107	144	132	113	101	138	126
605	593	630	611	599	636	617	66	54	91	72	60	97	78	752	740	777	758	746	783	764	115	103	140	121	109	146	127
613	601	631	619	607	595	625	74	62	92	80	68	56	86	760	748	778	766	754	742	772	123	111	141	129	117	105	135
621	609	590	627	615	596	633	82	70	51	88	76	57	94	768	756	737	774	762	743	780	131	119	100	137	125	106	143
629	610	598	635	623	604	592	90	71	59	96	84	65	53	776	757	745	782	770	751	739	139	120	108	145	133	114	102
637	618	606	594	624	612	600	98	79	67	55	85	73	61	784	765	753	741	771	759	747	147	128	116	104	134	122	110
540	577	565	553	583	571	559	295	332	320	308	338	326	314	393	430	418	406	436	424	412	246	283	271	259	289	277	265
548	585	573	554	542	579	567	303	340	328	309	297	334	322	401	438	426	407	395	432	420	254	291	279	260	248	285	273
556	544	581	562	550	587	568	311	299	336	317	305	342	323	409	397	434	415	403	440	421	262	250	287	268	256	293	274
564	552	582	570	558	546	576	319	307	337	325	313	301	331	417	405	435	423	411	399	429	270	258	288	276	264	252	282
572	560	541	578	566	547	584	327	315	296	333	321	302	339	425	413	394	431	419	400	437	278	266	247	284	272	253	290
580	561	549	586	574	555	543	335	316	304	341	329	310	298	433	414	402	439	427	408	396	286	267	255	292	280	261	249
588	569	557	545	575	563	551	343	324	312	300	330	318	306	441	422	410	398	428	416	404	294	275	263	251	281	269	257

$A\times B$

344	381	369	357	387	375	363	491	528	516	504	534	522	510	197	234	222	210	240	228	216	442	479	467	455	485	473	461
352	389	377	358	346	383	371	499	536	524	505	493	530	518	205	242	230	211	199	236	224	450	487	475	456	444	481	469
360	348	385	366	354	391	372	507	495	532	513	501	538	519	213	201	238	219	207	244	225	458	446	483	464	452	489	470
368	356	386	374	362	350	380	515	503	533	521	509	497	527	221	209	239	227	215	203	233	466	454	484	472	460	448	478
376	364	345	382	370	351	388	523	511	492	529	517	498	535	229	217	198	235	223	204	241	474	462	443	480	468	449	486
384	365	353	390	378	359	347	531	512	500	537	525	506	494	237	218	206	243	231	212	200	482	463	451	488	476	457	445
392	373	361	349	379	367	355	539	520	508	496	526	514	502	245	226	214	202	232	220	208	490	471	459	447	477	465	453
589	626	614	602	632	620	608	50	87	75	63	93	81	69	736	773	761	749	779	767	755	99	136	124	112	142	130	118
597	634	622	603	591	628	616	58	95	83	64	52	89	77	744	781	769	750	738	775	763	107	144	132	113	101	138	126
605	593	630	611	599	636	617	66	54	91	72	60	97	78	752	740	777	758	746	783	764	115	103	140	121	109	146	127
613	601	631	619	607	595	625	74	62	92	80	68	56	86	760	748	778	766	754	742	772	123	111	141	129	117	105	135
621	609	590	627	615	596	633	82	70	51	88	76	57	94	768	756	737	774	762	743	780	131	119	100	137	125	106	143
629	610	598	635	623	604	592	90	71	59	96	84	65	53	776	757	745	782	770	751	739	139	120	108	145	133	114	102
637	618	606	594	624	612	600	98	79	67	55	85	73	61	784	765	753	741	771	759	747	147	128	116	104	134	122	110
540	577	565	553	583	571	559	295	332	320	308	338	326	314	393	430	418	406	436	424	412	246	283	271	259	289	277	265
548	585	573	554	542	579	567	303	340	328	309	297	334	322	401	438	426	407	395	432	420	254	291	279	260	248	285	273
556	544	581	562	550	587	568	311	299	336	317	305	342	323	409	397	434	415	403	440	421	262	250	287	268	256	293	274
564	552	582	570	558	546	576	319	307	337	325	313	301	331	417	405	435	423	411	399	429	270	258	288	276	264	252	282
572	560	541	578	566	547	584	327	315	296	333	321	302	339	425	413	394	431	419	400	437	278	266	247	284	272	253	290
580	561	549	586	574	555	543	335	316	304	341	329	310	298	433	414	402	439	427	408	396	286	267	255	292	280	261	249
588	569	557	545	575	563	551	343	324	312	300	330	318	306	441	422	410	398	428	416	404	294	275	263	251	281	269	257
1	38	26	14	44	32	20	638	675	663	651	681	669	657	148	185	173	161	191	179	167	687	724	712	700	730	718	706
9	46	34	15	3	40	28	646	683	671	652	640	677	665	156	193	181	162	150	187	175	695	732	720	701	689	726	714
17	5	42	23	11	48	29	654	642	679	660	648	685	666	164	152	189	170	158	195	176	703	691	728	709	697	734	715
25	13	43	31	19	7	37	662	650	680	668	656	644	674	172	160	190	178	166	154	184	711	699	729	717	705	693	723
33	21	2	39	27	8	45	670	658	639	676	664	645	682	180	168	149	186	174	155	192	719	707	688	725	713	694	731
41	22	10	47	35	16	4	678	659	647	684	672	653	641	188	169	157	194	182	163	151	727	708	696	733	721	702	690
49	30	18	6	36	24	12	686	667	655	643	673	661	649	196	177	165	153	183	171	159	735	716	704	692	722	710	698

$P^7(A\times B)$

442	479	467	455	485	473	461	344	381	369	357	387	375	363	491	528	516	504	534	522	510	197	234	222	210	240	228	216
450	487	475	456	444	481	469	352	389	377	358	346	383	371	499	536	524	505	493	530	518	205	242	230	211	199	236	224
458	446	483	464	452	489	470	360	348	385	366	354	391	372	507	495	532	513	501	538	519	213	201	238	219	207	244	225
466	454	484	472	460	448	478	368	356	386	374	362	350	380	515	503	533	521	509	497	527	221	209	239	227	215	203	233
474	462	443	480	468	449	486	376	364	345	382	370	351	388	523	511	492	529	517	498	535	229	217	198	235	223	204	241
482	463	451	488	476	457	445	384	365	353	390	378	359	347	531	512	500	537	525	506	494	237	218	206	243	231	212	200
490	471	459	447	477	465	453	392	373	361	349	379	367	355	539	520	508	496	526	514	502	245	226	214	202	232	220	208
99	136	124	112	142	130	118	589	626	614	602	632	620	608	50	87	75	63	93	81	69	736	773	761	749	779	767	755
107	144	132	113	101	138	126	597	634	622	603	591	628	616	58	95	83	64	52	89	77	744	781	769	750	738	775	763
115	103	140	121	109	146	127	605	593	630	611	599	636	617	66	54	91	72	60	97	78	752	740	777	758	746	783	764
123	111	141	129	117	105	135	613	601	631	619	607	595	625	74	62	92	80	68	56	86	760	748	778	766	754	742	772
131	119	100	137	125	106	143	621	609	590	627	615	596	633	82	70	51	88	76	57	94	768	756	737	774	762	743	780
139	120	108	145	133	114	102	629	610	598	635	623	604	592	90	71	59	96	84	65	53	776	757	745	782	770	751	739
147	128	116	104	134	122	110	637	618	606	594	624	612	600	98	79	67	55	85	73	61	784	765	753	741	771	759	747
246	283	271	259	289	277	265	540	577	565	553	583	571	559	295	332	320	308	338	326	314	393	430	418	406	436	424	412
254	291	279	260	248	285	273	548	585	573	554	542	579	567	303	340	328	309	297	334	322	401	438	426	407	395	432	420
262	250	287	268	256	293	274	556	544	581	562	550	587	568	311	299	336	317	305	342	323	409	397	434	415	403	440	421
270	258	288	276	264	252	282	564	552	582	570	558	546	576	319	307	337	325	313	301	331	417	405	435	423	411	399	429
278	266	247	284	272	253	290	572	560	541	578	566	547	584	327	315	296	333	321	302	339	425	413	394	431	419	400	437
286	267	255	292	280	261	249	580	561	549	586	574	555	543	335	316	304	341	329	310	298	433	414	402	439	427	408	396
294	275	263	251	281	269	257	588	569	557	545	575	563	551	343	324	312	300	330	318	306	441	422	410	398	428	416	404
687	724	712	700	730	718	706	1	38	26	14	44	32	20	638	675	663	651	681	669	657	148	185	173	161	191	179	167
695	732	720	701	689	726	714	9	46	34	15	3	40	28	646	683	671	652	640	677	665	156	193	181	162	150	187	175
703	691	728	709	697	734	715	17	5	42	23	11	48	29	654	642	679	660	648	685	666	164	152	189	170	158	195	176
711	699	729	717	705	693	723	25	13	43	31	19	7	37	662	650	680	668	656	644	674	172	160	190	178	166	154	184
719	707	688	725	713	694	731	33	21	2	39	27	8	45	670	658	639	676	664	645	682	180	168	149	186	174	155	192
727	708	696	733	721	702	690	41	22	10	47	35	16	4	678	659	647	684	672	653	641	188	169	157	194	182	163	151
735	716	704	692	722	710	698	49	30	18	6	36	24	12	686	667	655	643	673	661	649	196	177	165	153	183	171	159

$P^7(A\times B)P^7$

1	14	4	15	593	606	596	607	401	414	404	415	209	222	212	223	689	702	692	703	497	510	500	511	305	318	308	319
8	11	5	10	600	603	597	602	408	411	405	410	216	219	213	218	696	699	693	698	504	507	501	506	312	315	309	314
13	2	16	3	605	594	608	595	413	402	416	403	221	210	224	211	701	690	704	691	509	498	512	499	317	306	320	307
12	7	9	6	604	599	601	598	412	407	709	406	220	215	217	214	700	695	697	694	508	503	505	502	316	311	313	310
129	142	132	143	721	734	724	735	529	542	532	543	225	238	228	239	33	46	36	47	625	638	628	639	433	446	436	447
136	139	133	138	728	731	725	730	536	539	533	538	232	235	229	234	40	43	37	42	632	635	629	634	440	443	437	442
141	130	144	131	733	722	736	723	541	530	544	531	237	226	240	227	45	34	48	35	637	626	640	627	445	434	448	435
140	135	137	134	732	727	729	726	540	535	537	534	236	231	233	230	44	39	41	38	636	631	633	630	444	439	441	438
257	270	260	271	65	78	68	79	657	670	660	671	353	366	356	367	161	174	164	175	753	766	756	767	449	462	452	463
264	267	261	266	72	75	69	74	664	667	661	666	360	363	357	362	168	171	165	170	760	763	757	762	456	459	453	458
269	258	272	259	77	66	80	67	669	658	672	659	365	354	368	355	173	162	176	163	765	754	768	755	461	450	464	451
268	263	265	262	76	71	73	70	668	663	665	662	364	359	361	358	172	167	169	166	764	759	761	758	460	455	457	454
385	398	388	399	193	206	196	207	673	686	676	687	481	494	484	495	289	302	292	303	97	110	100	111	577	590	580	591
392	395	389	394	200	203	197	202	680	683	677	682	488	491	485	490	296	299	293	298	104	107	101	106	584	587	581	586
397	386	400	387	205	194	208	195	685	674	688	675	493	482	496	483	301	290	304	291	109	98	112	99	589	578	592	579
396	391	393	390	204	199	201	198	684	679	681	678	492	487	489	486	300	295	297	294	108	103	105	102	588	583	585	582
513	526	516	527	321	334	324	335	17	30	20	31	609	622	612	623	417	430	420	431	113	126	116	127	705	718	708	719
520	523	517	522	328	331	325	330	24	27	21	26	616	619	613	618	424	427	421	426	120	123	117	122	712	715	709	714
525	514	528	515	333	322	336	323	29	18	32	19	621	610	624	611	429	418	432	419	125	114	128	115	717	706	720	707
524	519	521	518	332	327	329	326	28	23	25	22	620	615	617	614	428	423	425	422	124	119	121	118	716	711	713	710
641	654	644	655	337	350	340	351	145	158	148	159	737	750	740	751	545	558	548	559	241	254	244	255	49	62	52	63
648	651	645	650	344	347	341	346	152	155	149	154	744	747	741	746	552	555	549	554	248	251	245	250	56	59	53	58
653	642	656	643	349	338	352	339	157	146	160	147	749	738	752	739	557	546	560	547	253	242	256	243	61	50	64	51
652	647	649	646	348	343	345	342	156	151	153	150	748	743	745	742	556	551	553	550	252	247	249	246	60	55	57	54
769	782	772	783	465	478	468	479	273	286	276	287	81	94	84	95	561	574	564	575	369	382	372	383	177	190	180	191
776	779	773	778	472	475	469	474	280	283	277	282	88	91	85	90	568	571	565	570	376	379	373	378	184	187	181	186
781	770	784	771	477	466	480	467	285	274	288	275	93	82	96	83	573	562	576	563	381	370	384	371	189	178	192	179
780	775	777	774	476	471	473	470	284	279	281	278	92	87	89	86	572	567	569	566	380	375	377	374	188	183	185	182

$B \times A$

$A \times B$ 中，各 7 阶方之幻和组成 4 阶完美幻方：$\Sigma = 10\,990$.

175	4634	1204	4977
2576	3605	1547	3262
4291	518	5320	861
3948	2233	2919	1890

(39)

34	2402	1634	866	2786	2018	1250
546	2914	2146	930	162	2530	1762
1058	290	2658	1442	674	3042	1826
1570	802	2722	1954	1186	418	2338
2082	1314	98	2466	1698	482	2850
2594	1378	610	2978	2210	994	226
3106	1890	1122	354	2274	1506	738

$\Sigma_{28} = 10\,990$,
$B \times A$ 中，各 4 阶方之幻和组成 7 阶完美幻方：$\Sigma = 10\,990$.

(40)

第 6 章　完美幻方的特优性

完美幻方的特优性研究引起人们极大的兴趣，已有人找到许多具有相当高次的特优完美幻方．现在，我们将对完美幻方的特优性首先做一些理论性研究，给出一些有趣的结果．

一、奇阶完美幻方的特优性理论

设 I_0，II_0 分别是 n 阶完美幻方 A 的第 I，II 主对角线．若 I_0，II_0 之元素的一次和，二次和，…，k 次和均分别对应相等，则称 A 是 k 次特优的 n 阶完美幻方．

从前面的示例可知，具有特优性的奇阶完美幻方往往具有对称性．我们就从这里开始：以对称的 n 级排列 π_1，π_2 为分段方之行序，列序得分段方 A．A 必是由 $1,2,3,\cdots,n^2$ 组成的以中心数 $\dfrac{n^2+1}{2}$ 为对称中心的中心对称方阵．对 A 执行行 Z 变换，所得列和方 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ 也都是中心对称方阵．若中心数 $\dfrac{n^2+1}{2}$ 不在方阵的中心位置，显然可通过行、列轮回把中心数平移至方阵的中心位置．在各 B_j 中，令中心数 $\dfrac{n^2+1}{2}$ 所在列为列和方 $B_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的中心列，记为 e_0．依次把中心列左右两侧等距离的列记为：$e_{\pm1}, e_{\pm2}, \cdots, e_{\pm r}(n=2r+1$，$r$ 正整数)．则有如下定理：

定理 1　对素数 $n=2r+1$ (r 正整数)，以对称的 n 级排列 π_1，π_2 为行、列序构作的分段方 A．所得各列和方 $B_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 之各列元素之平方和有

$$\sum_{a_{ij}\in e_k} a^2_{ij} = \sum_{a_{ij}\in e_{-k}} a^2_{ij} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1}$$

证明　用方阵的行，列轮换把中心数 $\dfrac{n^2+1}{2}$ 平移至方阵的中心位置．则列和方 $B_j(j=1,2,3,\cdots,r)$ 的各列线 e_k，$e_{-k}(k=1,2,\cdots,r)$ 之各元，关于对称中心是对称互补的，即

$$e_k: a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{n-1j}, a_{nj}$$
$$e_{-k}: a'_{nj}, a'_{n-1j}, \cdots, a'_{2j}, a'_{1j}$$
$$a_{ij}+a'_{n-ij}=n^2+1 \quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

且

$$\sum_{a_{ij}\in e_k} a_{ij} = \sum_{a_{ij}\in e_{-k}} a_{ij} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \sum\nolimits_n (k=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

因此，

$$\sum_{a'_{ij}\in e_{-k}} a'^2_{ij} = \sum_{a_{ij}\in e_k} [n^2+1-a_{ij}]^2$$
$$=\sum[(n^2+1)^2-2(n^2+1)a_{ij}+a^2_{ij}]$$

$$= n(n^2+1)^2-(n^2+1)\sum_{a_{ij}\in e_k} a^2_{ij} + \sum_{a_{ij}\in e_k} a^2_{ij}$$

$$= \sum_{a_{ij}\in e_k} a^2_{ij}$$

定理表明，在列和方中关于中心列对称位置两列的元素平方和相等. 在定理 1 中不计中心则有推论. 若数列 $a_1, a_2,\cdots, a_n; b_1, b_2,\cdots, b_n$ 满足

$$a_i + b_i = L \quad (i=1,2,\cdots,n), \text{ 和} \sum a_i = \sum b_i \tag{3}$$

则

$$\sum a_i^2 = \sum b_i^2 . \tag{4}$$

定理 2　若数列 $a_1, a_2,\cdots, a_n, b_1, b_2,\cdots, b_n,$

$c_1, c_2,\cdots, c_n, d_1, d_2,\cdots, d_n,$

满足 $a_i + b_i = L, c_i + d_i = L, a_i + c_i = L_1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

则

$$\sum a_i^2 + \sum b_i^2 = \sum c_i^2 + \sum d_i^2 . \tag{5}$$

证明　显然，有

$$b_i + d_i = 2L - L_1$$

因此，由推论得 $\sum a_i^2 = \sum b_i^2$，$\sum c_i^2 = \sum d_i^2$. 从而有结论.

定理 3　设 $\boldsymbol{B}$ 是对称的奇 n 阶完美幻方. 且主对角线为 $(n = 2r+1)$,

$$\text{I}_0: a_1, a_2,\cdots. a_r, a_{r+1}, a_{r+2},\cdots, a_{n-1}, a_n;$$

$$\text{II}_0: b_1, b_2,\cdots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2},\cdots, b_{n-1}, b_n . \tag{6}$$

满足:

$$a_i + a_{n-i} = 2L, \; b_i + b_{n-i} = 2L \; (i = 1,2,\cdots,r), \tag{7}$$

$$L = n^2+1, \quad a_{r+1} = b_{r+1} = L .$$

则

1. 若 $\sum_{i=1}^{r} a_i = \sum_{i=1}^{r} b_i$，$\sum_{i=1}^{r} a_i^2 = \sum_{i=1}^{r} b_i^2$

$$\rightarrow \; \sum \text{I}^2_0 = \sum \text{II}^2_0, \; \sum \text{I}^3_0 = \sum \text{II}^3_0 . \tag{8}$$

2. 若再有

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^3 = \sum_{i=1}^{r} b_i^3, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i^4 = \sum_{i=1}^{r} b_i^4$$

$$\rightarrow \; \sum \text{I}^4_0 = \sum \text{II}^4_0, \; \sum \text{I}^5_0 = \sum \text{II}^5_0 . \tag{9}$$

证明　这里 $\sum \text{I}^2_0$，$\sum \text{II}^2_0$ 等分别表示主对角线 I_0，II_0 中各元素之平方和.

$$\sum \text{I}_0^2 = \sum a_i^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 + a_{r+1}^2 + \sum_{i=1}^{r}(L - a_i)$$

$$= \sum a_i^2 + a_{r+1}^2 + \sum(4L^2 - 4La_i + a_i^2)$$

$$= 2\sum a_i^2 + a_{r+1}^2 + 4L^2 - 4L\sum a_i .$$

同理

$$\sum \text{II}^2_0 = \sum b^2_i = 2\sum b^2_i + b^2_{r+1} + 4rL^2 - 4L\sum b_i$$

当 $\sum a_i = \sum b_i$，$\sum a^2_i = \sum b^2_i$ 时，$\sum \text{I}^2_0 = \sum \text{II}^2_0$

$$\sum \text{I}_0^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \sum_{i=1}^{r} a_i^3 + a_{r+1}^3 + \sum_{i=1}^{r}(2L - a_i)^3$$

$$= \sum a_i^3 + a_{r+1}^3 + \sum(8L^3 - 3\cdot 4L^2 a_i + 3\cdot 2La_i^2 - a_i^3)$$

$$= a_{r+1}^3 + 8rL^3 - 12L^2\sum b_i + 6L\sum b_i^2 .$$

当 $\Sigma a_i=\Sigma b_i$, $\Sigma a^2_i=\Sigma b^2_i$ 时, $\Sigma \text{I}^3_0=\Sigma \text{II}^3_0$.
同理可证 2.

定理3 适用于对称型奇阶完美幻方的特优性研究. 而定理1的推论和定理2对偶 n 阶对称型完美幻方 $A(n=2r)$的特优性研究也很有意义. 在那里, 设 A 之两条主对角线为:

I_0: $a_1, a_2,\cdots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2},\cdots, a_n$;

II_0: $b_1, b_2,\cdots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2},\cdots, b_n$.

也总有 $$a_i+a_{r+i}=2L,\ b_i+b_{r+i}=2L\quad (i=1,2,\cdots,r). \tag{10}$$

例如, 为确定对称的奇阶完美幻方的特优性, 对主对角线元各方次和的计算, 由定理2有如下简明的方法:

1. 计算对称的奇阶之各列(行)和方 B_j 之各列(行)元素的平方和、立方和……特别是需要计算中心线 e_0 及其一边之 r 条列线之平方和;

2. 找出不同列(行)和方中具有相同平方和、立方和……的列(行)线.

例如, 若 B_{j1}, B_{j2} 中有相同的平方和、立方和……的列(行). 则此二列(行)必有一个相同元 a_0.

若 B_{j1}, B_{j2} 之中心列 e_0, e'_0 之元素的平方和相等, 则以它们对角线组的完美幻方必是3次特优的完美幻方; 若再有4次方和, 则5次方和也必相等, 等等.

若 B_{j1} 之 $e_{\pm i}$,与 B_{j2} 之 $e_{\pm k}$ 列的元素的平方和相等, 则可得4个2次特优的完美幻方. 且其3次方和不一定对应相等, 但有:$\Sigma e^3_i+\Sigma e^3_{-i}=\Sigma e^3_k+\Sigma e^3_{-k}$;

3. 以 B_{j1}, B_{j2} 分别作为完美幻方之行线组、列线组构作完美幻方;

4. 对奇阶再用拓扑变换, 可使指定列和方 B_{j1}, B_{j2} 变成完美幻方的对角线组;

5. 再经过行、列轮回, 平移 a_0 至幻方的中心位置, 即得特优的完美幻方.

对偶阶, 第4步不能执行, 因此时无中心 a_0, 也无中心列. 但还是可以直接给出以 B_{j1}, B_{j2} 为对角线组的完美幻方.

下面我们分别对5阶、7阶等情形应用我们的理论, 给出详细的研究. 在目前所见的例中, 具有特优性的完美幻方大都是对称型的完美幻方. 因此, 我们也就从对称型完美幻方的性质研究开始.

二、5阶完美幻方的特优性

元素集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,25\}$, 幻和$\Sigma_5=65$, $\varphi(5)=4$. 同态类数$\lambda(5)=3!=6$, 各同态类的代表是:

①(1,2,3,4,5), ②(1,2,4,5,3), ③(1,2,5,3,4),

④(1,2,4,3,5), ⑤(1,2,3,5,4), ⑥(1,2,5,4,3). (11)

其中①、②是对称的同态类. 分别以这些排列为分段方的行、列序构作5阶分段方 $A_{ij}(i,j=1,2,3,4,5,6)$, 并执行行Z变换, 可得列和方 B_1,B_2,B_3,B_4. 再计算各列方的幻和, 平方和等. 为计算方便将各列方改写成行和方形式. 例如,

1. 以①(1,2,3,4,5)为分段方的行、列序有:

A_{11}

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(12)

列和方						转置为					幻和$\Sigma_5=65$	平方和	立方和
1	2	3	4	5	B_1	1	7	13	19	25	1205		
7	8	9	10	6		2	8	14	20	21	1105	20525	
13	14	15	11	12		3	9	15	16	22	1055	18875	
19	20	16	17	18		4	10	11	17	23	1055	19475	
25	21	22	23	24		5	6	12	18	24	1105	21725	
1	2	3	4	5	B_4	1	10	14	18	22	1105	20225	
10	6	7	8	9		2	6	15	19	23	1155	22625	
14	15	11	12	13		3	7	11	20	24	1155	23525	
18	19	20	16	17		4	8	12	16	25	1105	22025	
22	23	24	25	21		5	9	13	17	21	1005		4 次和均不等
1	2	3	4	5	B_2	1	8	15	17	24	1155	22625	470019
8	9	10	6	7		2	9	11	18	25	1155	23525	516819
15	11	12	13	14		3	10	12	19	21	1055	18875	355619
17	18	19	20	16		4	6	13	20	22	1105	21125	424369
24	25	21	22	23		5	7	14	16	23	1055	19475	386919
1	2	3	4	5	B_3	1	9	12	20	23	1155	22625	467139
9	10	6	7	8		2	10	13	16	24	1105	21125	435889
12	13	14	15	11		3	6	14	17	25	1155	23525	513939
20	16	17	18	19		4	7	15	18	21	1055	18875	352739
23	24	25	21	22		5	8	11	19	22	1055	19475	383939

(13)

C_{11}					D_{11}				
1	14	22	10	18	1	8	15	17	24
7	20	3	11	24	20	22	4	6	13
13	21	9	17	5	9	11	18	25	2
19	2	15	23	6	23	5	7	14	16
25	8	16	4	12	12	19	21	3	10

由 C_{11} 有:

10	18	1	14	22	
11	24	7	20	3	65
17	5	13	21	9	1105
23	6	19	2	15	21125
4	12	25	8	16	

23	6	19	2	15	17	5	13	21	9	18	1	14	22	10	22	10	18	1	14
4	12	25	8	16	23	6	19	2	15	24	7	20	3	11	3	11	24	7	20
10	18	1	14	22	4	12	25	8	16	5	13	21	9	17	9	17	5	13	21
11	24	7	20	3	10	18	1	14	22	6	19	2	15	23	15	23	6	19	2
17	5	13	21	9	11	24	7	20	3	12	25	8	16	4	16	4	12	25	8
65	1155	22625			65	1155	23525			65	1055	18875			65	1055	19475		

(14)

注意对于 5 阶，列和方 B_1 与 B_2、B_3; B_4 与 B_2、B_3 不可能构成完美幻方的对角线组. 对角线配对只能是 B_1、B_4 或 B_2、B_3 .下面分别对排列①、②、③、④、⑤、⑥及其各种配对组合进行研究:

2. 以一个排列分段方的行、列序有:

②(1,2,4,**5,3**)

1	2	4	5	3	A_{22}	1	9	18	22	15	1115	20585	B_2
6	7	9	10	8		2	10	16	24	**13**	**1105**	**21125**	
16	17	19	20	18		4	8	17	25	11	1115	22445	
21	22	24	25	23		5	6	19	23	12	1095	21095	
11	12	14	15	13		3	7	20	21	14	1095	20375	
22	3	19	11	**10**	C_{22}	1	10	17	23	14	1115	20825	B_3
14	**6**	25	**2**	18		2	8	19	21	15	1095	20015	
5	17	**13**	9	21	65	4	6	20	22	**13**	**1105**	**21125**	
8	**24**	1	**20**	12	1105	5	7	18	24	11	1095	21455	
16	15	7	23	**4**	21125	3	9	16	25	12	1115	22205	
22	15	1	9	18	D_{22}	中心对称的							
6	19	23	12	5		**3 次特优线**　1 对							
13	2	10	16	24		2 次特优线　8 对							
20	21	14	3	7									
4	8	17	25	11									

③(1,2,5,3,4)

1	2	5	3	4	A_{33}	1	10	24	12	18	1145	22385	B_2
6	7	10	8	9		2	8	21	15	19	1095	20015	
21	22	25	23	24		5	9	22	13	16	1015	17795	
11	12	15	13	14		3	6	**25**	14	17	**1155**	**23525**	
16	17	20	18	19		4	7	23	11	20	1115	21905	
9	15	1	23	**17**	C_{33}	1	8	22	14	20	1145	21905	
21	**18**	7	**14**	5		2	9	**25**	11	18	**1155**	**23525**	
12	4	**25**	16	8	65	5	6	23	12	19	1095	21095	B_3
20	**6**	13	**2**	24	1155	3	7	24	15	16	1115	21665	
3	22	19	10	**11**	23525	4	10	21	13	17	1015	17435	
9	22	13	16	5	D_{33}	偏对称的　5　25							
18	1	10	24	12		**3 次特优线**　1 对							
25	14	17	3	6		2 次特优线　4+2 对							
2	8	21	15	19									
11	20	4	7	23									

④(1,2,4,3,5)

1	2	4	3	5	A_{44}	**1**	9	20	12	23	**1155**	**22625**	
6	7	9	8	10		2	8	16	14	25	1145	22985	B_2
16	17	19	18	20		4	10	17	13	21	1015	17435	
11	12	14	13	15		3	6	19	15	22	1115	21125	
21	22	24	23	25		5	7	18	11	24	1095	21455	
24	6	13	2	**20**	C_{44}	**1**	8	17	15	24	**1155**	**22625**	
3	**17**	25	**9**	11		2	10	19	11	23	1115	21365	B_3
10	14	**1**	18	22	65	4	6	18	12	25	1145	23465	
16	**23**	7	**15**	4	1155	3	7	20	14	21	1095	20375	
12	5	19	21	**8**	22625	5	9	16	13	22	1015	17795	
24	5	7	18	11	D_{44}	偏对称的　1　1							
17	13	21	4	10		**3 次特优线**　1 对							
1	9	20	12	23		2 次特优线　4+2 对							
15	22	3	6	19									
8	16	14	25	2									

分别以⑤(1,2,3,5,4)、⑥(1,2,5,4,3)为分段方的行、列序，没有3次特优线，只有一些2次特优线存在.

3. 5级排列①、②、③、④、⑤、⑥交叉地配对组合作为分段方的行、列序. 只有下列两种情形有3次特优线，其他情形最多只有2次特优线：

A_{43} ④(1,2,4,3,5) ③(1,2,5,3,4) C_{43}	1 23 17 10 14 7 15 4 21 18 24 16 8 12 5 13 2 25 19 6 20 9 11 3 22	D_{43}	**18** 1 9 25 **12** 24 **15** 17 **3** 6 2 8 **21** 14 20 11 **19** 5 **7** 23 **10** 22 13 16 **4**
A_{34} ③(1,2,5,3,4) ④(1,2,4,3,5) C_{34}	16 23 7 14 5 12 4 20 21 8 25 6 13 2 19 3 17 24 10 11 9 15 1 18 22	D_{34}	**16** 15 24 2 **8** 4 **7** 18 **11** 25 13 21 **5** 9 17 10 **19** 12 **23** 1 **22** 3 6 20 **14**

至此，我们对5阶完美幻方的构作有下列结论：

(1) 在完美幻方中：列、行线组可以交换(转置)；对角线组Ⅰ、Ⅱ也可以交换(列或行的逆序).

(2) 列、行线组与对角线组Ⅰ、Ⅱ可以交换. 此即是拓扑变换. 因此，由一个5阶分段方及其列和方只能给出：

以 B_2, B_3 为对角线组的基本的5阶完美幻方 C_{ij},

以 B_1, B_4 为对角线组的5阶完美幻方 D_{ij} $(i,j = 1,2,3,4,5,6)$

各列和方在组成5阶完美幻方时的分配如下：

	列	行	Ⅰ	Ⅱ	
C_{ij}	B_1	B_4	B_3	B_2	(15)
D_{ij}	B_3	B_2	B_4	B_1	

(3) 因排列①(1,2,3,4,5)是中心对称的(中心3)，故分段方、各列和方和完美幻方都是中心对称的(中心13).

(4) 且排列①关于1, 5也是偏对称的，故分段方、各列和方、完美幻方关于1, 25都是线对称的.

(5) 又通过对列和方各线平方和、立方和、4次和等的计算知:没有4次和相等线，故无4次特优的5阶完美幻方.

(6) 以 B_2, B_3 为对角线组Ⅰ、Ⅱ有5个3次特优的5阶完美幻方.

其特优的主对角线分别是：

										主对角线交点	
B_2	1	8	15	17	24	65	1155	22625	470019	1	
B_3	1	9	12	20	23	65	1155	22625	467139		
B_2	2	9	11	18	25	65	1155	23525	516819	25	
B_3	3	6	14	17	25	65	1155	23525	513939		
B_2	4	6	13	20	22	65	1105	21125	424369	13	(16)
B_3	2	10	13	16	24	65	1105	21125	435889		
B_2	3	10	12	19	21	65	1055	18875	355619	21	
B_3	4	7	15	18	21	65	1055	18875	352739		

B_2	5	7	14	16	23	65	1055	19475	386919	5
B_3	5	8	11	19	22	65	1055	19475	383939	

以 B_2, B_3 为对角线组Ⅰ、Ⅱ还有 4 个 2 次特优的主对角线.

(7) 以 B_1, B_4 为对角线组Ⅰ、Ⅱ不能得 3 次特优的 5 阶完美幻方，只能给出 4 个 2 次特优的主对角线.

(8) 同时，不可能给出以 B_1, B_2 或 B_1, B_3 或 B_2, B_4 或 B_3, B_4 为对角线组的 5 阶完美幻方. 虽然这些列和方对中存在一些 3 次特优线.

总结以上知有 12 个 3 次特优的 5 阶完美幻方，另外还有许多的 2 次特优的主对角线. 值得注意的是这些特优线主要集中在中心对称方或偏对称方中.

三、7 阶完美幻方的特优性

当 $n=7$, 元素集 $F=\{1,2,3,\cdots,49\}$, 幻和 $\Sigma_7=175$, $\varphi(7)=6$.

我们已经知道对称方阵，应以中心对称或偏对称排列为分段方行序、列序才可得到. 对于 7 级排列，对称的同态类数是 $\mu_1(7)=8$. 它们各有下列 8 种中心对称同态类或偏对称排列同态类:

中心	**4**	**1**	**7**
互补和	8	9	7

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (1,2,3,\mathbf{4},5,6,7),\ (\mathbf{1},2,3,4,5,6,7),\ (1,2,3,4,5,6,\mathbf{7}),\\
&(2)\ (1,2,6,7,3,\mathbf{4},5);\ (\mathbf{1},2,5,6,3,4,7);\ (1,2,\mathbf{7},5,6,4,3);\\
&(3)\ (1,2,5,\mathbf{4},3,6,7),\ (\mathbf{1},2,3,5,4,6,7),\ (1,2,4,3,5,6,\mathbf{7}),\\
&(4)\ (1,2,6,7,5,\mathbf{4},3);\ (\mathbf{1},2,4,6,3,5,7);\ (1,2,\mathbf{7},5,6,3,4);\\
&(5)\ (1,2,3,5,6,7,\mathbf{4}),\ (\mathbf{1},2,4,3,6,5,7),\ (1,2,3,\mathbf{7},4,5,6),\\
&(6)\ (1,2,\mathbf{4},6,7,5,3);\ (\mathbf{1},2,6,5,4,3,7);\ (1,2,5,6,3,\mathbf{7},4);\qquad (17)\\
&(7)\ (1,2,5,3,6,7,\mathbf{4}),\ (\mathbf{1},2,6,4,5,3,7),\ (1,2,4,\mathbf{7},3,5,6),\\
&(8)\ (1,2,\mathbf{4},6,7,3,5);\ (\mathbf{1},2,5,3,6,4,7);\ (1,2,5,6,4,\mathbf{7},3).
\end{aligned}
$$

我们首先对对称的 7 级排列(1), (2)进行研究:

1. 中心对称排列　排列中心: **4**. 方阵中心: **25**.

(1) 取对称的 7 级排列 $\pi_1=(1,2,3,\mathbf{4},5,6,7)$. 以之作 7 阶分段方的行序、列序，给出列和方 B_2, B_4, B_3, B_5, 并计算各列线的各次和($\Sigma_7=175$).

1	2	3	4	5	6	7	A_1
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	**25**	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	

1	9	17	**25**	33	41	49	175	6167	B_1	1	14	20	26	32	38	44	175	5677	
2	10	18	26	34	42	43	175	5873		2	8	21	27	33	39	45	175	5873	
3	11	19	27	35	36	44	175	5677		3	9	15	28	34	40	46	175	5971	226723
4	12	20	28	29	37	45	175	5579	197911	4	10	16	22	35	41	47	175	5971	231427
5	13	21	22	30	38	46	175	5579	201439	5	11	17	23	29	42	48	175	5873	
6	14	15	23	31	39	47	175	5677		6	12	18	24	30	36	49	175	5677	
7	8	16	24	32	40	48	175	5873		7	13	19	**25**	31	37	43	175	5383	B_6

1	10	19	28	30	39	48	175	5971	226723			B_2
2	11	20	22	31	40	49	175	5971	231427			
3	12	21	23	32	41	43	175	5677	204379			
4	13	15	24	33	42	44	175	5775	214669			
5	14	16	**25**	34	36	45	**175**	**5579**	**199675**	**7611779**	**301784875**	
6	8	17	26	35	37	46	175	5775	214081			
7	9	18	27	29	38	47	175	5677	209671			
1	12	16	27	31	42	46	175	5971	226723			B_4
2	13	17	28	32	36	47	175	5775	212317			
3	14	18	22	33	37	48	175	5775	216433			
4	8	19	23	34	38	49	175	5971	231427			
5	9	20	24	35	39	43	175	5677	204379			
6	10	21	**25**	29	40	44	**175**	**5579**	**199675**	**7611779**	**301784875**	
7	11	15	26	30	41	45	175	5677	209671			
1	11	21	24	34	37	47	175	5873	218179			B_3
2	12	15	**25**	35	38	48	**175**	**5971**	**229075**	**9356179**	**397334875**	
3	13	16	26	29	39	49	175	5873	225253			
4	14	17	27	30	40	43	175	5579	197911			
5	8	18	28	31	41	44	175	5775	212317			
6	9	19	22	32	42	45	175	5775	216433			
7	10	20	23	33	36	46	175	5579	201439			
1	13	18	23	35	40	45	175	5873	218179			B_5
2	14	19	24	29	41	46	175	5775	214081			
3	8	20	**25**	30	42	47	**175**	**5971**	**229075**	**9356179**	**397334875**	
4	9	21	26	31	36	48	175	5775	214669			
5	10	15	27	32	37	49	175	5873	225253			
6	11	16	28	33	38	43	175	5579	197911			
7	12	17	22	34	39	44	175	5579	201439			

(2) 对称的 7 级排列π_2=(1,2,6,7,3,**4**,5). 以之作 7 阶分段方的行序、列序, 给出列和方 $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_6}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_4}$, $\boldsymbol{B_3}$, $\boldsymbol{B_5}$, 并计算各列线的各次和(Σ_7= 175).

1	2	6	7	3	4	5	A_2
8	9	13	14	10	11	12	
36	37	41	42	38	39	40	
43	44	48	49	45	46	47	
15	16	20	21	17	18	19	
22	23	27	28	24	**25**	26	
29	30	34	35	31	32	33	

1	9	41	49	17	**25**	33	175	6167	B_1	1	12	39	45	21	27	30	175	5761	B_6
2	13	42	45	18	26	29	175	5803		2	8	40	46	17	28	34	175	6013	
6	14	38	46	19	22	30	175	5537		6	9	36	47	18	24	35	175	5747	
7	10	39	47	15	23	34	175	5789		7	13	37	43	19	**25**	31	175	5383	
3	11	40	43	16	27	35	175	5789		3	14	41	44	15	26	32	175	5747	
4	12	36	44	20	28	31	175	5537		4	10	42	48	16	22	33	175	6013	
5	8	37	48	21	24	32	175	5803		5	11	38	49	20	23	29	175	5761	

1	13	38	47	16	28	32	175	5887				B_2
2	14	39	43	20	24	33	175	5635				
6	10	40	44	21	**25**	29	**175**	**5579**	**199675**	**7611779**	**301784875**	
7	11	36	48	17	26	30	175	5635				
3	12	37	49	18	22	34	175	5887				
4	8	41	45	19	23	35	175	5901				
5	9	42	46	15	27	31	175	5901				
1	10	37	46	20	26	35	175	5887				B_4
2	11	41	47	21	22	31	175	5901				
6	12	42	43	17	23	32	175	5635				
7	8	38	44	18	27	33	175	5635				
3	9	39	48	19	28	29	175	5901				
4	13	40	49	15	24	30	175	5887				
5	14	36	45	16	**25**	34	**175**	**5579**	**199675**	**7611779**	**301784875**	
1	14	40	48	18	23	31	175	5915				B_3
2	10	36	49	19	27	32	175	5915				
6	11	37	45	15	28	33	175	5649				
7	12	41	46	16	24	29	175	5663				
3	8	42	47	20	**25**	30	**175**	**5971**	**229075**	**9356179**	**397334875**	
4	9	38	43	21	26	34	175	5663				
5	13	39	44	17	22	35	175	5649				
1	11	42	44	19	24	34	175	5915				B_5
2	12	38	48	15	**25**	35	**175**	**5971**	**229075**	**9356179**	**397334875**	
6	8	39	49	16	26	31	175	5915				
7	9	40	45	20	22	32	175	5663				
3	13	36	46	21	23	33	175	5649	除各方的中心线外，不			
4	14	37	47	17	27	29	175	5649	再有相等的 3 次线.			
5	10	41	43	18	28	30	175	5663				

通过仔细检查，由对称的 7 级排列π_1, π_2所得的各列和方 B_1, B_6, B_2, B_4, B_3, B_5 的中心线(包含有对称中心 25 的列线)有对应相同的组成列次和:

A_1	A_2							次和	1	2	3	4	5	
B_1	B_1	1	9	41	49	17	**25**	33	175	6167				
B_6	B_6	7	13	37	43	19	**25**	31	175	5383				
B_2	B_4	5	14	16	**25**	34	36	45	175	5579	199675	7611779	301784875	
B_4	B_2	6	10	21	**25**	29	40	44	175	5579	199675	7611779	301784875	
B_3	B_5	2	12	15	**25**	35	38	48	175	5971	229075	9356179	397334875	(18)
B_5	B_3	3	8	20	**25**	30	42	47	175	5971	229075	9356179	397334875	

而各列和方中其他各列线的组成却不尽相同. 鉴于此，我们把排列π_1到排列π_2的变换定义为 7 阶完美幻方的保列和方中心线不变的变换，记为ψ. 它使排列

$$\psi: (1,2,3,4,5,6,7) \to (1,2,6,7;3,4,5).$$

这种变换是先把对称中心 4 置于排列的中心位置，然后将中心 3 个数字顺序不变地移到排列的末位. 此变换也可执行于其他的对称 7 级排列. 例如，

$$\psi: (3)\ (1,2,5,4,3,6,7) \to (4)\ (1,2,6,7,5,4,3).$$
$$(5)\ (1,2,3,5,6,7,4) \to (5,6,7,4,1,2,3).$$
$$\psi: \to (5,6,2,3,7,4,1) \to (6)(1,2,4,6,7,5,3).$$
$$(7)\ (1,2,5,3,6,7,4) \to (3,6,7,4,1,2,5) \qquad (19)$$
$$\psi: \to (3,6,2,5,7,4,1) \to (8)\ (1,2,4,6,7,3,5).$$

下面可以看到这后 3 对对称的 7 级排列确实是列和方中心线不变的. 而且这种变换也是可反的. 例如,

$$(2)\ (1,2,6,7,3,4,5) \to (6,7,3,4,5,1,2)$$
$$\psi: \to (6,7,1,2,3,4,5) \to (1)\ (1,2,3,4,5,6,7) \qquad (20)$$

显然, 这种保列和方中心线不变的变换只适宜于中心对称排列.下面进一步分别研究在各情形下, 7 阶完美幻方的**特优**性.

由(1), (2)的各列和方有结论:

(1) 5 次**特优**的 7 阶完美幻方. 分别以 $B_2, B_4; B_3, B_5$ 为对角线组. 且以这些列和方的中心线为主对角线.

(2) 对 A_1 的非中心线有 3 次**特优**的 7 阶完美幻方;

① 以 $B_2, B_4; B_3, B_5$ 为对角线组, 各有 4 个;

② 以 $B_2, B_5; B_3, B_4$ 为对角线组, 各有 4 个;

③ 以 $B_1, B_3; B_1, B_5; B_2, B_6; B_4, B_6$ 为对角线组, 各有 4 个.

(3) 2 次**特优**的 7 阶完美幻方.

① 对 A_2 的非中心线则只有 2 次**特优**线.

② 以 B_1, B_6 为对角线组, 有 4+4 个;

③ 分别以 $B_1, B_2; B_1, B_4; B_1, B_3; B_1, B_5; B_2, B_6; B_3, B_6; B_4, B_6; B_5, B_6$ 为对角线组, 各有 4 个.

因此, 分别以 $B_2, B_4; B_3, B_5$ 为对角线组, 各可得一个对称的 5 次**特优**的 7 阶完美幻方:

3	44	32	41	26	14	**15**	① ②	**38**	14	32	1	26	44	**20**
11	**20**	5	49	29	**38**	23		46	**15**	40	9	34	**3**	28
40	28	**8**	17	**2**	46	34	175,	5	23	**48**	17	**42**	11	29
43	31	37	**25**	13	19	7	5971,	13	31	7	**25**	43	19	37
16	4	**48**	33	**42**	22	10	229075,	21	39	**8**	33	**2**	27	45
17	**12**	21	1	45	**30**	39	9356179,	22	**47**	16	41	10	**35**	4
35	36	24	9	18	6	**47**	397334875.	**30**	6	24	49	18	36	**12**
14	32	15	41	3	26	**44**	③ ④	**44**	32	20	1	38	26	**14**
38	**5**	23	49	11	**29**	20		3	**40**	28	9	46	**34**	15
46	8	**34**	17	**40**	2	28	175,	11	48	**29**	17	**5**	42	23
19	37	7	**25**	43	13	31	5579,	19	7	37	**25**	13	43	31
22	48	**10**	33	**16**	42	4	199675,	27	8	**45**	33	**21**	2	39
30	**21**	39	1	27	**45**	12	7611779,	35	**16**	4	41	22	**10**	47
6	24	47	9	35	18	**36**	301784875.	**36**	24	12	49	30	18	**6**

(21)

而且这些 5 次**特优**的 7 阶完美幻方都是以各列和方的中心线为主对角线.

中心对称的 7 级排列(1) π_1 =(1,2,3,4,5,6,7)也是关于 1, 7 的偏对称排列. 因此, 由它到偏对称排列(1,2,5,6,3,4,7), (1,2,7,5,6,4,3)也有保列和方中心线不变的变换. 由偏对称排列得到的分段方, 列和方等是线对称的. 线对称中心分别是 1, 49. 与排列π_1 的各列和方比较它也是保了这些线对

称中心线不变的. 故也可得到分别以 $B_2, B_4; B_3, B_5$ 为对角线组的 3 次特优的 7 阶完美幻方. 而且, 其中还各含有 6 个 2 次特优的主对角线.

偏对称排列(1,2,5,6,3,4,7), (1,2,7,5,6,4,3)所给出的分段方、列和方及其特优性状况如下($\Sigma_7 = 175$):

1	2	5	6	3	4	7	A_2		1	2	7	5	6	4	3	A_2	
8	9	12	13	10	11	14			8	9	14	12	13	11	10		
29	30	33	34	31	32	35			43	44	49	47	48	46	45		
36	37	40	41	38	39	42			29	30	35	33	34	32	31		
15	16	19	20	17	18	21			36	37	42	40	41	39	38		
22	23	26	27	24	25	28			22	23	28	26	27	25	24		
43	44	47	48	45	46	49			15	16	21	19	20	18	17		
1	12	31	42	16	27	46	5971	226723	1	14	48	31	37	26	18	5831	B_2
2	13	32	36	19	24	49	5831		2	12	46	29	42	27	17	5887	
5	10	35	37	20	25	43	5593		7	13	45	30	40	25	15	5593	
6	11	29	40	17	28	44	5607		5	11	43	35	41	24	16	5733	
3	14	30	41	18	22	47	5803		6	10	44	33	39	22	21	5607	
4	8	33	38	21	23	48	5887	223405	4	8	49	34	38	23	19	5971	231427
7	9	34	39	15	26	45	5733	B_2	3	9	47	32	36	28	20	5803	
1	10	30	39	19	28	48	5971	226723	1	13	44	32	42	24	19	5831	B_4
2	11	33	42	20	22	45	5887	221137	2	11	49	31	40	22	20	5971	231427
5	14	34	36	17	23	46	5607		7	10	47	29	41	23	18	5733	
6	8	31	37	18	26	49	5831		5	8	48	30	39	28	17	5887	
3	9	32	40	21	27	43	5733		6	9	46	35	38	26	15	5803	
4	12	35	41	15	24	44	5803		4	14	45	33	36	27	16	5607	
7	13	29	38	16	25	47	5593	B_4	3	12	43	34	37	25	21	5593	
1	13	35	40	18	23	45	5873	218179	1	12	45	35	39	23	20	B_3	
2	10	29	41	21	26	46	5859		2	13	43	33	38	28	18		
5	11	30	38	15	27	49	5845		7	11	44	34	36	26	17		
6	14	33	39	16	24	43	5523		5	10	49	32	37	27	15	5873	225253
3	8	34	42	19	25	44	5915		6	8	47	31	42	25	16		
4	9	31	36	20	28	47	5747		4	9	48	29	40	24	21		
7	12	32	37	17	22	48	5663	B_3	3	14	46	30	41	22	19		
1	11	34	37	21	24	47	5873	218179	1	11	47	30	38	27	21	B_5	
2	14	31	40	15	25	48	5915		2	10	48	35	36	25	19		
5	8	32	41	16	28	45	5859		7	8	46	33	37	24	20		
6	9	35	38	19	22	46	5747		5	9	45	34	42	22	18		
3	12	29	39	20	23	49	5845		6	14	43	32	40	23	17		
4	13	30	42	17	26	43	5663		4	12	44	31	41	28	15		
7	10	33	36	18	27	44	5523	B_5	3	13	49	29	39	26	16	5873	225253

下面分别对各种中心对称排列和偏对称排列所得完美幻方特优性进行研究.

(3) 对称的 7 级排列π_3=(1,2,5,4,3,6,7); π_4=(1,2,6,7,5,4,3), (Σ_7= 175).

1	2	5	4	3	6	7	A_3	1	2	6	7	5	4	3	A_4
8	9	12	11	10	13	14		8	9	13	14	12	11	10	
29	30	33	32	31	34	35		36	37	41	42	40	39	38	
22	23	26	**25**	24	27	28		43	44	48	49	47	46	45	
15	16	19	18	17	20	21		29	30	34	35	33	32	31	
36	37	40	39	38	41	42		22	23	27	28	26	**25**	24	
43	44	47	46	45	48	49		15	16	20	21	19	18	17	
1	12	31	28	16	39	48	5971 B_2	1	12	37	46	34	24	21	5803 B_4
2	11	34	22	19	38	49	5971	2	11	41	45	35	22	19	5901
5	10	35	23	18	41	43	5733	6	10	42	43	33	23	18	5691 208747
4	13	29	26	17	42	44	5691	7	8	40	44	32	27	17	5691 207403
3	14	30	25	20	36	47	5635 203875	5	9	39	48	31	28	15	5901
6	8	33	24	21	37	46	5691	4	13	38	49	29	26	16	5803
7	9	32	27	15	40	45	5733	3	14	36	47	30	25	20	5635 203875
1	10	30	27	19	42	46	5971 B_4	1	13	40	45	30	28	18	5803 B_2
2	13	33	28	18	36	45	5691	2	14	39	43	34	26	17	5691 203371
5	14	32	22	17	37	48	5691	6	12	38	44	35	25	15	5635 203875 7797139
4	8	31	23	20	40	49	5971	7	11	36	48	33	24	16	5691 212779
3	9	34	26	21	39	43	5733	5	10	37	49	32	22	20	5803
6	12	35	25	15	38	44	5635 203875	4	8	41	47	31	23	21	5901
7	11	29	24	16	41	47	5733	3	9	42	46	29	27	19	5901
1	11	35	26	20	37	45	5817 B_3	1	11	42	44	31	26	20	5859 B_5
2	10	29	25	21	40	48	5915 224875	2	10	40	48	29	25	21	5915 224875 9170819
5	13	30	24	15	39	49	5817	6	8	39	49	30	24	19	5859
4	14	33	27	16	38	43	5579	7	9	38	47	34	22	18	5747
3	8	32	28	19	41	44	5859	5	13	36	46	35	23	17	5649
6	9	31	22	18	42	47	5859	4	14	37	45	33	27	15	5649
7	12	34	23	17	36	46	5579	3	12	41	43	32	28	16	5747
1	13	32	23	21	38	47	5817 B_5	1	14	38	48	32	23	19	5859 B_3
2	14	31	26	15	41	46	5859	2	12	36	49	31	27	18	5859
5	8	34	25	16	42	45	5915 224875	6	11	37	47	29	28	17	5649
4	9	35	24	19	36	48	5859	7	10	41	46	30	26	15	5747
3	12	29	27	18	37	49	5817	5	8	42	45	34	25	16	5915 224875 9009539
6	11	30	28	17	40	43	5579	4	9	40	43	35	24	20	5747
7	10	33	22	20	39	44	5579	3	13	39	44	33	22	21	5649

(4) 对称的 7 级排列π_5=(1,2,3,5,6,7,4); π_6=(1,2,4,6,7,5,3), (Σ_7= 175).

1	2	3	5	6	7	4	A_5	1	2	4	6	7	5	3	A_6
8	9	10	12	13	14	11		8	9	11	13	14	12	10	
15	16	17	19	20	21	18		22	23	**25**	27	28	26	24	
29	30	31	33	34	35	32		36	37	39	41	42	40	38	
36	37	38	40	41	42	39		43	44	46	48	49	47	45	
43	44	45	47	48	49	46		29	30	32	34	35	33	31	
22	23	24	26	27	28	**25**		15	16	18	20	21	19	17	

1	10	20	32	37	47	28	5887 B_2	1	14	23	40	46	31	20	5803 B_4
2	12	21	29	38	48	25	5803 216475	2	12	25	38	48	29	21	5803 216475
3	13	18	30	40	49	22	5887	4	10	27	36	49	30	19	5803
5	14	15	31	41	46	23	5733	6	8	28	37	47	32	17	5775
6	11	16	33	42	43	24	5691	7	9	26	39	45	34	15	5733
7	8	17	34	39	44	26	5691	5	11	24	41	43	35	16	5733
4	9	19	35	36	45	27	5733	3	13	22	42	44	33	18	5775

1	13	16	35	38	46	26	5887 B_4	1	11	28	38	44	34	19	5803 B_2
2	14	17	32	40	43	27	5691	2	13	26	36	46	35	17	5775
3	11	19	29	41	44	28	5733	4	14	24	37	48	33	15	5775
5	8	20	30	42	45	25	5803 216475	6	12	22	39	49	31	16	5803
6	9	21	31	39	47	22	5733	7	10	23	41	47	29	18	5733
7	10	18	33	36	48	23	5691	5	8	25	42	45	30	20	5803 216475
4	12	15	34	37	49	24	5887	3	9	27	40	43	32	21	5733

1	14	19	30	39	48	24	5859 B_5	1	12	27	37	45	35	18	5817 B_5
2	11	20	31	36	49	26	5859	2	10	28	39	43	33	20	5747
3	8	21	33	37	46	27	5817	4	8	26	41	44	31	21	5775
5	9	18	34	38	43	28	5663	6	9	24	42	46	29	19	5775
6	10	15	35	40	44	25	5747 212275	7	11	22	40	48	30	17	5747
7	12	16	32	41	45	22	5663	5	13	23	38	49	32	15	5817
4	13	17	29	42	47	23	5817	3	14	25	36	47	34	16	5747 212275

1	12	18	31	42	44	27	5859 B_3	1	13	24	39	47	30	21	5817 B_3
2	13	15	33	39	45	28	5817	2	14	22	41	45	32	19	5775
3	14	16	34	36	47	25	5747 212275	4	12	23	42	43	34	17	5747
5	11	17	35	37	48	22	5817	6	10	25	40	44	35	15	5747 212275
6	8	19	32	38	49	23	5859	7	8	27	38	46	33	16	5747
7	9	20	29	40	46	24	5663	5	9	28	36	48	31	18	5775
4	10	21	30	41	43	26	5663	3	11	26	37	49	29	20	5817

(5) 对称的 7 级排列π_7=(1,2,5,3,6,7,4); π_8= (1,2,4,6,7,3,5).

1	2	5	3	6	7	4	A_7	1	2	4	6	7	3	5	A_8
8	9	12	10	13	14	11		8	9	11	13	14	10	12	
29	30	33	31	34	35	32		22	23	**25**	27	28	24	26	
15	16	19	17	20	21	18		36	37	39	41	42	38	40	
36	37	40	38	41	42	39		43	44	46	48	49	45	47	
43	44	47	45	48	49	46		15	16	18	20	21	17	19	
22	23	26	24	27	28	**25**		29	30	32	34	35	31	33	

A_7	A_8								次和	1	2	3
B_4	B_2	3	8	34	16	42	47	25		175	6083	237475
B_2	B_4	2	10	35	15	40	48	25		175	6083	237475
B_5	B_3	6	12	29	21	38	44	25		175	5467	191275
B_3	B_5	5	14	30	20	36	45	25		175	5467	191275

(6) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,3,5,4,6,7)$; $\pi_8=(1,2,4,6,3,5,7)$

							A_3								A_4
1	2	3	5	4	6	7		1	2	4	6	3	5	7	
8	9	10	12	11	13	14		8	9	11	13	10	12	14	
15	16	17	19	18	20	21		22	23	25	27	24	26	28	
29	30	31	33	32	34	35		36	37	39	41	38	40	42	
22	23	24	26	25	27	28		15	16	18	20	17	19	21	
36	37	38	40	39	41	42		29	30	32	34	31	33	35	
43	44	45	47	46	48	49		43	44	46	48	45	47	49	

A_3	A_4								次和	1	2	3
B_2	B_4	1	10	18	35	23	40	48		175	6083	236467
B_4	B_2	1	11	16	34	24	42	47		175	6083	236467
B_3	B_5	1	12	21	31	27	37	46		175	5761	208453
B_5	B_3	1	13	19	30	28	39	45		175	5761	208453

(7) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,4,3,6,5,7)$; $\pi_8=(1,2,6,5,4,3,7)$.

							A_5								A_6
1	2	4	3	6	5	7		1	2	6	5	4	3	7	
8	9	11	10	13	12	14		8	9	13	12	11	10	14	
22	23	25	24	27	26	28		36	37	41	40	39	38	42	
15	16	18	17	20	19	21		29	30	34	33	32	31	35	
36	37	39	38	41	40	42		22	23	27	26	25	24	28	
29	30	32	31	34	33	35		15	16	20	19	18	17	21	
43	44	46	45	48	47	49		43	44	48	47	46	45	49	

A_5	A_6								次和	1	2	3
B_2	B_4	1	11	27	21	37	31	47		175	5831	214543
B_4	B_2	1	13	23	19	39	35	45		175	5831	214543
B_5	B_3	1	10	28	18	40	30	48		175	6013	230377
B_3	B_5	1	12	24	16	42	34	46		175	6013	230377

(8) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,6,4,5,3,7)$; $\pi_8=(1,2,5,3,6,4,7)$.

							A_7								A_8
1	2	6	4	5	3	7		1	2	5	3	6	4	7	
8	9	13	11	12	10	14		8	9	12	10	13	11	14	
36	37	41	39	40	38	42		29	30	33	31	34	32	35	
22	23	27	25	26	24	28		15	16	19	17	20	18	21	
29	30	34	32	33	31	35		36	37	40	38	41	39	42	
15	16	20	18	19	17	21		22	23	26	24	27	25	28	
43	44	48	46	47	45	49		43	44	47	45	48	46	49	

A_7	A_8								次和	1	2	3
B_2	B_4	1	13	40	28	30	18	45		175	5803	212107
B_4	B_2	1	12	37	24	34	21	46		175	5803	212107
B_5	B_3	1	10	39	23	35	19	48		175	6041	232813
B_3	B_5	1	11	42	27	31	16	47		175	6041	232813

(9) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,4,3,5,6,7)$; $\pi_8=(1,2,7,5,6,3,4)$.

							A_3								A_4
1	2	4	3	5	6	7		1	2	7	5	6	3	4	
8	9	11	10	12	13	14		8	9	14	12	13	10	11	
22	23	25	24	26	27	28		43	44	49	47	48	45	46	
15	16	18	17	19	20	21		29	30	35	33	34	31	32	
29	30	32	31	33	34	35		36	37	42	40	41	38	39	
36	37	39	38	40	41	42		15	16	21	19	20	17	18	
43	44	46	45	47	48	49		22	23	28	26	27	24	25	

A_3	A_4								次和	1	2	3
B_2	B_4	2	10	27	15	32	40	49		175	6083	238483
B_4	B_2	3	8	26	16	34	39	49		175	6083	238483
B_3	B_5	4	13	23	19	29	38	49		175	5761	218197
B_5	B_3	5	11	49	31	37	20	22		175	5761	218197

(10) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,3,7,4,5,6)$; $\pi_8=(1,2,5,6,3,7,4)$.

							A_5								A_6
1	2	3	7	4	5	6		1	2	5	6	3	7	4	
8	9	10	14	11	12	13		8	9	12	13	10	14	11	
15	16	17	21	18	19	20		29	30	33	34	31	35	32	
43	44	45	49	46	47	48		36	37	40	41	38	42	39	
22	23	24	28	25	26	27		15	16	19	20	17	21	18	
29	30	31	35	32	33	34		43	44	47	48	45	49	46	
36	37	38	42	39	40	41		22	23	26	27	24	28	25	

A_5	A_6								次和	1	2	3
B_2	B_4	4	13	16	49	26	29	38		175	5803	220843
B_4	B_2	5	10	20	49	22	32	37		175	5803	220843
B_3	B_5	2	11	15	49	27	31	40		175	6041	235837
B_5	B_3	3	8	19	49	23	34	39		175	6041	235837

(11) 偏对称排列$\pi_7=(1,2,4,7,3,5,6)$; $\pi_8=(1,2,5,6,4,7,3)$.

							A_7								A_8
1	2	4	7	3	5	6		1	2	5	6	4	7	3	
8	9	11	14	10	12	13		8	9	12	13	11	14	10	
22	23	25	28	24	26	27		29	30	33	34	32	35	31	
43	44	46	49	45	47	48		36	37	40	41	39	42	38	
15	16	18	21	17	19	20		22	23	26	27	25	28	24	
29	30	32	35	31	33	34		43	44	47	48	46	49	45	
36	37	39	42	38	40	41		15	16	19	20	18	21	17	

A_7	A_8								次和	1	2	3
B_2	B_4	3	13	23	49	19	29	39		175	5831	222607
B_4	B_2	5	11	27	49	15	31	37		175	5831	222607
B_3	B_5	2	10	22	49	20	32	40		175	6013	234073
B_5	B_3	4	8	26	49	16	34	38		175	6013	234073

以上各种情形，分别以B_2, B_4; B_3, B_5为对角线组，各可得一个主对角线相同的**3特优**的7阶完美幻方. 另外各还有一些2次特优的主对角线. 通过检查，任意用两个7级对称排列，相互交叉地作分段方的行、列序的情形，都不含有3次或3次以上的特优性.

2. 非对称的5次特优方

除了对称的特优完美幻方外，还会遇到一些非对称的特优方. 这是一种利用中心线的轨迹来

构作的保中心线变换，它与前面的保列和方中心线变换ψ很不相同. 前已知道，在以对称排列(1,2,3,4,5,6,7), (1,2,6,7,3,4,5)为行、列序构作的 7 阶分段方 A_1, A_2 中，都有 5 次特优线组

B_3 2 12 15 25 35 38 48 175 5971 229075 9356179 397334875

B_5 3 8 20 25 30 42 47 175 5971 229075 9356179 397334875

B_2 5 14 16 25 34 36 45 175 5579 199675 7911779 301784875 (22)

B_4 6 10 21 25 29 40 44 175 5579 199675 7911779 301784875

分别检查这两对特优线的足标在分段方 A_1, A_2 中的移动轨迹.

先看 B_3 B_5 组								B_3 B_5							
1	*8*	**15**	22	29	36	43	A_1	1	*8*	36	43	**15**	22	29	A_2
2	9	16	23	*30*	37	44		**2**	9	37	44	16	23	*30*	
3	10	17	24	31	**38**	45		6	13	41	**48**	*20*	27	34	
4	11	18	**25**	32	39	46		7	14	*42*	49	21	28	**35**	
5	**12**	19	26	33	40	*47*		*3*	10	**38**	45	17	24	31	
6	13	*20*	27	34	41	**48**		4	11	39	46	18	**25**	32	
7	14	21	28	**35**	*42*	49		5	**12**	40	*47*	19	26	33	

B_3 (黑体)A_1　　　　$B_3 A_2$

a_{12}, a_{25}, a_{57}, a_{76}, a_{63}, a_{31}　　　　a_{12}, a_{27}, a_{74}, a_{43}, a_{35}, a_{51}

1 2 5 7 6 3　　　　1 2 7 4 3 5

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓　　　　↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓　　　　(23)

2 5 7 6 3 1　　　　2 7 4 3 5 1

原排列 1 2 3 4 5 6 7

2 5 1 4 7 3 6 → 1 2 3 4 5 6 7

没有得到新的排列. 对 A_2 结论相同. 可同样检查 B_5 没有变化.

对另一对特优线也有移动轨迹. 如下:

B_2 (黑体) A_1　　　　B_2 A2

a_{15}, a_{56}, a_{61}, a_{32}, a_{27}, a_{73}　　　　a_{17}, a_{73}, a_{31}, a_{24}, a_{45}, a_{52}

1 5 6 3 2 7　　　　1 7 3 2 4 5

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓　　　　↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓　　　　(24)

5 6 1 2 7 3　　　　7 3 1 4 5 2

再看 B_2 B_4 组								B_2 B_4							
1	8	15	22	*29*	**36**	43	A_1	1	8	**36**	43	15	22	*29*	A_2
2	9	**16**	23	30	37	*44*		2	9	37	*44*	**16**	23	30	
3	*10*	17	24	31	38	**45**		*6*	13	41	48	20	27	**34**	
4	11	18	**25**	32	39	46		7	**14**	42	49	*21*	28	35	
5	12	19	26	33	*40*	47		3	*10*	38	**45**	17	24	31	
6	13	20	27	**34**	41	48		4	11	39	46	18	**25**	32	
7	**14**	*21*	28	35	42	49		**5**	12	*40*	47	19	26	33	

所以分段方行列序可以有变换:

原排列　1　2　3　4　5　6　7

　　　　1　7　2　4　5　6　3　→　1　2　5　3　7　4　6

　　　　1　3　7　4　5　6　2　→　1　2　6　5　4　7　3

原排列　1　2　6　7　3　4　5

　　　　1　4　6　7　3　5　2　→　1　2　5　3　7　6　4

　　　　1　5　6　7　3　2　4　→　1　2　7　5　4　3　6

从而得非对称排列:

$$① (1,2,5,3,7,4,6),\ ② (1,2,6,5,4,7,3),\ ③ (1,2,7,4,6,5,3),\ ④ (1,2,5,6,4,3,7). \tag{25}$$

现在, 分别以这些不对称排列为行, 列序作分段方, 5 次特优的 7 阶完美幻方:

(1)	1	8	29	15	43	22	36	**29**	22	8	43	1	15	**36**
	2	9	30	16	44	23	37	7	**21**	42	35	28	**14**	49
(1,2,5,3,7,4,6)	5	12	33	19	47	26	40	23	9	**44**	2	**16**	37	30
	3	10	31	17	45	24	38	18	39	32	**25**	11	46	4
	7	14	35	21	49	28	42	12	47	**5**	19	**40**	33	26
	4	11	32	18	46	25	39	41	**34**	27	13	48	**6**	20
	6	13	34	20	48	27	41	**45**	3	17	38	31	24	**10**
(2)	1	8	36	29	22	43	15	**21**	4	12	41	30	22	**45**
	2	9	37	30	23	44	16	37	**29**	24	49	18	**5**	13
(1,2,6,5,4,7,3)	6	13	41	34	27	48	20	46	19	**6**	9	**36**	31	28
	5	12	40	33	26	47	19	8	38	35	**25**	47	20	2
	4	11	39	32	25	46	18	26	48	**16**	1	**10**	42	32
	7	14	42	35	28	45	21	3	**14**	39	33	27	**44**	15
	3	10	38	31	24	45	17	**34**	23	43	17	7	11	**40**
(3)	1	8	43	22	36	29	15	**21**	13	24	30	4	47	**36**
	2	9	44	23	37	30	16	26	**29**	7	48	38	**16**	11
(1,2,7,4,6,5,3)	7	14	49	28	42	35	21	2	46	**40**	15	**14**	27	31
	4	11	46	25	39	32	18	41	17	9	**25**	33	1	49
	6	13	48	27	41	34	20	8	28	**34**	3	**44**	39	19
	5	12	47	26	40	33	19	32	**5**	43	42	20	**10**	23
	3	10	45	24	38	31	17	**45**	37	18	12	22	35	**6**
(4)	1	8	29	36	22	15	43	**6**	31	22	47	11	42	**16**
	2	9	30	37	23	16	44	28	**44**	13	38	15	**5**	32
(1,2,5,6,4,3,7)	5	12	33	40	26	19	47	12	39	**21**	2	**34**	24	43
	6	13	34	41	27	20	48	17	1	33	**25**	49	9	41
	4	11	32	39	25	18	46	30	27	**45**	8	**40**	18	7
	3	10	31	38	24	17	45	46	**14**	37	20	3	**29**	26
	7	14	35	42	28	21	49	**36**	19	4	35	23	48	**10**

(1), (2), (3), (4)就是 4 个 5 次特优的 7 阶完美幻方, 它们的主对角线都是:

　　6　10　21　25　29　40　44

　　5　14　16　25　34　36　45

175　5579　199675　7611779　301784875

(1), (2), (3), (4)与前面所得各 5 次特优方均是不同构, 它们之间也互不同构. 从而这些都是不同的基本的 5 次特优 7 阶完美幻方. 特别地, 它们是不对称的. 当然, 它们也各有许多同构的完美

幻方, 例如下列两方分别与(1),(4)同构. 因为

6	27	20	13	41	48	**34**
37	**44**	30	2	23	**16**	9
24	17	**10**	38	**45**	31	3
46	32	4	**25**	18	11	39
15	8	**36**	43	**29**	1	22
33	**5**	26	19	12	**40**	47
14	42	49	35	7	28	**21**

$=(6,3,7,4,1,5,2)(1)(6,3,7,4,1,5,2)$.

40	7	27	8	18	30	**45**
23	**10**	19	35	48	**36**	4
15	32	**44**	38	**5**	28	13
49	41	1	**25**	9	17	33
3	26	**14**	20	**29**	46	37
11	**16**	31	47	42	**6**	22
34	43	39	2	24	12	**21**

$=(5,7,2,4,6,1,3)(4)(5,7,2,4,6,1,3)$.

四、11 阶完美幻方的特优性

当 $n=11$, $F=\{1,2,3,\cdots,121\}$, $\Sigma_{11}=671$.

1. 11 阶对称排列

有$\mu(11)=384$ 个 11 级对称排列. 它们可给出如下(中心数 6):

345	354	435	453	534	543
347	374	437	473	734	743
385	358	735	753	538	583
387	378	837	873	738	783
945	954	495	459	594	549
947	974	497	479	754	745
985	958	895	859	598	589
987	978	897	879	798	789

(26)

每一个可生成如下 8 种对称的 11 级排列. 如:

879

① (1,2,8,7,9,6,3,5,4,10,11), (1,2,8,7,9,3,5,4,10,11,6),

② (1,2,7,8,6,4,5,10,11,3,9), (1,2,7,8,4,5,10,11,3,6,9),

③ (1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3), (1,2,5,6,7,10,11,9,4,8,3),

④ (1,2,10,11,4,9,7,6,5,3,8); (1,2,6,10,11,4,9,7,5,3,8).

374

⑤ (1,2,3,7,4,6,8,5,9,10,11), (1,2,3,7,4,8,5,9,10,11,6),

⑥ (1,2,7,3,6,9,5,10,11,8,4), (1,2,7,3,9,5,10,11,8,6,4),

⑦ (1,2,5,7,10,11,4,9,6,3,8), (1,2,5,6,7,10,11,4,9,3,8),

⑧ (1,2,10,11,9,4,7,6,5,8,3); (1,2,6,10,11,9,4,7,5,8,3). (27)

后 4 条是前 4 条的中心位置对偶. 前 4 条由第①条通过保列和方中心线变换 ψ 而得:

①(1,2,8,7,9,6,3,5,4,10,11)	→ ψ	②(1,2,7,8,6,4,5,10,11; 3,9)	
		↓ 轮回	
(9,1,7,2,6,10,5,11,3; 4,8)	← ψ	(9,1,2,7,8,6,4,5,10,11,3)	
↓ 循环			
④(1,2,10,11,4,9,7,6,5,3,8)	→ 轮回	(10,11,4,9,7,6,5,3,8,1,2)	(28)
		↓ ψ	
③(1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3)	← 轮回	(10,11,9,4,6,8,3,1,2; 5,7)	
↓ 轮回			
(7,10,11,9,4,6,8,3,1,2,5)	→ ψ	(7,10,9,11,6,1,3,2,5; 8,4)	
		↓ 循环	
		①(1,2,8,7,9,6,3,5,4,10,11)	

由①、②、③、④可知, 这里的保列和方中心线变换 ψ 与前面一致.

2. 5 次特优(***A***, ***B*** 系列)

A ③ π_1=(1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3)=(1,9,2,4,5,6,7,8,10,3,11)=π_2

Σ_{11}= 671. 对称中心 61 $a+a'$= 122.

1	9	2	4	5	6	7	8	10	3	11	
89	97	90	92	93	94	95	96	98	91	99	***A***
12	20	13	15	16	17	18	19	21	14	22	
34	42	35	37	38	39	40	41	43	36	44	
45	53	46	48	49	50	51	52	54	47	55	
56	64	57	59	60	61	62	63	65	58	66	
67	75	68	70	71	72	73	74	76	69	77	
78	86	79	81	82	83	84	85	87	80	88	
100	108	101	103	104	105	106	107	109	102	110	
23	31	24	26	27	28	29	30	32	25	33	
111	119	112	114	115	116	117	118	120	113	121	

1	97	13	37	49	61	73	85	109	25	121	56771	B_1
9	90	15	38	50	62	74	87	102	33	111		
2	92	16	39	51	63	76	80	110	23	119		
4	93	17	40	52	65	69	88	100	31	112		
5	94	18	41	54	58	77	78	108	24	114		
6	95	19	43	47	66	67	86	101	26	115		
7	96	21	36	55	56	75	79	103	27	116		
8	98	14	44	45	64	68	81	104	28	117		
10	91	22	34	53	57	70	82	105	29	118		
3	99	12	42	46	59	71	83	106	30	120		
11	89	20	35	48	60	72	84	107	32	113		

1	99	14	43	52	62	72	82	103	24	119		B_{10}
9	89	22	36	54	63	73	83	104	26	112		
2	97	45	44	47	65	74	84	105	27	114		
4	90	20	34	55	58	76	85	106	28	115		
5	92	13	41	45	66	69	87	107	29	116		
6	93	15	35	53	56	77	80	109	30	117		
7	94	16	37	46	64	67	88	102	32	118		
8	95	17	38	48	57	75	78	110	25	120		
10	96	18	39	49	59	68	86	100	33	113		
3	96	19	40	50	60	70	79	108	23	121		
11	91	21	41	51	61	71	81	101	31	111	51931	

1	96	15	44	51	57	69	83	108	32	115				B_7
9	98	16	34	52	59	77	84	101	25	116				
2	91	17	42	54	60	67	85	103	33	117				
4	99	18	35	47	61	75	87	104	23	118	55759	5210315	516464839	
5	89	19	37	55	62	68	80	105	31	120				
6	97	21	38	45	63	70	88	106	24	113				
7	90	14	39	53	65	71	78	117	26	121				
8	92	22	40	46	58	72	86	109	27	111				
10	93	12	41	48	66	73	79	102	28	119				
3	94	20	43	49	56	74	81	110	29	112				
11	95	13	36	50	64	76	82	100	30	114				

1	98	17	35	55	63	71	86	102	29	114				B_8
9	91	18	37	45	65	72	79	110	30	115				
2	99	19	38	53	58	73	81	100	32	116				
4	89	21	39	46	66	74	82	108	25	117				
5	97	14	40	48	56	76	83	101	33	118				
6	90	22	41	49	64	69	84	103	23	120				
7	92	12	43	50	57	77	85	104	31	113				
8	93	20	36	51	59	67	87	105	24	121				
10	94	13	44	52	60	75	80	106	26	111				
3	95	15	34	54	61	68	88	107	27	119	55759	5210315	518682439	
11	93	16	42	47	62	70	78	108	28	112				

1	90	16	40	54	66	75	81	105	30	113			B_2	
9	92	17	41	47	56	68	82	106	32	121	54109			
2	93	18	43	55	64	70	83	107	25	111	54131			
4	94	19	36	45	57	71	84	109	33	119	55011			
5	95	21	44	53	59	72	85	102	23	112	53603	4771877		
6	96	14	34	46	60	73	87	110	31	114	55275			
7	98	22	42	48	61	74	80	100	24	115	53603	4815767	460918403	45891811031
8	91	12	35	49	62	76	88	108	26	116				
10	99	20	37	50	63	69	78	101	27	117	63603	4859657		
3	89	13	38	51	65	77	86	103	28	118				
11	97	15	39	52	58	67	79	104	29	120				

1	95	20	41	46	65	70	80	104	33	116			B_6	
9	96	13	43	48	58	71	88	105	23	117				
2	98	15	36	49	66	72	78	106	31	118				
4	91	16	44	50	56	73	86	107	24	120	55275			
5	99	17	34	51	64	74	79	109	26	113	55011			
6	89	18	42	52	57	76	81	102	27	121	54109			
7	97	19	35	54	59	69	82	110	28	111	54131			
8	90	21	37	47	60	77	83	100	29	119	53603	4847117		
10	92	14	38	55	61	67	84	108	30	112	53603	4815767	460918403	45891811031
3	93	22	39	45	62	75	85	101	32	114	53603	4784417		
11	94	12	40	46	63	68	87	103	25	116				

1	94	22	38	47	59	76	79	107	31	117	54571	4993769	B_5	
9	95	12	39	55	60	69	81	109	24	118	55099	5113361		
2	96	20	40	45	61	77	82	102	26	120	55099	5089535	502026547	51638523431
4	98	13	41	53	62	67	83	110	27	113	55099	5065709		
5	91	15	43	46	63	75	84	100	28	121	54571	4992053		
6	99	16	36	48	65	68	85	108	29	111	54593			
7	89	17	44	49	58	70	87	101	30	119	53691			
8	97	18	34	50	66	71	80	103	32	112	53427			
10	90	19	42	51	56	72	88	104	25	114				
3	92	21	35	52	64	73	78	105	33	115				
11	93	14	37	54	57	74	86	106	23	116				

1	91	19	39	48	64	77	87	106	27	112	54571	4923149	B_9	
9	99	21	40	49	57	67	80	107	28	114				
2	89	14	41	50	59	75	88	109	29	115	55099	5050661		
4	97	22	43	51	60	68	78	102	30	116				
5	90	12	36	52	61	70	86	110	32	117	55099	5089535	502026547	51638523431
6	92	20	44	54	62	71	79	100	25	118	53427			
7	93	13	34	47	63	72	81	108	33	120	55099	5128409		
8	94	15	42	55	65	73	82	101	23	113	53691			
10	95	16	35	45	58	74	83	103	31	121	54571	5062673		
3	96	17	37	53	66	76	84	104	24	111	54593			
11	98	18	38	46	56	69	85	105	26	119				

1	92	18	36	53	60	74	88	101	28	120	55099	5063003	B_3
9	93	19	44	46	61	76	78	103	29	113	52943	4694987	443696231
2	94	21	34	48	62	69	86	104	30	121	55099	5116067	
4	95	14	42	49	63	77	79	105	32	111	53911		
5	96	22	35	50	65	67	81	106	25	119	54747		
6	98	12	37	51	58	75	82	107	33	112	54549		
7	91	20	38	52	66	68	83	109	23	114	54153		
8	99	13	39	54	56	70	84	102	31	115			
10	89	15	40	47	64	71	85	110	24	116			
3	97	16	41	55	57	72	87	100	26	117			
11	90	17	43	45	59	73	80	108	27	118			

1	93	21	42	50	58	68	84	110	26	118			B_4
9	94	14	35	51	66	70	85	100	27	120			
2	95	22	37	52	56	71	87	108	28	113			
4	96	12	38	54	64	72	80	101	29	121			
5	98	20	39	47	57	73	88	103	30	111			
6	91	13	40	55	59	74	78	104	32	119			
7	99	15	41	45	60	76	86	105	25	112			
8	89	16	43	53	61	69	79	106	33	114	52943	4694987	445913831
10	97	17	36	46	62	77	81	107	23	115			
3	90	18	44	48	63	67	82	109	31	116			
11	92	19	34	49	65	75	83	102	24	117			

结合 7 阶情形, 对素数阶之各列和方的次和有如下结论:

①相等的最高次和总在各列和方的中心线(对称中心所在线)上实现;

②各列和方中, 关于中心线对称位置之 2 线的平方和相等;

③非中心线上的平方和相等, 3 次和却不一定相等. 但对对称的列和方而言, 对称 2 线的 3 次和之和总是相等的, 或是平均相等的.

因此, 最高的特优性只有以列和方的中心线为主对角线才能实现.

所以, 这里分别以 B_2, B_6; B_5, B_9 为对角线组构作 11 阶完美幻方, 可得 5 次特优的 11 阶完美幻方; 以 B_3, B_4; B_7, B_8 为对角线组构作 11 阶完美幻方, 可得 3 次特优的 11 阶完美幻方.

素数阶特优完美幻方的构作方法:

①以选定的排列为行、列序构作分段方. 如 A.

②在分段方中, 标出指定的特优线元素. 只要这些元素在不同行不同列上就是合格的.

③把特优线分别调到方之上边(如 B_2)和右边(如 B_6). 使方之为行、列线组, 如下方.

④检查两对角线是否为 A_1, A_0. 若有则执行行的轮回重排. 再检查, 若均无, 则执行⑤.

⑤对所给方执行拓扑变换得特优幻方, 如下①. 再对 A 执行第四步, 可找出所有可能的以指

定线为主对角线的完美幻方．如下②，③等．

74	80	100	24	115	7	98	22	42	48	61	为得 B_2, B_6
26	116	8	91	12	35	49	62	76	88	108	为对角线组
99	20	37	50	63	69	78	101	27	117	10	的特优幻方
51	65	77	86	103	28	118	3	89	13	38	先作以 B_2,
79	104	29	120	11	97	15	39	52	58	67	B_6 为行，列
113	1	90	16	40	54	66	75	81	105	30	线组之完美
17	41	47	56	68	82	106	32	121	9	92	幻方再用拓
64	70	83	107	25	111	2	93	18	43	55	扑变换转行
109	33	119	4	94	19	36	45	57	71	84	列线组为对
5	95	21	44	53	59	72	85	102	23	112	角线组
34	46	60	73	87	110	31	114	6	96	14	↓

74	46	21	4	25	82	66	39	89	117	108	①
116	100	73	53	19	2	32	81	58	38	99	行 B_8 列 B_5
37	91	115	110	72	45	18	9	30	79	65	
86	63	35	98	114	102	71	55	17	1	29	I B_2 II B_6
11	28	78	62	42	96	112	109	70	47	16	
54	15	3	27	88	61	34	95	119	107	68	5 次特优
106	75	52	13	10	26	80	60	44	94	111	671
93	121	105	67	51	20	8	24	87	59	36	53603
57	43	92	113	104	77	50	12	7	31	85	4815767
23	84	64	41	90	120	103	69	49	22	6	460918403
14	5	33	83	56	40	97	118	101	76	48	45891811031

74	95	83	16	103	35	31	45	121	58	10	②
20	100	44	25	54	118	62	6	71	92	79	行 B_9 列 B_7
29	50	115	59	2	75	89	88	14	109	41	
56	11	69	98	85	18	105	38	26	46	119	I B_2 II B_6
94	82	15	101	42	23	55	113	65	8	73	
110	36	32	52	117	61	5	70	90	86	12	
49	114	57	9	67	99	80	21	107	40	28	671
3	76	96	84	17	104	37	24	53	111	66	53603
81	13	108	34	33	47	120	63	7	72	93	4815767
43	30	51	116	60	4	68	97	78	22	102	460918403
112	64	1	77	91	87	19	106	39	27	48	45891811031

74	65	47	44	12	97	2	114	27	105	84	③
33	100	86	68	59	49	39	18	96	30	113	行 B_{10} 列 B_1
90	4	115	28	106	85	76	58	55	34	20	
50	40	19	98	3	121	23	108	79	70	60	I B_2 II B_6
87	69	66	45	42	13	92	5	116	29	107	
111	31	101	81	71	61	51	41	21	91	11	
15	93	6	117	30	109	80	77	56	53	35	671
62	52	43	14	99	1	119	24	103	82	72	53603
102	88	67	64	46	37	16	94	7	118	32	4815767
9	112	26	104	83	73	63	54	36	22	89	460918403
38	17	95	8	120	25	110	78	75	57	48	45891811031

82	119	14	62	103	1	43	72	24	99	**52**	④
105	**2**	44	74	27	97	47	84	114	**12**	65	列 B_1 行 B_{10}
29	92	**45**	87	116	13	66	107	**5**	42	69	
118	16	64	**102**	7	37	67	**32**	94	46	88	ⅠB_5ⅡB_9
10	39	68	33	**96**	49	**86**	113	18	59	100	
91	51	81	111	21	**61**	101	11	41	71	31	
22	63	104	9	**36**	73	**26**	89	54	83	112	671
34	76	28	**90**	55	85	115	**20**	58	106	4	55099
53	80	**117**	15	56	109	6	35	**77**	30	93	5089535
57	**110**	8	38	75	25	95	48	78	**120**	17	502026547
70	23	98	50	79	121	19	60	108	3	**40**	51638523431

12	107	37	33	51	112	58	6	75	98	**82**	⑤
94	**86**	21	104	34	30	48	121	62	**2**	69	列 B_6 行 B_3
11	73	**90**	80	17	108	43	27	**45**	118	59	
115	56	8	**70**	99	84	13	**102**	39	31	54	ⅠB_9ⅡB_5
25	50	119	65	**5**	67	**96**	81	22	106	35	
103	44	29	46	113	**61**	9	76	93	78	19	671
87	16	100	41	**26**	55	**117**	57	3	72	97	55099
68	91	83	**20**	109	38	23	**52**	114	66	7	5089535
63	4	**77**	95	79	14	105	42	**32**	49	111	502026547
53	**120**	60	1	74	92	88	18	101	**36**	28	51638523431
40	31	47	116	64	10	71	89	85	15	**110**	

86	112	15	60	105	7	41	76	25	99	**45**	⑥
103	**5**	39	73	30	98	47	88	111	**20**	57	列 B_2 行 B_4
28	95	**52**	87	113	22	56	108	**2**	37	71	
118	21	58	**110**	1	42	68	**26**	93	50	84	ⅠB_9ⅡB_5
3	44	67	31	**90**	48	**82**	116	18	63	109	
89	53	79	114	16	**61**	106	8	43	69	33	671
13	59	104	6	**40**	74	**32**	91	55	78	119	55099
38	72	29	**96**	54	80	121	**12**	64	101	4	5089535
51	85	**120**	14	66	100	9	35	**70**	27	94	502026547
65	**102**	11	34	75	31	92	49	83	**117**	19	51638523431
77	23	97	46	81	115	17	62	107	10	**36**	

118	16	64	102	7	37	67	32	94	46	**88**	①
70	**23**	98	50	79	121	19	60	108	**3**	40	列 B_1 行 B_{10}
22	63	**104**	9	36	73	26	89	**54**	83	112	
29	92	45	**87**	116	13	66	**107**	5	42	69	ⅠB_7ⅡB_8
57	110	8	38	**75**	25	**95**	48	78	120	17	
91	51	81	111	21	**61**	101	11	41	71	31	
105	2	44	74	**27**	97	**47**	84	114	12	65	3 次特优
53	80	117	**15**	56	109	6	**35**	77	30	93	671
10	39	**68**	33	96	49	86	113	**18**	59	100	55759
82	**119**	14	62	103	1	43	72	24	**99**	52	5210315
34	76	28	90	55	85	115	20	58	106	**4**	

18	101	36	28	53	120	60	1	74	92	**88**	②
97	**87**	16	100	41	26	55	117	57	**3**	72	列 B_5 行 B_3
8	70	**99**	84	13	102	39	31	**54**	115	56	
112	58	6	**75**	98	82	12	**107**	37	33	51	ⅠB_7ⅡB_8
32	49	111	63	**4**	77	**95**	79	14	105	42	
103	44	29	46	113	**61**	9	76	93	78	19	
80	17	108	43	**27**	45	**118**	59	11	73	90	671
71	89	85	**15**	110	40	31	**47**	116	64	10	55759
66	7	**68**	91	83	20	109	38	**23**	52	114	5210315
50	**119**	65	5	67	96	81	22	106	**35**	25	
34	30	48	121	62	2	69	94	86	21	**104**	

75	31	92	49	83	117	19	65	102	11	**34**	③
59	**104**	6	40	74	32	91	55	78	**119**	13	列 B_9 行 B_4
50	84	**118**	21	58	110	1	42	**68**	26	93	
41	76	25	**99**	45	86	112	**15**	60	105	7	Ⅰ B_7 Ⅱ B_8
14	66	100	9	**35**	70	**27**	94	51	85	120	
89	53	79	114	16	**61**	106	8	43	69	33	
2	37	71	28	**95**	52	**87**	113	22	56	108	671
115	17	62	**107**	10	36	77	**23**	97	46	81	55759
29	96	**54**	80	121	12	64	101	**4**	38	72	5210315
109	**3**	44	67	31	90	48	82	116	**18**	63	
88	111	20	57	103	5	39	73	30	98	**47**	

29	92	45	87	116	13	66	107	5	42	**69**	④
34	**76**	28	90	55	85	115	20	58	**106**	4	列 B_1 行 B_{10}
105	2	**44**	74	27	97	47	84	**114**	12	65	
22	63	104	**9**	36	73	26	**89**	54	83	112	Ⅰ B_3 Ⅱ B_4
82	119	14	62	**103**	1	**43**	72	24	99	52	
91	51	81	111	21	**61**	101	11	41	71	31	
70	23	98	50	**79**	121	**19**	60	108	3	40	
10	39	68	**33**	96	49	86	**113**	18	59	100	671
57	110	**8**	38	75	25	95	48	**78**	120	17	52943
118	**16**	64	102	7	37	67	32	94	**46**	88	4694987
53	80	117	15	56	109	6	35	77	30	**93**	

29	102	86	71	63	55	35	17	98	1	**114**	⑤
83	**76**	56	48	40	14	97	5	118	**33**	101	列 B_6 行 B_8
60	52	**44**	13	94	10	111	26	**106**	80	75	
37	18	91	**9**	115	30	110	**79**	72	65	45	Ⅰ B_3 Ⅱ B_4
90	6	120	23	**103**	84	**69**	64	49	41	22	
119	27	107	88	68	**61**	54	34	15	95	3	
100	81	73	58	**53**	38	**19**	99	2	116	32	
77	57	50	**43**	12	92	7	**113**	31	104	85	671
47	42	**16**	96	11	112	28	109	**78**	70	62	52943
21	**89**	4	117	25	108	82	74	66	**46**	39	4694987
8	121	24	105	87	67	59	51	36	20	**93**	

76	91	88	12	108	35	26	49	116	62	**8**	⑥
13	**103**	38	28	51	118	65	3	77	**89**	86	
30	54	**113**	66	1	75	90	81	**16**	105	40	列 B_7 行 B_2
64	2	70	**93**	83	18	107	**43**	25	55	111	
95	85	21	102	**44**	23	**53**	112	59	5	72	Ⅰ B_3 Ⅱ B_4
100	42	24	48	115	**61**	7	74	98	80	22	
50	117	63	10	**69**	99	**78**	20	101	37	27	
11	67	97	**79**	15	104	39	**29**	52	120	58	671
82	17	**106**	41	32	47	121	56	**9**	68	92	52943
36	**33**	45	119	57	4	71	94	84	**19**	109	·4694987
114	60	6	73	96	87	14	110	34	31	**46**	

② (1,8,5,3,2,6,10,9,7,4,11)～(1,2,7,8,6,4,5,10,11,3,9). 给出分段方 $\boldsymbol{B}$ 如下:

1	8	5	3	2	6	10	9	7	4	11	
78	85	82	80	79	83	87	86	84	81	88	$\boldsymbol{B}$
45	52	49	47	46	50	54	53	51	48	55	
23	30	27	25	24	28	32	31	29	26	33	
12	19	16	14	13	17	21	20	18	15	22	
56	63	60	58	57	61	65	64	62	59	66	
100	107	104	102	101	105	109	108	106	103	110	
89	96	93	91	90	94	98	97	95	92	99	
67	74	71	69	68	72	76	75	73	70	77	
34	41	38	36	35	39	43	42	40	37	44	
111	118	115	113	112	116	120	119	117	114	121	

$\boldsymbol{B}$ 之各列和方中心线与①中 $\boldsymbol{A}$ 的一样:

$\boldsymbol{B}_2$	7	98	22	42	48	61	74	80	100	24	115					
$\boldsymbol{B}_6$	10	92	14	38	55	61	67	84	108	30	112					
												671	53603	4815767	460918403	45891811031
$\boldsymbol{B}_5$	2	96	20	40	45	61	77	82	102	26	120					
$\boldsymbol{B}_9$	5	90	12	36	52	61	70	86	110	32	117					(29)
												671	55099	5089535	502026547	51638523431
$\boldsymbol{B}_3$	9	93	19	44	46	61	76	78	103	29	113	671	52943	4694987	443696231	
$\boldsymbol{B}_4$	8	89	16	43	53	61	69	79	106	33	114	671	52943	4694987	445913831	
$\boldsymbol{B}_7$	4	99	18	35	47	61	75	87	104	23	118	671	55759	5210315	516464839	
$\boldsymbol{B}_8$	3	95	15	34	54	61	68	88	107	27	119	671	55759	5210315	518682439	

以列和方 $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_6$; $\boldsymbol{B}_5$, $\boldsymbol{B}_9$ 配对作对角线组可构作 5 次特优的 11 阶完美幻方. 但各列和方的其他线的组成却不同.

48	105	118	29	90	1	20	69	88	65	38	⑦
33	98	5	15	72	85	62	35	45	108	113	列 $\boldsymbol{B}_1$ 行 $\boldsymbol{B}_{10}$
12	75	80	66	43	49	103	116	30	95	2	
63	40	46	100	119	25	99	10	16	70	83	Ⅰ $\boldsymbol{B}_2$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$
104	114	28	96	7	13	67	86	58	44	54	
91	11	21	71	81	61	41	51	101	111	31	671
68	78	64	36	55	109	115	26	94	8	18	53603
39	52	106	112	23	97	3	22	76	82	59	4815767
120	27	92	6	19	73	79	56	42	47	110	460918403
9	14	77	87	60	37	50	107	117	24	89	45891811031
84	57	34	53	102	121	32	93	4	17	74	

24	76	51	99	85	102	6	64	114	12	38	⑧
56	115	13	43	29	77	52	91	83	108	4	列 B_9 行 B_7
97	81	100	5	57	120	18	44	30	69	50	
36	28	75	48	89	82	101	10	62	121	19	Ⅰ B_2 Ⅱ B_6
11	63	113	17	42	26	67	49	90	87	106	
54	95	88	107	3	61	119	15	34	27	68	671
16	35	32	73	55	96	80	105	9	59	111	53603
103	1	60	112	21	40	33	74	47	94	86	4815767
72	53	92	78	104	2	65	117	22	41	25	460918403
118	14	39	31	70	45	93	79	109	7	66	45891811031
84	110	8	58	116	20	37	23	71	46	98	

22	119	57	8	103	87	91	45	73	28	38	⑨
96	48	76	25	34	18	116	60	11	108	79	列 B_8 行 B_5
113	56	7	105	82	99	53	68	30	37	21	
50	71	33	42	13	118	59	10	102	78	95	Ⅰ B_2 Ⅱ B_6
64	2	107	81	98	47	67	29	39	16	121	
70	32	36	12	117	61	5	110	86	90	52	671
1	106	83	93	55	75	24	41	15	120	58	53603
27	44	20	112	63	4	109	80	89	51	72	4815767
101	85	92	54	69	23	40	17	115	66	9	460918403
43	14	111	62	6	104	88	97	46	74	26	45891811031
84	94	49	77	31	35	19	114	65	3	100	

90	118	48	65	69	1	29	105	38	88	20	⑩
72	5	33	108	35	85	15	98	113	45	62	列 B_1 行 B_{10}
43	80	12	95	116	49	66	75	2	30	103	
119	46	63	70	10	25	100	40	83	16	99	Ⅰ B_9 Ⅱ B_5
7	28	104	44	86	13	96	114	54	58	67	
81	21	91	111	51	61	71	11	31	101	41	671
55	64	68	8	26	109	36	78	18	94	115	55099
23	106	39	82	22	97	112	52	59	76	3	5089535
19	92	120	47	56	73	6	27	110	42	79	502026547
60	77	9	24	107	37	87	14	89	117	50	51638523431
102	34	84	17	93	121	53	57	74	4	32	

120	4	85	46	31	22	60	105	95	67	36	⑪
72	40	111	3	87	48	30	13	64	110	93	列 B_6 行 B_3
101	97	77	38	116	7	78	47	32	15	63	
14	65	103	96	68	42	121	5	83	51	23	Ⅰ B_5 Ⅱ B_9
49	28	18	56	102	98	70	41	112	9	88	
8	79	53	43	16	61	106	89	69	43	114	671
34	113	10	81	52	24	20	66	104	94	73	55099
99	71	39	117	1	80	54	26	19	57	108	5089535
59	107	90	75	44	115	6	84	45	25	21	502026547
29	12	58	109	92	74	35	119	11	82	50	51638523431
86	55	27	17	62	100	91	76	37	118	2	

45	24	18	63	105	92	71	43	121	3	86	⑫
106	96	72	37	115	10	88	47	31	12	57	列 B_2 行 B_4
116	4	82	54	33	14	64	100	90	73	41	
27	21	66	102	97	67	35	117	8	83	48	Ⅰ B_5 Ⅱ B_9
99	69	42	111	2	84	52	28	15	60	109	
9	78	46	29	19	61	103	93	76	44	113	671
13	62	107	94	70	38	120	11	80	53	23	55099
74	39	114	5	87	55	25	20	56	101	95	5089535
81	49	32	22	58	108	89	68	40	118	6	502026547
65	110	91	75	34	112	7	85	50	26	16	51638523431
36	119	1	79	51	30	17	59	104	98	77	

C ① (1,2,8,7,9,6,3,5,4,10,11), (1,8,9,3,4,11,2,7,6,5,10),
(1,9,4,2,6,10,8,3,11,7,5), (1,4,6,8,11,5,9,2,10,3,7),
(1,6,11,9,10,7,4,8,5,2,3).

D ④ (1,5,9,10,8,6,4,2,3,7,11)～(1,2,10,11,4,9,7,6,5,3,8),
(1,9,8,4,3,11,5,10,6,2,7), (1,8,3,5,6,7,9,4,11,10,2),
(1,3,6,9,11,2,8,5,7,4,10), (1,6,11,8,7,10,3,9,2,5,4).

1	2	8	7	9	6	3	5	4	10	11	
12	13	19	18	20	17	14	16	15	21	22	***C***
78	79	85	84	86	83	80	82	81	87	88	
67	68	74	73	75	72	69	71	70	76	77	
89	90	96	95	97	94	91	93	92	98	99	
56	57	63	62	64	61	58	60	59	65	66	
23	24	30	29	31	28	25	27	26	32	33	
45	46	52	51	53	50	47	49	48	54	55	
34	35	41	40	42	39	36	38	37	43	44	
100	101	107	106	108	105	102	104	103	109	110	
111	112	118	117	119	116	113	115	114	120	121	
1	5	9	10	8	6	4	2	3	7	11	
45	49	53	54	52	50	48	46	47	51	55	***D***
89	93	97	98	96	94	92	90	91	95	99	
100	104	108	109	107	105	103	101	102	106	110	
78	82	86	87	85	83	81	79	80	84	88	
56	60	64	65	63	61	59	57	58	62	66	
34	38	42	43	41	39	37	35	36	40	44	
12	16	20	21	19	17	15	13	14	18	22	
23	27	31	32	30	28	26	24	25	29	33	
67	71	75	76	74	72	70	68	69	73	77	
111	115	119	120	118	116	114	112	113	117	121	

分段方 ***C***、***D*** 之各列和方中心线:

B_3 2 20 82 77 96 61 26 45 40 102 120

B_4 5 12 86 70 90 61 32 52 36 110 117

671 53063 4815767 460918403 45891811031

B_7 7 22 80 74 98 61 24 48 42 100 115

B_8 10 14 84 67 92 61 30 55 38 108 112

671 55099 5089535 502026547 51638523431

B_5 8 16 79 69 89 61 33 53 43 106 114

B_9 9 19 78 76 93 61 29 46 44 103 113 671 52943 4694987

B_2 3 15 88 68 95 61 27 54 34 107 119

B_6 4 18 87 75 99 61 23 47 35 104 118 671 55759 5210315

这些列和方中心线的组成与前面 ***A***, ***B*** 的列和方中心线的组成是相同的, 但其他线的组成不尽相同, 因此所构成的完美幻方不同构.

22	70	58	53	107	1	87	93	28	40	112	①
78	98	27	39	117	13	77	59	47	108	8	列 B_1 行 B_{10}
68	66	48	102	9	85	89	32	38	116	18	
96	23	43	115	17	73	57	55	103	3	86	Ⅰ B_7 Ⅱ B_8
62	46	110	4	80	97	30	34	120	16	72	
31	41	111	21	71	61	51	101	11	81	91	671
50	106	2	88	92	25	42	118	12	76	60	55099
36	119	19	67	65	49	105	7	79	99	26	5089535
104	6	84	90	33	37	113	20	74	56	54	502026547
114	14	75	63	45	109	5	83	95	24	44	51638523431
10	82	94	29	35	121	15	69	64	52	100	

98	1	52	75	113	26	88	101	62	17	38
31	80	103	66	13	40	94	5	54	67	118
44	90	7	50	71	120	23	85	108	58	15
116	27	87	100	63	20	36	92	11	46	73
12	41	97	3	48	77	102	29	83	104	65
69	114	33	79	106	61	16	43	89	8	53
57	18	39	93	10	45	74	119	25	81	110
49	76	111	30	86	102	59	22	35	95	6
107	64	14	37	99	2	51	72	115	32	78
4	55	68	117	28	82	109	56	19	42	91
84	105	60	21	34	96	9	47	70	121	24

②

列 B_3 行 B_5

Ⅰ B_7 Ⅱ B_8

671
55099
5089535
502026547
51638523431

98	60	28	51	35	110	114	3	20	85	67
15	80	75	96	86	32	49	39	106	112	11
104	116	7	13	88	70	91	64	30	45	43
25	53	41	100	120	5	17	84	68	99	59
72	95	57	33	48	36	108	118	1	21	82
9	19	78	76	93	61	29	46	44	103	113
40	101	121	4	14	86	74	89	65	27	50
63	23	54	38	105	117	2	22	81	69	79
79	77	92	58	31	52	34	109	115	6	18
111	10	16	83	73	90	66	26	47	42	107
55	37	102	119	8	12	87	71	94	62	24

③

列 B_4 行 B_9

Ⅰ B_7 Ⅱ B_8

671
55099
5089535
502026547
51638523431

110	13	95	50	115	87	56	41	9	69	26
71	32	100	19	97	47	114	88	57	40	6
42	3	70	33	101	18	94	49	120	78	63
79	62	39	5	76	23	107	20	91	48	121
54	111	85	64	36	4	77	24	106	17	93
14	92	55	112	84	61	38	10	67	30	108
29	105	16	98	45	108	86	58	37	11	68
1	74	31	102	15	99	46	117	83	60	43
59	44	2	73	28	104	21	89	52	119	80
116	82	65	34	8	75	25	103	22	90	51
96	53	113	81	66	35	7	72	27	109	12

④

列 B_6 行 B_8

Ⅰ B_4 Ⅱ B_3

671
53603
4815767
460918403
45891811031

117	76	53	11	94	34	14	57	104	85	26
64	110	83	23	113	68	49	8	92	40	21
6	89	36	13	60	107	81	29	120	75	55
25	112	71	52	4	95	43	20	66	105	78
16	63	103	84	32	119	77	50	1	91	35
48	7	98	42	22	61	100	80	24	115	74
87	31	121	72	45	3	90	38	19	59	106
44	17	56	102	79	27	118	70	51	10	97
67	47	2	93	41	15	62	109	86	33	116
101	82	30	114	73	54	9	99	39	12	58
96	37	18	65	108	88	28	111	69	46	5

⑤

列 B_2 行 B_7

Ⅰ B_4 Ⅱ B_3

671
53603
4815767
460918403
45891811031

96	23	43	115	17	73	57	55	103	3	86
10	82	94	29	35	121	15	69	64	52	100
50	106	2	88	92	25	42	118	12	76	60
68	66	48	102	9	85	89	32	38	116	18
114	14	75	63	45	109	5	83	95	24	44
31	41	111	21	71	61	51	101	11	81	91
78	98	27	39	117	13	77	59	47	108	8
104	6	84	90	33	37	113	20	74	56	54
62	46	110	4	80	97	30	34	120	16	72
22	70	58	53	107	1	87	93	28	40	112
36	119	19	67	65	49	105	7	79	99	26

⑥

列 B_1 行 B_{10}

Ⅰ B_3 Ⅱ B_4

671
53063
4815767
460918403
45891811031

55	102	59	19	75	1	95	79	39	32	115
89	84	35	28	120	49	110	58	15	74	9
104	66	14	70	8	97	78	40	24	116	54
86	34	29	112	50	109	60	22	69	4	96
65	16	77	3	92	85	42	23	117	46	105
41	31	111	51	101	61	21	71	11	91	81
17	76	5	99	80	37	30	119	45	106	57
26	118	53	100	62	13	72	10	93	88	36
68	6	98	82	44	25	114	52	108	56	18
113	48	107	64	12	73	2	94	87	38	33
7	90	83	43	27	121	47	103	63	20	67

⑦

列 $\boldsymbol{B}_1$ 行 $\boldsymbol{B}_{10}$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$

671
55099
5089535
502026547
51638523431

10	111	69	28	20	44	57	85	104	95	48
97	55	2	118	71	29	15	43	56	80	105
82	106	92	54	1	113	72	31	22	35	63
34	58	83	108	99	46	8	115	73	26	21
33	13	41	60	84	103	98	45	3	116	75
117	70	32	12	36	61	86	110	90	52	5
47	6	119	77	24	19	38	62	81	109	89
101	96	49	7	114	76	23	14	39	64	88
59	87	100	91	50	9	121	68	30	16	40
17	42	66	79	107	93	51	4	120	67	25
74	27	18	37	65	78	102	94	53	11	112

⑧

列 $\boldsymbol{B}_5$ 行 $\boldsymbol{B}_3$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_7$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$

671
55099
5089535
502026547
51638523431

14	99	27	109	72	79	117	56	9	41	48
60	10	39	46	18	89	31	107	70	80	121
105	68	84	111	64	8	37	47	22	93	32
51	12	97	30	103	69	88	115	65	6	35
119	63	4	36	55	16	98	28	101	73	78
26	102	77	82	120	61	2	40	45	20	96
44	49	21	94	24	106	67	86	118	59	3
87	116	57	7	34	53	19	92	25	110	71
90	29	100	75	85	114	58	11	38	54	17
1	42	52	15	91	33	104	76	83	112	62
74	81	113	66	5	43	50	13	95	23	108

⑨

列 $\boldsymbol{B}_9$ 行 $\boldsymbol{B}_4$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_7$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$

671
55099
5089535
502026547
51638523431

102	75	79	115	59	1	39	55	19	95	32
84	120	58	9	35	49	15	89	28	110	74
66	8	40	54	14	97	24	104	70	78	116
34	50	22	96	29	109	69	86	112	60	4
16	92	23	105	77	85	117	65	3	42	46
31	101	71	81	111	61	11	41	51	21	91
76	80	119	57	5	37	45	17	99	30	106
118	62	10	36	53	13	93	26	100	72	88
6	44	52	18	98	25	108	68	82	114	56
48	12	94	33	107	73	87	113	64	2	38
90	27	103	67	83	121	63	7	43	47	20

⑩

列 $\boldsymbol{B}_1$ 行 $\boldsymbol{B}_{10}$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_5$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_9$

671
53063
4815767
460918403
45891811031

20	89	29	101	72	87	115	66	3	37	52
62	2	39	54	16	99	25	103	74	86	111
105	76	82	121	58	4	41	53	12	95	24
49	22	91	26	107	75	78	117	57	6	43
113	59	8	42	45	18	90	28	109	71	88
30	108	67	84	112	61	10	38	55	14	92
34	51	13	94	32	104	77	80	114	63	9
79	116	65	5	44	47	15	96	31	100	73
98	27	110	69	81	118	64	1	40	46	17
11	36	48	19	97	23	106	68	83	120	60
70	85	119	56	7	35	50	21	93	33	102

⑪

列 $\boldsymbol{B}_2$ $\boldsymbol{B}_7$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_4$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$

671
53063
4815767
460918403
45891811031

2	121	75	28	14	34	65	81	106	93	52	⑫
91	45	10	114	73	27	19	35	66	86	105	列 B_6 行 B_8
84	104	96	46	11	119	72	2	12	43	59	
44	64	83	102	89	54	4	117	71	30	13	Ⅰ B_4 Ⅱ B_3
23	21	37	62	82	107	90	55	9	116	69	
115	74	24	22	42	61	80	100	98	48	7	671
53	6	113	67	32	15	40	60	85	101	99	53063
109	92	51	5	118	68	33	20	39	58	78	4815767
63	79	110	97	50	3	111	76	26	18	38	460918403
17	36	56	87	103	95	49	8	112	77	31	45891811031
70	29	16	41	57	88	108	94	47	1	120	

3.5 次特优(**E**, **F** 系列)

E ⑤	**F** ⑥
(1,2,3,7,4,6,8,5,9,10,11)	(1,2,7,3,6,9,5,10,11,8,4)
(1,3,4,8,9,11,2,7,6,5,10)	(1,7,6,5,11,4,2,3,9,10,8)
(1,4,9,2,6,10,3,8,11,7,5)	(1,6,11,2,9,8,7,5,4,3,10)
(1,9,6,3,11,5,4,2,10,8,7)	(1,11,9,7,4,10,6,2,8,5,3)
(1,6,11,4,10,7,9,3,5,2,8)	(1,9,4,6,8,3,11,7,10,2,5)
G ⑧	**H** ⑦
(1,2,10,11,9,4,7,6,5,8,3)	(1,2,5,7,10,11,4,9,6,3,8)
(1,10,9,7,5,3,2,11,4,6,8)	(1,5,10,4,6,8,2,7,11,9,3)
(1,9,5,2,4,8,10,7,3,11,6)	(1,10,6,2,11,3,5,4,8,7,9)
(1,5,4,10,3,6,9,2,8,7,11)	(1,6,11,5,8,9,10,2,3,4,7)
(1,4,3,9,8,11,5,10,6,2,7)	(1,11,8,10,3,7,6,5,9,2,4)

(30)

1	2	3	7	4	6	8	5	9	10	11	
12	13	14	18	15	17	19	16	20	21	22	**E**
23	24	25	29	26	28	30	27	31	32	33	
67	68	69	73	70	72	74	71	75	76	77	
34	35	36	40	37	39	41	38	42	43	44	
56	57	58	62	59	61	63	60	64	65	66	
78	79	80	84	81	83	85	82	86	87	88	
45	46	47	51	48	50	52	49	53	54	55	
89	90	91	95	92	94	96	91	97	98	99	
100	101	102	106	103	105	107	104	108	109	110	
111	112	113	117	114	116	118	115	119	120	121	

1	2	7	3	6	9	5	10	11	8	4	
12	13	18	15	17	20	16	21	22	19	15	**F**
67	68	73	69	72	74	71	76	77	74	70	
23	24	29	25	28	31	27	32	33	30	26	
56	57	62	58	61	64	60	65	66	63	59	
89	90	95	91	94	97	93	98	99	96	92	
45	46	51	47	50	53	49	54	55	52	48	
100	101	106	102	105	108	104	109	110	107	103	
111	112	117	113	116	119	115	120	121	118	114	
78	79	84	80	83	86	82	87	88	85	81	
34	35	40	36	39	42	38	43	44	41	37	

1	2	10	11	9	4	7	6	5	8	3	G
12	13	21	22	20	15	18	17	16	19	14	
100	101	109	110	108	103	106	105	104	107	102	
111	112	120	121	119	114	117	116	115	118	113	
89	90	98	99	97	92	95	94	93	96	91	
34	35	43	44	42	37	40	39	38	41	36	
67	68	76	77	75	70	73	72	71	74	69	
56	57	65	66	64	59	62	61	60	63	58	
45	46	54	55	53	48	51	50	49	52	47	
78	79	87	88	86	81	84	83	82	85	80	
23	24	32	33	31	26	29	28	27	30	25	
1	2	5	7	10	11	4	9	6	3	8	H
12	13	16	18	21	22	15	20	17	14	19	
45	46	49	51	54	55	48	53	50	47	52	
67	68	71	73	76	77	70	75	72	69	74	
100	101	104	106	109	110	103	108	105	102	107	
111	112	115	117	120	121	114	119	116	113	118	
34	35	38	40	43	44	37	42	39	36	41	
89	90	93	95	98	99	92	97	94	91	96	
56	57	60	62	65	66	59	64	61	58	63	
23	24	27	29	32	33	26	31	28	25	30	
78	79	82	84	87	88	81	86	83	80	85	

各列和方中心线及5次特优完美幻方:

E	F	G	H	各列和方的中心线										
B_2	B_7	B_6	B_8	8	20	54	68	102	114	40	89	61	33	82
B_6	B_8	B_2	B_7	9	18	52	70	104	113	44	90	61	32	78
				671	52459	4606415	432733939	41488874791						
B_5	B_3	B_9	B_4	3	16	48	74	106	119	34	98	61	24	88
B_9	B_4	B_5	B_3	4	14	46	76	108	118	38	99	61	23	84
				671	56243	5298887	529862531	54935173271						
B_7	B_6	B_8	B_2	7	22	53	69	100	115	43	92	61	32	79
B_8	B_2	B_7	B_6	10	19	55	67	103	112	42	93	61	29	80
				671	52503	4614467								
B_3	B_9	B_4	B_5	2	15	45	77	107	120	36	95	61	27	86
B_4	B_5	B_3	B_9	5	12	47	75	110	117	35	96	61	26	87
				671	56199	5290835								

52	94	103	117	3	13	23	77	43	64	82	①
120	9	16	30	72	37	62	80	46	89	110	E
24	67	44	65	86	49	96	105	114	7	14	列 B_1 行 B_{10}
59	84	47	90	100	121	10	20	27	74	39	
93	107	116	4	18	25	68	34	66	87	53	Ⅰ B_2 Ⅱ B_6
11	21	31	71	41	61	81	51	91	101	111	
69	35	56	88	54	97	104	118	6	15	29	671
83	48	95	102	112	1	22	32	75	38	63	52459
108	115	8	17	26	73	36	57	78	55	98	4606415
12	33	76	42	60	85	50	92	106	113	2	432733939
40	58	79	45	99	109	119	5	19	28	70	41488874791

32	100	58	15	96	42	11	46	73	116	82
4	52	75	121	79	29	105	60	21	89	36
110	57	18	94	38	10	45	69	114	85	31
50	71	120	78	25	103	63	20	99	35	7
56	14	92	41	9	55	68	117	83	27	109
74	119	88	24	106	61	16	98	34	3	48
13	95	39	5	54	67	113	81	30	108	66
115	87	23	102	59	19	97	44	2	51	72
91	37	8	53	77	112	84	28	104	65	12
86	33	101	62	17	93	43	1	47	70	118
40	6	49	76	111	80	26	107	64	22	90

②
列 B_8 行 B_5

671
52459
4606415
432733939
41488874791

113	75	51	10	37	99	17	56	107	24	82
57	104	25	86	117	76	48	11	39	89	19
1	41	90	16	58	108	29	87	114	77	50
88	116	67	52	2	38	91	20	62	109	26
21	59	110	28	78	118	68	49	3	42	95
53	7	43	92	22	61	100	30	79	115	69
27	80	119	73	54	4	44	94	12	63	101
96	13	60	102	31	84	120	70	55	6	34
72	45	8	35	93	14	64	106	32	81	121
103	33	83	111	74	46	5	36	97	18	65
40	98	15	66	105	23	85	112	71	47	9

③
列 B_9 行 B_7

90	88	72	45	43	25	103	5	62	118	20
26	104	7	63	119	13	99	83	67	54	36
22	94	78	76	47	37	27	106	8	64	112
38	29	10	79	57	121	17	89	87	69	48
116	12	98	80	70	49	40	30	10	82	66
51	41	31	101	11	61	111	21	91	81	71
56	120	14	92	82	73	52	42	24	110	6
74	53	35	33	105	1	65	113	15	93	84
10	58	114	16	95	85	75	46	44	28	100
86	68	55	39	23	109	3	59	115	18	96
102	4	60	117	19	97	79	77	50	34	32

④
F
列 B_1 行 B_{10}

Ⅰ B_8 Ⅱ B_7

114	11	27	50	84	12	63	109	42	69	90
73	89	118	10	31	47	79	15	66	104	39
108	36	68	92	121	5	28	51	78	19	65
22	60	105	40	67	96	120	9	25	46	81
45	85	21	64	102	35	70	99	115	6	29
3	24	48	88	16	61	106	34	74	98	119
93	116	7	23	52	87	20	58	101	37	77
41	76	97	113	2	26	55	82	17	62	100
57	103	44	71	94	117	1	30	54	86	14
83	18	56	107	43	75	91	112	4	33	49
32	53	80	13	59	110	38	72	95	111	8

⑤
列 B_5 行 B_3

82	67	53	37	28	107	3	66	117	21	90
64	114	17	96	80	77	51	43	24	104	1
39	30	102	11	62	120	13	93	78	75	48
91	88	73	54	35	27	100	9	59	116	19
7	65	112	16	89	86	70	50	41	25	110
46	38	23	108	4	61	118	14	99	84	76
12	97	81	72	52	36	33	106	10	57	115
103	6	63	113	22	95	87	68	49	34	31
74	47	44	29	109	2	60	111	20	92	83
121	18	98	79	71	45	42	26	105	8	58
32	101	5	56	119	15	94	85	69	55	40

⑥
列 B_9 行 B_4

671
52459
4606415
432733939
41488874791

82	28	7	15	108	121	98	35	67	58	52	⑦
12	102	118	93	39	73	59	53	88	32	2	G
99	43	68	56	47	85	27	6	18	103	119	列 B_1 行 B_{10}
62	48	86	33	10	13	100	113	96	38	72	
30	5	17	106	114	97	44	76	57	45	80	I B_6 II B_2
101	111	91	41	71	61	51	81	31	11	21	
42	27	65	46	78	25	8	16	105	117	92	
50	84	26	9	22	109	112	89	36	74	60	
3	19	104	116	95	37	75	66	54	79	23	
120	90	34	69	13	49	83	29	4	20	110	
70	64	55	87	24	1	14	107	115	94	40	

89	10	64	117	27	69	101	88	37	17	52	⑧
106	82	36	13	55	92	6	63	111	32	75	列 B_8 行 B_5
2	66	114	28	74	100	97	42	18	49	91	
83	41	12	54	97	7	60	113	24	77	103	
65	119	29	71	102	79	44	15	50	96	1	
38	14	46	49	4	61	118	23	86	108	84	
121	26	72	107	78	43	20	51	93	3	57	
19	45	98	9	62	115	25	68	110	81	39	
31	73	104	80	35	22	48	94	8	56	120	
47	90	11	59	16	30	67	109	86	40	16	
70	105	85	34	21	53	95	5	58	112	33	

20	36	81	100	73	24	116	65	5	99	52	⑨
66	8	97	47	15	34	84	101	72	32	105	列 B_9 行 B_7
109	71	33	118	64	3	92	45	18	35	83	
44	17	43	82	110	74	31	113	59	1	95	
111	62	2	94	54	16	44	85	108	69	26	
80	103	67	29	112	61	10	93	55	19	42	
96	53	14	37	78	106	68	26	120	60	11	
27	121	63	9	91	48	12	40	79	105	76	
39	87	104	77	30	119	58	4	89	51	13	
7	90	50	21	38	88	107	75	25	114	56	
70	23	117	57	6	98	49	22	41	86	102	

113	16	59	107	7	97	67	87	39	46	33	⑩
75	78	43	50	24	121	14	60	103	8	95	H
22	58	104	4	96	73	86	34	54	28	112	列 B_1 行 B_{10}
84	42	45	32	116	13	66	102	5	92	74	
57	110	3	93	70	85	40	53	23	120	17	I B_7 II B_8
41	51	31	111	21	61	101	11	91	71	81	
105	2	99	69	82	37	52	29	119	12	65	
48	30	117	20	56	109	6	90	77	80	38	
10	94	68	88	36	49	26	118	18	64	100	
27	114	19	62	108	1	98	72	79	44	47	
89	76	83	35	55	25	115	15	63	106	9	

89	80	53	121	62	2	74	39	26	21	104	⑪
50	114	65	5	67	36	31	22	106	90	85	列 B_5 行 B_3
66	7	68	41	28	15	109	93	78	47	119	
71	34	25	20	110	95	79	52	116	59	10	
30	17	103	98	82	45	113	64	11	73	35	671
108	99	84	46	118	61	4	76	38	23	14	52459
87	49	111	58	9	77	40	24	19	105	92	4606415
112	63	6	70	43	27	12	102	97	88	51	432733939
3	75	44	29	13	107	94	81	54	115	56	41488874791
37	32	16	100	91	86	55	117	57	8	72	
18	101	96	83	48	120	60	1	69	42	33	

89	11	107	65	14	117	28	49	42	79	70
13	114	23	55	41	87	69	95	6	104	64
38	86	68	92	1	110	63	21	113	29	50
7	105	60	20	112	26	45	44	85	76	91
120	25	51	39	82	75	90	4	100	66	19
88	74	98	3	106	61	16	119	24	48	34
103	56	22	118	32	47	40	83	71	97	2
31	46	37	78	77	96	10	102	62	17	115
72	93	9	101	59	12	121	30	54	36	84
58	18	116	27	53	35	81	67	99	8	109
52	43	80	73	94	5	108	57	15	111	33

⑫

列 $\boldsymbol{B}_9$　行 $\boldsymbol{B}_4$

118	69	54	6	35	97	15	56	104	29	88
57	108	26	78	115	73	55	8	36	98	17
5	40	99	19	58	109	28	79	119	70	45
80	120	72	46	9	37	89	16	62	110	30
20	59	100	27	84	121	74	47	10	39	90
51	11	41	91	21	61	101	31	81	111	71
32	83	112	75	48	1	38	95	22	63	102
92	12	60	106	33	85	113	76	50	2	42
77	52	3	43	94	13	64	103	23	82	117
105	24	86	114	67	49	7	44	96	14	65
34	93	18	66	107	25	87	116	68	53	4

①

E

列 $\boldsymbol{B}_1$　行 $\boldsymbol{B}_{10}$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_9$　Ⅱ $\boldsymbol{B}_5$

76	9	93	63	28	114	51	36	13	100	88
27	118	50	37	18	102	79	67	11	98	64
17	103	84	69	2	89	66	32	119	49	41
7	91	57	23	121	54	42	16	107	83	70
112	45	44	21	108	82	74	6	92	62	25
110	87	75	5	96	61	26	117	47	35	12
97	60	30	116	48	40	14	101	78	77	10
52	39	15	106	80	68	1	99	65	31	115
81	73	3	90	56	33	120	53	38	19	105
58	24	111	55	43	20	104	85	72	4	95
34	22	109	86	71	8	94	59	29	113	46

②

列 $\boldsymbol{B}_2$　行 $\boldsymbol{B}_4$

671
56243
5298887
529862531
54935173271

108	19	37	47	111	32	60	94	7	68	88
72	84	101	22	42	52	114	25	56	98	5
91	1	76	82	105	18	35	55	119	30	59
33	64	96	4	64	78	109	16	39	51	112
49	116	29	57	99	9	74	81	102	12	43
15	35	45	120	27	61	95	2	77	86	107
79	110	20	41	48	113	23	63	93	6	73
10	71	83	106	13	44	53	118	26	58	89
63	92	3	67	87	104	17	40	46	121	31
117	24	66	97	8	70	80	100	21	38	50
34	54	115	28	62	90	11	75	85	103	14

③

列 $\boldsymbol{B}_6$　行 $\boldsymbol{B}_3$

108	80	2	70	66	49	116	40	12	30	98
8	76	64	47	112	37	22	27	94	106	78
62	45	118	43	20	25	90	103	88	5	72
115	39	18	23	96	109	86	3	68	59	55
15	33	93	105	84	1	74	65	53	113	35
91	101	81	11	71	61	51	111	41	21	31
87	9	69	57	48	121	38	17	29	89	107
67	63	54	119	36	13	26	99	104	83	7
50	117	34	19	32	97	102	79	4	77	60
44	16	28	95	100	85	10	75	58	46	114
24	92	110	82	6	73	56	52	120	42	1

④

F

列 $\boldsymbol{B}_1$　行 $\boldsymbol{B}_{10}$

Ⅰ $\boldsymbol{B}_4$　Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$

84	77	47	41	28	103	9	56	115	13	98
58	118	17	92	86	67	49	35	32	106	11
39	26	108	1	60	112	21	95	88	69	52
97	78	71	46	43	29	110	3	63	116	15
5	57	120	18	99	80	74	50	37	31	100
54	40	33	102	8	61	114	20	89	82	68
22	91	85	72	48	42	23	104	2	65	117
107	6	59	119	12	93	79	76	51	44	25
70	53	34	27	101	10	62	121	14	96	83
111	16	90	87	73	55	36	30	105	4	64
24	109	7	66	113	19	94	81	75	45	38

⑤
列 B_2 行 B_7

118	1	29	50	82	22	59	101	36	75	98
71	99	114	2	25	53	87	19	56	106	39
102	42	76	96	111	7	28	49	88	15	57
12	62	105	38	77	92	112	3	31	54	85
55	81	13	58	108	43	74	89	117	6	27
9	32	52	78	18	61	104	44	70	90	113
95	116	5	33	48	79	14	64	109	41	67
37	68	91	119	10	30	45	84	17	60	110
65	107	34	73	94	115	11	26	46	80	20
83	16	66	103	35	69	97	120	8	23	51
24	47	86	21	63	100	40	72	93	121	4

⑥
列 B_6 行 B_8

671
56243
5298887
529862531
54935173271

16	42	78	105	77	25	117	65	8	92	46
66	3	95	54	19	37	79	104	75	23	116
107	70	24	115	64	1	94	55	14	40	87
53	12	39	88	102	73	32	118	59	2	93
113	62	10	96	48	13	38	86	100	72	33
81	101	71	31	111	61	11	91	51	21	41
89	50	22	36	84	109	74	26	112	60	9
29	120	63	4	90	49	20	34	83	110	69
35	82	108	67	28	121	58	7	98	52	15
6	99	47	18	43	85	103	68	27	119	56
76	30	114	57	5	97	45	17	44	80	106

⑦
G
列 B_1 行 B_{10}

Ⅰ B_9 Ⅱ B_5

88	26	6	19	100	120	97	40	70	58	46
20	106	115	91	35	77	59	50	85	23	10
92	39	74	56	54	86	29	5	14	101	121
62	49	80	24	11	15	105	118	89	43	75
28	8	12	109	119	95	38	69	57	55	81
104	113	90	44	70	61	52	78	32	9	18
41	67	65	53	84	27	3	13	110	114	94
47	79	33	4	17	107	111	98	42	73	60
1	21	108	117	93	36	68	66	48	83	30
112	99	37	72	63	45	87	31	7	16	102
76	64	51	82	25	2	22	103	116	96	34

⑧
列 B_4 行 B_2

3	115	73	86	21	89	63	28	103	44	46
39	48	11	112	69	82	18	97	65	23	107
31	109	34	52	6	114	77	79	14	93	62
90	58	27	106	42	54	1	118	72	81	22
85	17	92	66	24	102	38	51	9	120	67
117	75	87	12	96	61	26	110	35	47	5
55	2	113	71	84	20	98	56	30	105	37
100	41	50	4	121	68	80	16	95	64	32
60	29	108	43	45	8	116	70	88	13	91
15	99	57	25	104	40	53	10	111	74	83
76	78	19	94	59	33	101	36	49	7	119

⑨
列 B_6 行 B_5

3	53	110	40	57	85	17	70	120	93	23	⑩
104	34	58	86	22	73	112	96	28	4	54	H
59	87	16	67	113	97	33	7	46	107	39	列 $\boldsymbol{B}_1$ 行 $\boldsymbol{B}_{10}$
19	72	114	98	27	1	47	108	44	62	79	
117	90	30	6	48	109	38	56	80	20	77	Ⅰ$\boldsymbol{B}_4$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_3$
31	11	51	101	41	61	81	21	71	111	91	
45	102	42	66	84	13	74	116	92	32	5	
43	60	78	14	75	121	95	24	8	50	103	
83	15	76	115	89	25	9	55	106	35	63	
68	118	94	26	10	49	100	36	64	88	18	
99	29	2	52	105	37	65	82	12	69	119	

48	35	86	71	94	7	102	65	19	121	23	⑪
64	16	116	29	47	43	85	77	89	4	101	列 $\boldsymbol{B}_2$ 行 $\boldsymbol{B}_7$
72	95	3	109	63	22	111	26	46	42	82	
25	54	41	88	67	92	2	108	60	17	117	
107	66	12	114	24	53	38	83	73	91	10	671
78	70	90	9	104	61	18	113	32	52	44	56243
112	31	49	39	84	69	98	8	110	56	15	5298887
5	105	62	14	120	30	55	34	81	68	97	529862531
40	80	76	96	11	100	59	13	119	27	50	54935173271
21	118	33	45	37	79	75	93	6	106	58	
99	1	103	57	20	115	28	41	36	87	74	

16	109	92	83	52	112	62	11	75	36	23	⑫
41	24	18	110	97	80	45	115	65	4	72	列 $\boldsymbol{B}_6$ 行 $\boldsymbol{B}_8$
9	69	34	27	21	103	94	85	46	117	66	
120	59	6	74	35	29	22	108	91	78	49	
79	51	121	64	3	67	38	32	15	105	96	
102	89	82	54	114	61	8	68	40	33	20	
26	17	107	90	84	55	119	58	1	71	43	
73	44	31	14	100	93	87	48	116	63	2	
56	5	76	37	28	19	101	95	88	53	113	
50	118	57	7	77	42	25	12	104	98	81	
99	86	47	111	60	10	70	39	30	13	106	

上面两节共给出 48 个 5 次特优的 11 阶完美幻方. 同样各种情形都有 5 个或 6 个 3 次特优的 11 阶完美幻方. 其对角线共有 4 组, 各 12 方.

4. 不对称的保中心线变换: 以对称排列(1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3)行、列序作分段方 $\boldsymbol{A}$, 在 $\boldsymbol{A}$ 中将列和方 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_9$ 的中心线元素分别用黑体表示:

$\boldsymbol{B}_5$ 2 96 20 40 45 61 77 82 102 26 120

$\boldsymbol{B}_9$ 5 90 12 36 52 61 70 86 110 32 117

671 55099 5089535 502026547 51638523431

1	1	9	**2**	4	*5*	6	7	8	10	3	11	
9	89	97	*90*	92	93	94	95	**96**	98	91	99	$\boldsymbol{A}$
2	*12*	**20**	13	15	16	17	18	19	21	14	22	
4	34	42	35	37	38	39	**40**	41	43	*36*	44	
5	**45**	53	46	48	49	50	51	*52*	54	47	55	
6	56	64	57	59	60	**61**	62	63	65	58	66	(31)
7	67	75	68	*70*	71	72	73	74	76	69	**77**	
8	78	*86*	79	81	**82**	83	84	85	87	80	88	
10	100	108	101	103	104	105	106	107	109	**102**	*110*	
3	23	31	24	**26**	27	28	29	30	*32*	25	33	
11	111	119	112	114	115	116	*117*	118	**120**	113	121	

按其各元素在 A 中的位置 a_{ij} 的变换，称为中心线 B_5, B_9 的轨迹 $i \to j$. 下面分别是它们的轨迹变换:

中心线 B_5 的轨迹						中心线 B_9 的轨迹				
2	9	8	5	1		1	5	8	9	2
↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓
9	8	5	1	2		5	8	9	2	1
4	7	11	10	3		4	3	10	11	7
↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓
7	11	10	3	4		3	10	11	7	4

(32)

两条对角线的变换是一致的. 因此对原排列可以有如下变换. 以这种变换所得排列为行列序构作的分段方中，上列对角线仍将出现：这里执行不含 1 组的轨迹变换，因为 1 总是位于第一位.

原 (1,9,2,*4*,5,6,*7*,8,*10*,*3*,*11*)循环→(1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3),

(1) (1,9,2,*7*,5,6,*11*,8,*3*,*4*,*10*)循环→(1,2,5,11,3,10,9,7,6,8,4),

(2) (1,9,2,*11*,5,6,*10*,8,*4*,*7*,*3*)循环→(1,2,5,10,4,3,9,11,6,8,7),

(3) (1,9,2,*10*,5,6,*3*,8,*7*,*11*,*4*)循环→(1,2,5,3,7,4,9,10,6,8,11), (33)

(4) (1,9,2,*3*,5,6,*4*,8,*11*,*10*,*7*)循环→(1,2,5,4,11,7,9,3,6,8,10).

所得排列是不对称排列. 事实上再取(1) (1,2,5,11,3,10,9,7,6,8,4)并对之执行含 1 组的轨迹变换:

执行→(2,9,1,11,3,10,8,7,6,5,4)循环→(1,2,5,7,10,11,9,4,6,8,3).

执行→(9,8,2,11,3,10,5,7,6,1,4)循环→(1,2,5,4,11,7,9,3,6,8,10).

所得均与上面的排列相同，不会引入新的排列. 下面 A_1, A_2, A_3, A_4 就是分别以这些排列为行、列序构作的分段方. 同样对于主对角线:

B_2	7	98	22	42	48	61	74	80	100	24	115
B_6	10	92	14	38	55	61	67	84	108	30	112

671 53603 4815767 460918403 45891811031

用同样的方法，可说明此组对角线不存在这种不对称变换.

由 B_2 中心线的轨迹，得 a_{ij}:

i	1	7	8	3	2	11	5	4	9	10
j	7	8	3	2	11	5	4	9	10	1

包含了排列中除 6 外的所有点，即除点 6 之外排列的所有点均有对应变换，如原排列

1 9 2 4 5 6 7 8 10 3 11

7 10 11 9 4 6 8 3 1 2 5 →1 2 5 7 10 11 9 4 6 8 3

这仍是原排列的循环排列，可见没有提供新的排列信息，但由 1, 2, 3, 4 可给出的 A_1, A_2, A_3, A_4 仍可给出如上这组特优线:

1	*12*	**45**	111	23	100	89	67	56	78	34		1	*12*	**45**	100	34	23	89	111	56	78	67
2	13	46	112	24	101	*90*	68	57	79	35	A_1	**2**	13	46	101	35	24	*90*	112	57	79	68
5	16	49	115	27	104	93	71	60	**82**	38		*5*	16	49	104	38	27	93	115	60	**82**	71
11	22	55	121	33	*110*	99	**77**	66	88	44		10	21	54	109	43	*32*	98	**120**	65	87	76
3	14	47	113	25	**102**	91	69	58	80	*36*		4	15	48	103	37	**26**	92	114	59	81	*70*
10	21	54	**120**	*32*	109	98	76	65	87	43		3	14	47	**102**	*36*	25	91	113	58	80	69
9	**20**	53	119	31	108	97	75	64	*86*	42		9	**20**	53	108	42	31	97	119	64	*86*	75
7	18	51	*117*	29	106	95	73	62	84	**40**		11	22	55	*110*	44	33	99	121	66	88	**77**
6	17	50	116	28	105	94	72	**61**	83	39		6	17	50	105	39	28	94	116	**61**	83	72
8	19	*52*	118	30	107	**96**	74	63	85	41	A_2	8	19	*52*	107	41	30	**96**	118	63	85	74
4	15	48	114	**26**	103	92	*70*	59	81	37		7	18	51	106	**40**	29	95	*117*	62	84	73

1	*12*	**45**	23	67	34	89	100	56	78	111		1	*12*	**45**	34	111	67	89	23	56	78	100
2	13	46	24	68	35	*90*	101	57	79	112	A_3	**2**	13	46	35	112	68	*90*	24	57	79	101
5	16	49	27	71	38	93	104	60	**82**	115		*5*	16	49	38	115	71	93	27	60	**82**	104
3	14	47	25	69	*36*	91	**102**	58	80	113		4	15	48	37	114	*70*	92	**26**	59	81	103
7	18	51	29	73	**40**	95	106	62	84	*117*		11	22	55	44	121	**77**	99	33	66	88	*110*
4	15	48	**26**	*70*	37	92	103	59	81	114		7	18	51	**40**	*117*	73	95	29	62	84	106
9	**20**	53	31	75	42	97	108	64	*86*	119		9	**20**	53	42	119	75	97	31	64	*86*	108
10	21	54	*32*	76	43	98	109	65	87	**120**		3	14	47	*36*	113	69	91	25	58	80	**102**
6	17	50	28	72	39	94	105	**61**	83	116		6	17	50	39	116	72	94	28	**61**	83	105
8	19	*52*	30	74	41	**96**	107	63	85	118	A_4	8	19	*52*	51	118	74	**96**	30	63	85	107
11	22	55	33	**77**	44	99	*110*	66	88	121		10	21	54	43	**120**	76	98	*32*	65	87	109

可见各方均有列和方的中心线:

B$_6$　　2　20　45　26　77　40　96　102　61　82　120

B_2　　5　12　32　36　52　61　70　86　90　110　117

由此, 如前分别各可得 3 个以上列 2 线为主对角线的 5 次特优的 11 阶完美幻方:

96	112	3	62	103	49	43	72	23	22	**86**	A_1 ①
105	**45**	44	75	30	13	80	95	114	**5**	65	
29	15	**82**	98	116	1	66	108	**52**	35	69	
119	8	57	**102**	51	37	71	**32**	17	78	99	
54	39	67	33	**20**	85	**90**	113	7	59	104	
14	84	92	115	10	**61**	100	55	42	74	24	671
11	64	107	46	**36**	73	**26**	16	87	94	111	55099
38	76	28	**12**	88	97	118	**2**	58	106	48	5089835
79	91	**117**	4	60	109	50	34	**77**	31	19	502026547
56	**110**	53	41	68	25	18	81	93	**120**	6	51638523431
70	27	21	83	89	121	9	63	101	47	**40**	
96	21	68	50	58	111	84	33	37	108	**5**	②
69	**45**	62	121	81	31	38	107	10	**90**	17	
59	119	**82**	30	43	101	6	91	**12**	73	55	
87	24	39	**102**	1	95	22	**70**	53	60	118	
34	106	11	92	**20**	71	**52**	65	112	83	25	
9	93	19	76	46	**61**	113	78	29	44	103	
13	72	47	56	**117**	88	**26**	42	104	8	98	
51	66	114	**86**	27	41	109	**2**	94	14	67	
115	85	**32**	35	105	3	89	18	**77**	48	64	
28	**36**	100	7	99	15	75	49	63	**120**	79	
110	4	97	16	74	54	57	116	80	23	**40**	
96	60	42	15	121	106	67	80	6	46	**32**	③
7	**45**	25	94	57	43	19	115	108	**70**	88	
109	74	**82**	9	48	33	95	56	**36**	17	112	
44	18	111	**102**	72	79	10	**52**	27	97	59	
24	98	63	38	**20**	114	**110**	73	78	3	50	
81	11	51	23	91	**61**	35	21	118	104	75	
116	101	76	85	**5**	53	**26**	99	62	34	14	
64	37	22	**117**	100	69	83	**2**	54	30	93	
47	28	**90**	65	41	16	119	103	**77**	84	1	
71	**86**	4	55	29	89	58	39	13	**120**	107	
12	113	105	68	87	8	49	31	92	66	**40**	

6	46	6	81	111	33	109	18	75	60	**96**	A_2 ④
87	**117**	31	104	19	69	57	94	37	**45**	11	
101	17	**70**	56	99	43	51	9	**82**	118	25	
62	97	38	**52**	3	79	116	**26**	100	22	76	
50	4	78	121	**32**	106	**20**	71	63	91	35	
119	27	107	14	68	**61**	92	34	55	10	84	671
15	67	66	98	**40**	53	**5**	85	113	24	105	55099
93	41	47	**2**	83	114	23	**110**	21	73	64	5089835
1	88	**120**	29	108	16	74	58	**90**	39	48	502026547
30	**102**	13	72	59	89	44	54	7	**86**	115	51638523431
77	65	95	42	49	8	80	112	28	103	**12**	

36	63	16	31	84	54	99	67	103	116	**2**	⑤
108	**117**	10	44	56	15	28	79	47	**96**	71	
55	89	**70**	105	112	3	41	60	**20**	29	87	
17	24	80	**52**	93	75	106	**120**	11	34	59	
8	38	64	18	**32**	88	**45**	92	72	101	113	
73	109	121	1	37	**61**	13	25	85	49	97	671
78	48	94	68	**102**	118	**5**	42	62	21	33	55099
57	14	30	**82**	53	95	76	**110**	111	4	39	5089835
115	9	**40**	65	22	23	81	50	**90**	69	107	502026547
98	**77**	100	114	6	35	58	19	27	**86**	51	51638523431
26	83	46	91	74	104	119	7	43	66	**12**	

36	72	23	10	97	19	112	48	66	106	**82**	⑥
22	**117**	49	58	105	78	43	75	30	**2**	92	
85	35	**70**	33	7	93	17	116	**45**	65	108	
89	21	119	**52**	57	103	88	**40**	71	25	6	
104	80	39	67	**32**	9	**96**	13	114	55	62	
4	99	18	115	47	**61**	100	87	42	74	24	
64	107	79	37	**77**	29	**5**	91	17	111	54	
28	1	98	**20**	118	46	59	**110**	84	38	69	
51	60	**102**	83	34	76	31	8	**90**	15	121	
68	**26**	11	95	16	113	50	56	109	**86**	41	
120	53	63	101	81	44	73	27	3	94	**12**	

70	46	6	84	100	43	25	22	119	60	**96**	A_3 ⑦
80	**110**	42	27	19	114	57	94	73	**45**	10	
24	17	**117**	56	98	69	55	9	**82**	107	37	
66	97	71	**52**	4	79	105	**40**	23	21	113	
50	7	78	109	**36**	33	**20**	115	63	92	68	
108	38	30	15	112	**61**	95	57	54	3	88	671
18	111	65	91	**77**	53	**5**	85	103	35	28	55099
93	74	48	**2**	83	106	34	**32**	14	121	64	5089835
1	87	**102**	44	31	16	118	59	**90**	72	51	502026547
41	**26**	13	116	62	89	76	47	11	**86**	104	51638523431
120	58	99	75	49	8	81	101	38	29	**12**	

⑧

70	63	16	42	88	47	98	111	29	105	**2**
31	**110**	3	76	56	18	38	79	48	**96**	115
54	89	**117**	28	101	4	74	60	**20**	44	80
17	35	81	**52**	93	119	33	**102**	10	57	62
8	71	64	22	**36**	87	**45**	95	116	24	103
121	25	109	1	73	**61**	13	37	85	49	97
78	51	94	112	**26**	107	**5**	75	66	14	43
57	15	41	**82**	53	99	113	**32**	100	7	72
104	9	**77**	58	21	34	84	50	**90**	114	30
91	**120**	23	106	6	68	59	19	38	**86**	55
40	83	46	92	118	27	108	11	69	65	**12**

⑨

70	116	34	3	97	19	101	51	65	33	**82**
21	**110**	49	59	28	78	69	119	41	**2**	95
85	68	**117**	43	11	93	15	105	**45**	58	31
89	14	108	**52**	57	29	87	**77**	115	37	6
27	81	72	111	**36**	9	**96**	13	106	54	66
7	98	22	104	48	**61**	23	80	75	118	35
64	30	79	73	**120**	44	**5**	92	17	100	47
38	1	91	**20**	107	46	62	**32**	88	71	114
55	60	**26**	83	57	113	42	8	**90**	18	109
112	**40**	10	99	16	103	50	56	25	**86**	74
102	53	63	24	84	76	121	38	4	94	**12**

A_4 ⑩

117	46	6	88	23	69	37	21	108	60	**96**
81	**32**	75	38	19	106	57	94	121	**45**	3
35	17	**110**	56	91	114	54	9	**82**	30	73
65	97	115	**52**	7	79	28	**77**	34	14	103
50	11	78	25	**70**	43	**20**	104	63	95	112
31	71	51	18	101	**61**	99	111	47	4	87
22	100	58	92	**120**	53	**5**	85	29	68	39
93	118	51	**2**	83	33	67	**36**	15	109	64
1	80	**26**	76	42	16	107	62	**90**	116	55
74	**40**	13	105	66	89	113	48	10	**86**	27
102	59	98	119	49	8	84	24	72	44	**12**

671
55099
5089835
502026547
51638523431

⑪

117	63	16	75	87	48	91	100	44	28	**2**
42	**32**	4	113	56	22	72	79	51	**96**	104
47	89	**110**	39	24	7	118	60	**20**	76	81
17	68	84	**52**	93	108	43	**26**	3	111	66
8	115	64	21	**70**	80	**45**	99	105	35	29
109	37	25	1	121	**61**	13	73	85	49	97
78	55	94	101	**40**	30	**5**	119	65	15	69
57	18	74	**82**	53	98	103	**36**	23	11	116
27	9	**120**	59	14	67	88	50	**90**	106	51
92	**102**	34	33	6	112	62	19	71	**86**	54
77	83	46	95	107	38	31	10	114	58	**12**

117	105	67	4	97	19	24	55	58	43	**82**	⑫
14	**32**	49	62	39	78	114	108	74	**2**	99	
85	112	**110**	69	10	93	18	28	**45**	59	42	
89	15	31	**52**	57	44	80	**120**	104	73	6	
38	84	116	100	**70**	9	**96**	13	33	47	65	
11	91	21	27	51	**61**	34	81	119	107	68	
64	51	79	121	**102**	76	**5**	95	17	23	48	此 12 方是
72	1	92	**20**	30	46	66	36	87	115	106	不对称的
54	60	**40**	83	111	103	75	8	**90**	22	25	特优完美幻方
101	**77**	3	98	16	29	50	56	37	**86**	118	
26	53	63	35	88	113	109	71	7	94	**12**	

五、13 阶完美幻方的特优性

$$n = 13, \varphi(13) = 12, 13^2 = 169, \mathbf{F} = \{1, 2, 3, \cdots, 169\}.$$

$$\sum_{13} = 1105.\ \lambda(13) = 13! = 39916800,\ \mu(13) = 5!2^5 = 3840. \quad (34)$$

1.4 次特优

现以排列不对称 13 级排列$\pi = (1,2,12,10,3,8,7,13,4,11,9,5,6)$为列、行序构作 13 阶分段方，以及其循环排列如下：

A

1	2	12	10	3	8	7	13	4	11	9	5	6
14	15	25	23	16	21	20	26	17	24	22	18	19
144	145	155	153	146	151	150	156	147	154	152	148	149
118	119	129	127	120	125	124	130	121	128	126	122	123
27	28	38	36	29	34	33	39	30	37	35	31	32
92	93	103	101	94	99	98	104	95	102	100	96	97
79	80	90	88	81	96	85	91	82	89	87	83	84
157	158	168	166	159	164	165	169	160	167	165	161	162
40	41	51	49	42	47	46	52	43	50	48	43	44
131	132	142	140	133	138	137	143	134	141	139	135	136
105	106	116	114	107	112	111	117	108	115	113	109	110
53	54	64	62	55	60	59	65	56	63	61	57	58
66	67	77	75	68	73	72	78	69	76	74	70	71

$\pi_1 = (1,2,12,10,3,8,7,13,4,11,9,5,6) = \pi_5$

$\pi_{11} = (1,12,3,7,4,9,6,2,10,8,13,11,5) = \pi_4$

$\pi_2 = (1,3,4,6,10,13,5,12,7,9,2,8,11) = \pi_{10}$

$\pi_3 = (1,4,10,5,7,2,11,3,6,13,12,9,8) = \pi_7$

$\pi_9 = (1,10,7,11,6,12,8,4,5,2,3,13,9) = \pi_8$

$\pi_6 = (1,7,6,8,5,3,9,10,11,12,4,2,13) = \pi_{12}$

(35)

通过行 Z 变换所得各列和方的中心线(包含 85 之线, A_0, A_1)：

B_1	1	15	155	127	29	99	85	169	43	141	113	57	71	1105	126597
B_{12}	6	18	152	128	30	104	85	164	42	140	116	54	66	1105	127777
B_2	13	24	148	118	38	94	85	160	48	136	106	62	73	1105	120887
B_7	10	22	146	122	34	97	85	157	52	132	208	64	76		

B_5　12　26　149　120　37　93　85　161　49　134　105　60　74　　1105　121043
B_8　9　21　144　121　36　96　85　158　50　133　110　65　77

B_6　11　25　147　119　39　92　85　162　47　135　107　61　75　　1105　121199
B_{11}　8　23　145　123　35　95　85　159　51　131　109　63　78

B_3　2　16　156　126　27　101　85　167　45　142　112　56　70　　346776801865
B_9　3　14　154　125　28　100　85　168　44　143　114　58　69　　346853853385
1105　129285　17000425　2380826565　(5 次和不等)

B_4　4　19　153　130　31　103　85　165　41　138　115　53　68　　331479999565
B_{10}　5　17　151　129　32　102　85　166　40　139　117　55　67　　331557051085
1105　128089　16695445　2310269689　(5 次和不等)

这里 B_3, B_9; B_4, B_{10} 的中心线都分别是 4 次和相等的，而 5 次和却是不等的. 因此，分别以 B_3, B_9; B_4, B_{10} 为完美幻方的对角线组，可得 4 次特优的 13 阶完美幻方. 其作法是:

(1) 以 B_3, B_9 (B_4, B_{10})为行、列线组构作完美幻方.

(2) 对所得完美幻方作列的循环变换可得不同的以 B_3, B_9 (B_4, B_{10})为行、列线组的完美幻方(这只要 A_0, A_1 不成线状出现即可).

(3) 对所得完美幻方，用拓扑变换可把 B_3, B_9(B_4, B_{10}) 变成新方的对角线组. 再用行、列轮回可把对角线组的中心线调整成主对角线，从而得到 4 次特优的完美幻方.

通过这样的方法分别可得 4 个 13 阶特优的完美幻方. 下面直接给出这些 13 阶完美幻方. 以 B_2, B_7; B_5, B_8; B_6, B_{11} 为对角线组，分别可得二次特优的完美幻方.

143	60	10	145	32	87	43	111	68	25	118	96	167	①
5	154	39	86	49	106	71	22	121	98	159	142	53	行　列
38	79	44	115	78	21	127	93	162	139	56	7	146	B_1　B_{12}
46	107	77	14	122	102	169	138	62	2	149	35	82	
74	17	124	94	168	131	57	11	156	34	88	41	110	Ⅰ　Ⅱ
119	97	165	134	59	3	155	27	83	50	117	73	23	B_9　B_3
164	140	54	6	152	30	85	42	116	66	18	128	104	
63	13	151	36	80	45	113	69	20	120	103	157	135	1105
144	31	89	52	112	75	15	123	100	160	137	35	12	129285
81	51	105	70	24	130	99	166	132	58	9	147	33	17000425
108	72	16	129	92	161	141	65	8	153	28	84	48	2380826565
19	126	95	163	133	64	1	148	37	91	47	114	67	
101	158	136	61	4	150	29	90	40	109	76	26	125	
44	131	116	55	72	4	22	149	119	36	99	91	167	②
59	69	9	19	145	127	34	104	89	161	40	142	107	行　列
15	153	125	39	102	83	157	51	133	111	56	74	6	
37	96	79	168	42	137	108	61	71	2	23	151	130	B_2　B_7
159	46	134	113	58	67	10	21	156	128	31	92	90	
110	54	75	8	26	154	122	27	103	81	163	43	139	
13	24	148	118	38	94	85	160	48	136	106	62	73	
129	29	98	82	165	45	132	114	60	78	11	18	144	
87	162	41	140	112	65	76	5	14	155	120	33	95	
138	117	63	70	1	25	146	124	30	100	84	158	49	
66	12	16	150	121	35	97	80	166	47	143	115	57	
147	126	32	93	88	164	52	141	109	53	77	3	20	
101	86	169	50	135	105	64	68	7	17	152	123	28	

14	42	147	136	127	117	31	64	98	74	80	8	167	③
113	28	60	102	66	81	4	162	23	52	148	142	124	
91	5	168	20	48	145	138	128	105	29	56	97	75	$\boldsymbol{B}_8$ $\boldsymbol{B}_4$
146	134	123	114	39	57	103	72	87	2	164	24	40	
54	99	76	79	3	160	19	49	156	135	129	111	35	
161	25	46	152	132	125	115	27	55	95	71	88	13	
121	110	36	65	96	77	85	9	158	21	50	144	133	
73	89	1	159	17	45	153	143	122	116	33	61	93	
51	150	139	119	112	37	53	94	69	84	10	169	18	
32	62	104	70	90	7	165	15	47	154	131	120	108	
11	157	16	43	149	140	130	109	38	59	100	67	86	
137	126	106	34	63	92	68	82	6	166	26	44	155	
101	78	83	12	163	22	41	151	141	118	107	30	58	

69	39	137	21	81	62	129	41	1	87	109	152	167	④
79	58	122	48	11	95	117	150	164	68	36	142	15	
8	94	114	155	158	66	32	135	22	89	56	130	46	$\boldsymbol{B}_5$ $\boldsymbol{B}_{10}$
165	76	30	143	20	86	55	127	51	2	92	110	148	
25	80	53	123	44	9	102	108	156	163	73	29	140	
52	7	99	107	153	168	67	27	136	18	87	63	121	
149	161	74	37	134	26	85	60	120	49	12	93	105	
133	23	90	54	118	45	5	100	115	147	169	72	34	
128	43	13	98	112	146	166	77	28	131	19	83	61	
106	144	162	70	35	141	17	91	59	125	42	10	103	
33	138	16	88	64	119	40	6	96	113	154	160	78	
57	126	50	4	104	111	151	159	75	38	132	14	84	
101	116	145	157	71	31	139	24	82	65	124	47	3	

151	105	95	10	44	124	54	89	16	136	39	77	165	⑤
69	166	148	111	93	11	42	123	65	90	22	138	27	行 列
136	33	67	167	146	110	104	12	48	125	53	82	23	$\boldsymbol{B}_{12}$ $\boldsymbol{B}_1$
80	24	133	32	78	168	152	112	92	4	49	122	59	
120	58	91	25	139	34	66	160	153	109	98	2	50	I II
13	51	126	60	79	17	140	31	72	158	154	107	97	$\boldsymbol{B}_{10}$ $\boldsymbol{B}_4$
113	99	1	43	127	57	85	15	141	29	1	169	155	
157	147	114	96	7	41	128	55	84	26	142	35	73	1105
36	70	163	145	115	94	6	52	129	61	86	14	134	128089
20	132	37	68	162	156	116	100	8	40	121	62	83	16695445
63	81	19	143	38	74	164	144	108	101	5	46	119	2310269689
45	130	64	87	21	131	30	75	161	150	106	102	3	
103	9	47	118	56	88	18	137	28	76	159	149	117	

5	84	66	93	64	36	107	125	137	156	43	24	165	⑥
52	17	167	9	83	71	92	54	38	114	120	138	150	
127	133	151	46	26	160	11	87	70	97	53	28	116	$\boldsymbol{B}_6$ $\boldsymbol{B}_{11}$
58	27	106	129	140	146	47	20	169	4	89	74	96	
82	76	100	57	32	105	119	142	153	42	21	163	13	
16	64	7	91	69	102	61	31	110	118	132	155	49	
131	145	51	23	159	8	85	78	95	63	35	109	123	
37	113	122	136	144	41	25	166	3	86	72	104	56	
73	98	65	30	115	126	135	149	40	15	168	10	81	
158	12	88	68	99	59	39	108	128	139	148	45	14	
152	44	19	157	2	90	75	94	60	33	117	121	141	
111	130	134	154	48	18	162	1	80	77	101	55	34	
103	62	29	112	124	143	147	50	22	161	6	79	67	

55	148	86	110	20	92	143	2	30	51	76	127	165	⑦
33	40	78	119	160	64	154	88	113	16	96	138	6	
108	25	102	140	9	29	44	73	123	163	53	156	80	B_9 B_5
126	159	57	151	84	111	14	104	132	4	38	50	75	
136	7	27	52	67	121	168	63	153	87	107	18	99	
145	82	116	24	101	139	3	31	47	71	124	157	65	
49	74	120	161	60	149	85	105	26	93	134	12	37	
21	97	137	1	39	41	69	129	137	62	152	81	109	
169	54	147	90	115	23	100	133	5	34	45	72	118	
11	36	48	68	122	164	58	150	79	117	15	95	142	
83	112	19	98	131	13	28	43	77	128	166	61	146	
66	130	158	56	155	89	114	22	94	135	8	32	46	
103	141	10	35	42	70	125	162	59	144	91	106	17	

32	15	62	47	104	154	70	131	90	120	7	108	165	⑧
128	5	105	168	29	20	56	48	97	145	75	138	91	
150	69	139	84	119	10	112	169	37	18	53	51	94	B_3 B_8
23	60	52	102	148	66	142	81	124	4	113	162	28	
1	116	159	33	17	61	45	93	153	73	143	89	122	
74	136	80	127	8	117	167	31	14	64	42	98	147	
65	50	96	144	77	133	85	121	9	110	158	36	21	
107	163	30	22	58	41	101	151	78	141	83	112	12	
132	88	125	13	115	161	27	25	55	46	95	152	71	
44	92	155	68	137	82	126	6	106	166	34	26	63	
160	35	19	54	49	99	156	76	135	79	129	3	111	
86	130	11	109	157	38	16	59	43	100	149	67	140	
103	146	72	134	87	123	2	114	164	39	24	57	40	

由定理 3 知，对中心对称的奇数阶完美幻方的中心线，必能得到奇数次和相等. 因此，要想得到偶数次特优完美幻方，只能在非中心线上，或非中心对称的完美幻方中找到. 这就是一个例.

2.5 次特优

(1) 有 13 级对称排列π= (1,2,4,5,3,8,7,6,11,9,10,12,13)，对称中心为 7，$a + a' = 14$. 首先对排列π作如下变换:

$$\pi = (1,2,4,5,3,8,7,6,11,9,10,12,13)$$

$$\overset{\psi_1}{\longleftrightarrow} \lambda(1,2,12,13;\ 6,5,11,10,7,4,3,9,8) \tag{36}$$

分别以π, λ为行、列序构作分段方 A_1, C_1，并给出各列和方的中心线，可见对应列和方的中心线是相同的. 而且这种变换是互逆的. 因此称ψ_1是保所有列和方中心线变换.

因排列π是对称的，所得分段方、列和方、完美幻方都是对称方阵. 其对称中心为：85，互补数为:$a + a' = 170$.

1	2	4	5	3	8	7	6	11	9	10	12	13	A_1
14	15	17	18	16	21	20	19	24	22	23	25	26	
40	41	43	44	42	47	46	45	50	48	49	51	52	
53	54	56	57	55	60	59	58	63	61	62	64	65	
27	28	30	31	29	34	33	32	37	35	36	38	39	
92	93	95	96	94	99	98	97	102	100	101	103	104	
79	80	82	83	81	86	85	84	89	87	88	90	91	
66	67	69	70	68	73	72	71	76	74	75	77	78	
131	132	134	135	133	138	137	136	141	139	140	142	143	
105	106	108	109	107	112	111	110	115	113	114	116	117	
118	119	121	122	120	125	124	123	128	126	127	129	130	
144	145	147	148	146	151	150	149	154	152	153	155	156	
157	158	160	161	159	164	163	162	167	165	166	168	169	

1	2	12	13	6	5	11	10	7	4	3	9	8	C_1
14	15	25	26	19	18	24	23	20	17	16	22	21	
144	145	155	156	149	148	154	153	150	147	146	152	151	
157	158	168	169	162	161	167	166	163	160	159	165	164	
66	67	77	78	71	70	76	75	72	69	68	74	73	
53	54	64	65	58	57	63	62	59	56	55	61	60	
131	132	142	143	136	135	142	141	137	134	133	139	138	
118	119	129	130	123	122	128	127	124	121	120	126	125	
79	80	90	91	84	93	89	88	85	82	81	87	86	
40	41	51	52	45	44	50	49	46	43	42	48	47	
27	28	38	39	32	31	37	36	33	30	29	35	34	
105	106	116	117	110	109	115	114	111	108	107	113	112	
92	93	103	104	97	96	102	101	98	95	94	100	99	

A_1	C_1													
B_2	B_7	6	22	51	53	30	94	85	76	140	117	119	148	164
B_7	B_2	5	23	42	64	34	104	85	66	136	106	128	147	165
							1105	124917	15886585	2154601605	304319679625			
B_6	B_{11}	9	17	50	54	32	92	85	78	138	116	120	153	161
B_{11}	B_6	8	18	41	65	36	102	85	68	134	105	129	152	162
							1105	124813	15860065	2147724085	302674113625			
B_3	B_9	2	16	45	62	27	96	85	74	143	108	125	154	168
B_9	B_3	3	14	48	60	28	101	85	69	142	110	122	156	167
							1105	128453	16788265					
B_5	B_8	4	19	52	55	35	93	85	77	135	115	118	151	166
B_8	B_5	10	21	40	63	31	103	85	67	139	107	130	149	160
							1105	124865	15873325					
B_4	B_{10}	11	26	44	58	38	95	85	75	132	112	126	144	159
B_{10}	B_4	12	24	47	56	39	100	85	70	131	114	123	146	158
							1105	121277	14958385					

51	84	122	26	102	108	1	35	138	158	62	72	147	①
65	76	146	40	87	125	15	101	111	4	38	136	161	B_{13} B_1
27	139	164	54	75	150	43	60	123	18	104	115	3	
93	114	7	30	142	162	57	78	154	42	79	126	21	B_2 B_7
82	129	19	96	117	11	29	131	165	60	67	153	46	
70	156	50	81	118	22	99	106	10	33	134	168	58	
133	157	61	73	145	49	85	121	25	97	109	13	37	
112	2	36	137	160	64	71	148	52	89	120	14	100	1105
124	17	103	110	5	39	141	159	53	74	151	41	88	124917
149	44	91	128	16	92	113	8	28	140	163	56	77	15886585
167	55	66	152	47	80	127	20	95	116	6	31	143	2154601605
9	34	132	166	59	69	155	45	83	130	24	94	105	304319679625
23	98	108	12	32	135	169	63	68	144	48	86	119	

以 B_2,B_7; B_6,B_{11} 为对角线组，各可得 4 个 5 次特优的 13 阶完美幻方. 以 B_3,B_9; B_4,B_{10}; B_5,B_8 为对角线组各可得 4 或 5 个 3 次特优的 13 阶完美幻方.

76	7	81	160	92	155	35	123	60	109	41	143	23	②
54	117	49	141	20	68	4	79	168	100	149	34	122	B_4 B_5
162	99	148	28	130	62	115	46	133	17	66	12	87	
131	25	74	6	86	161	93	156	36	128	59	107	43	B_2 B_7
33	120	56	105	51	139	19	73	5	80	169	101	154	
13	88	167	98	146	30	118	64	113	45	138	18	67	
112	44	132	26	75	11	85	159	95	144	38	126	58	
103	152	32	125	57	106	52	140	24	72	3	82	157	
16	69	1	90	165	97	151	31	119	65	114	50	137	
127	63	111	42	134	14	77	9	84	164	96	145	39	
83	158	104	153	37	124	55	108	40	142	22	71	8	
48	136	21	70	2	91	166	102	150	29	121	53	116	
147	27	129	61	110	47	135	15	78	10	89	163	94	

76	95	61	18	166	120	142	86	39	46	1	149	106	③
151	117	72	92	58	15	167	121	139	83	36	42	12	B_3 B_9
43	9	148	114	68	103	60	26	163	118	136	80	7	
91	33	40	6	145	115	69	100	57	23	159	129	138	B_2 B_7
126	135	88	29	51	8	156	111	66	97	54	24	160	
20	157	123	132	89	30	48	5	153	107	77	99	65	
96	62	16	168	125	143	85	27	45	2	154	108	74	
105	71	93	63	17	165	122	140	81	38	47	13	150	
10	146	116	73	104	59	14	162	119	141	82	35	44	
32	41	11	147	113	70	101	55	25	164	130	137	79	
133	90	34	52	7	144	110	67	102	56	22	161	127	
158	128	134	87	31	49	3	155	112	78	98	53	19	
64	21	169	124	131	84	28	50	4	152	109	75	94	

140	154	20	29	69	118	12	61	84	112	161	41	104	④
110	164	44	93	143	153	24	33	68	121	1	64	87	B_8 B_{10}
120	4	53	60	113	162	47	96	132	156	23	37	72	
145	26	36	76	124	3	56	79	116	165	45	99	135	B_2 B_7
168	48	97	138	148	15	39	75	128	7	55	82	105	
11	59	81	108	157	51	100	136	151	18	28	78	127	
21	31	68	130	10	63	85	107	160	40	103	139	149	
43	92	142	152	19	34	70	119	13	62	89	111	159	
65	88	115	163	42	95	131	155	22	32	73	122	2	
35	71	125	5	54	91	114	167	46	94	134	144	25	
98	133	147	14	38	74	123	8	57	80	117	166	50	
83	106	169	49	102	137	146	17	27	77	126	6	60	
66	129	9	58	86	109	158	52	101	141	150	16	30	

9	34	132	166	59	69	155	45	83	130	24	94	105	⑤
124	17	103	110	5	39	141	159	53	74	151	41	88	B_{13} B_1
70	156	50	81	118	22	99	106	10	33	134	168	58	
27	139	164	54	75	150	43	60	123	18	104	115	3	B_6 B_{11}
23	98	108	12	32	135	169	63	68	144	48	86	119	
149	44	91	128	16	92	113	8	28	140	163	56	77	
133	157	61	73	145	49	85	121	25	97	109	13	37	1105
93	114	7	30	142	162	57	78	154	42	79	126	21	124813
51	84	122	26	102	108	1	35	138	158	62	72	147	15860065
167	55	66	152	47	80	127	20	95	116	6	31	143	2147724085
112	2	36	137	160	64	71	148	52	89	120	14	100	302674113625
82	129	19	96	117	11	29	131	165	60	67	153	46	
65	76	146	40	87	125	15	101	111	4	38	136	161	
32	125	57	106	52	140	24	72	3	82	157	103	152	⑥
77	9	84	164	96	145	39	127	63	111	42	134	14	B_4 B_{10}
121	53	116	48	136	21	70	2	91	166	102	150	29	
7	81	160	92	155	35	123	60	109	41	143	23	76	B_6 B_{11}
62	115	46	133	17	66	12	87	162	99	148	28	130	
80	169	101	154	33	120	56	105	51	139	19	73	5	
112	44	132	26	75	11	85	159	95	144	38	126	58	
165	97	151	31	119	65	114	50	137	16	69	1	90	
40	142	22	71	8	83	158	104	153	37	124	55	108	
94	147	27	129	61	110	47	135	15	78	10	89	163	
141	20	68	4	79	168	100	149	34	122	54	117	49	
156	36	128	59	107	43	131	25	74	6	86	161	93	
18	67	13	88	167	98	146	30	118	64	113	45	138	
138	91	33	40	6	145	115	69	100	57	23	159	129	⑦
22	161	127	133	90	34	52	7	144	110	67	102	56	B_3 B_5
66	97	54	24	160	126	135	88	29	51	8	156	111	
3	155	112	78	98	53	19	158	128	134	87	31	49	B_6 B_{11}
89	30	48	5	153	107	77	99	65	20	157	123	132	
169	124	131	84	28	50	4	152	109	75	94	64	21	
96	62	16	168	125	143	85	27	45	2	154	108	74	
149	106	76	95	61	18	166	120	142	86	39	46	1	
38	47	13	150	105	71	93	63	17	165	122	140	81	
121	139	83	36	42	12	151	117	72	92	58	15	167	
59	14	162	119	141	82	35	44	10	146	116	73	104	
114	68	103	60	26	163	118	136	80	37	43	9	148	
41	11	147	113	70	101	55	25	164	130	137	79	32	
9	58	86	109	158	52	101	141	150	16	30	66	129	⑧
146	17	27	77	126	6	60	83	106	169	49	102	137	B_8 B_9
117	166	50	98	133	147	14	38	74	123	8	57	80	
71	125	5	54	91	114	167	46	94	134	144	25	35	B_6 B_{11}
95	131	155	22	32	73	122	2	65	88	115	163	42	
62	89	111	159	43	92	142	152	19	34	70	119	13	
21	31	68	130	10	63	85	107	160	40	103	139	149	
157	51	100	136	151	18	28	78	127	11	59	81	108	
128	7	55	82	105	168	48	97	138	148	15	39	75	
135	145	26	36	76	124	3	56	79	116	165	45	99	
60	113	162	47	96	132	156	23	37	72	120	4	53	
33	68	121	1	64	87	110	164	44	93	143	153	24	
41	104	140	154	20	29	69	118	12	61	84	112	161	

这是由 A_1 得到的 8 个(2 组主对角线)5 次特优的 13 阶完美幻方. 从 C_1 和 A_2, C_2 出发又还可各得 8 个 5 次特优方, 共可得 $4\times8=32$ 个 5 次特优方.

(2) 以排列π=(1,2,6,3,7,11,8,12,13,9,10,4,5)为行、列序构作分段方:

1	2	6	3	7	11	8	12	13	9	10	4	5	A_2
14	15	19	16	20	24	21	25	26	22	23	17	18	
66	67	71	68	72	76	73	77	78	74	75	69	70	
27	28	32	29	33	37	34	38	39	35	36	30	31	
79	80	84	81	85	89	86	90	91	87	88	82	83	
131	132	136	133	137	141	138	142	143	139	140	134	135	
92	93	97	94	98	102	99	103	104	100	101	95	96	
144	145	149	146	150	154	151	155	156	152	153	147	148	
157	158	162	159	163	167	164	168	169	165	166	160	161	
105	106	110	107	111	115	112	116	117	113	114	108	109	
118	119	123	120	124	128	125	129	130	126	127	121	122	
40	41	45	42	46	50	47	51	52	48	49	43	44	
53	54	58	55	59	63	60	64	65	61	62	56	57	
1	2	5	6	8	9	12	13	10	3	7	11	4	C_2
14	15	18	19	21	22	25	26	23	16	20	24	17	
53	54	57	58	60	61	64	65	62	55	59	63	56	
66	67	70	71	73	74	77	78	75	68	72	76	69	
92	93	96	97	99	100	103	104	101	94	98	102	95	
105	106	109	110	112	113	116	117	114	107	111	115	108	
144	145	148	149	151	152	155	156	153	146	150	154	147	
157	158	161	162	164	165	168	169	166	159	163	167	160	
118	119	122	123	125	126	129	130	127	120	124	128	121	
27	28	31	32	34	35	38	39	36	29	33	37	30	
79	80	83	84	86	87	90	91	88	81	85	89	82	
131	132	135	136	138	139	142	143	140	133	137	141	134	
40	41	44	45	47	48	51	52	49	42	46	50	43	

A_2 C_2

B_2 B_7 9 17 66 32 85 138 104 153 161 106 120 50 64

B_7 B_2 6 22 68 36 85 134 102 148 164 105 129 41 65

1105 124397 15753985 2128488245 299608401625

B_6 B_{11} 8 18 76 30 85 140 94 152 162 117 119 51 53

B_{11} B_6 5 23 78 34 85 136 92 147 165 116 128 42 54

1105 125333 15992665 2173837445 307385391625

这里, C_2也是A_2经过保所有列和方中心线变换ψ_1而得到的排列:

$$
\begin{aligned}
&A_2(1,2,6,3,7,11,8,12,13;9,10,4,5)\\
&\quad\xrightarrow{L}(4,5,1,2,6,3,7,11,8,12,13,9,10)\\
&\quad\xleftrightarrow{\psi_1}(4,5,9,10;11,2,8,13,7,1,6,12,3)\\
&\quad\xrightarrow{X}C_2(1,2,5,6,8,9,12,13;10,3,7,11,4)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

其中, X, L 分别是排列循环变换、轮回变换. 下面的是两组列和方中心线, 由之也各可得到 4×2 个 5 次特优的 13 阶完美幻方及相应的 3 次特优的完美幻方.

3.7 次特优

(1) 首先我们来研究几类 13 阶的保列和方中心线变换:

① $\psi_1: Ai \xrightarrow{\psi_1} Ci(i=1,2,3,4)$, 这个变换保留了所有列和方的中心线.

其变换如:

$$A_1(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13) \xrightarrow{\psi_1} C1(1,2,12,13;\ 11,5,10,8,7,6,4,9,3).$$

且保中心线变换ψ_1是可逆的，即

$$C1 \xrightarrow{L} (12,13,11,5,10,8,7,6,4,9,3,1,2) \xrightarrow{\psi_1} (12,13,1,2;\ 6,5,4,3,7,11,10,9,8) \xrightarrow{L} A_1.$$

其中 L 是排列的轮回变换, X 是循环排列变换，它们都不改变各列和方各线的组成状况.

$$Ai \overset{\psi_1}{\longleftrightarrow} Ci \qquad (i=1,2,3,4)$$

②ψ_2: $A_1 \xrightarrow{\psi_2} A_2 \xrightarrow{\psi_2} A_3 \xrightarrow{\psi_2} A_4 \xrightarrow{\psi_2} A_1$. 例如,

$$A_1(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13) \xrightarrow{\psi_2} A_2(1,2,6,10,5,3,7,11,9,4,8,12,13).$$

从而

$A_1(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13)$	$10\to5$,	$5\to4$;
$A_2(1,2,6,10,5,3,7,11,9,4,8,12,13)$	$9\to10$,	$10\to5$;
$A_3(1,2,6,9,10,3,7,11,4,5,8,12,13)$	$4\to9$,	$9\to10$;
$A_4(1,2,6,4,9,3,7,11,5,10,8,12,13)$	$5\to4$,	$4\to9$: A_1.

对 C 组同样有

$$C_1 \xrightarrow{\psi_2} C_2 \xrightarrow{\psi_2} C_3 \xrightarrow{\psi_2} C_4 \xrightarrow{\psi_2} C_1.$$

$C_1(1,2,12,13;\ 11,5,10,8,7,6,4,9,3)$,

$C_2(1,2,12,13;\ 11,10,9,8,7,6,5,4,3)$,

$C_3(1,2,12,13;\ 11,9,4,8,7,6,10,5,3)$,

$C_4(1,2,12,13;\ 11,4,5,8,7,6,9,10,3)$.

这类保中心线变换ψ_2只保列和方 B_5, B_8 的中心线，而其余各列和方的中心线则有所改变.

除了ψ_2外，还有别的保 B_5, B_8 的中心线变换ψ_3. 例如:

$$A_1(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13) \xrightarrow{\psi_3} D_1(1,2,3,4,6,5,9,8,10,11,12,13;\ 7)$$

对 D_1 用保中心线变换ψ_1有:

$$D_1(1,2,3,4,6,5,9,8,10,11,12,13,7) \xrightarrow{L} (9,8,10,11,12,13,7,1,2,3,4,6,5)$$

$$\xrightarrow{\psi_1} (9,8,6,5;\ 1,11,2,4,7,10,12,3,13) \xrightarrow{X} G_1(1,2,7,12,13;\ 8,5,11,4,10,3,9,6).$$

因而，对 D_1, G_1 类似 A_1, C_1. 用 ψ_2 还可得:

D_1(1,2,3,4,6,5,9,8,10,11,12,13; 7), G_1(1,2,7,12,13; 8,5,11,4,10,3,9,6),

D_2(1,2,3,5,6,10,4,8,9,11,12,13; 7), G_2(1,2,7,12,13; 8,10,11,5,9,3,4,6),

D_3(1,2,3,10,6,9,5,8,4,11,12,13; 7), G_3(1,2,7,12,13; 8,9,11,10,4,3,5,6),

D_4(1,2,3,9,6,4,10,8,5,11,12,13; 7). G_4(1,2,7,12,13; 8,4,11,9,5,3,10,6).

所以, $Di \overset{\psi_1}{\longleftrightarrow} Gi(i=1, 2, 3, 4)$仍是对所有的列和方的中心线均保持不变.

③ 对 D_1 再执行保中心线变换 ψ_3 可得:

$D_1 \overset{L}{\rightarrow}$(9,8,10,11,12,13,7,1,2,3,4,6,5)

$\overset{\psi_3}{\rightarrow}$ (9,8,13,12,10,11,3,4,2,1,6,5,7)

$\overset{X}{\rightarrow}$ E_1(1,2,4,3,11,10,12,13; 8,9,7,5,6)

$\overset{L}{\rightarrow}$ (11,10,12,13,8,9,7,5,6,1,2,3,4)

$\overset{\psi_3}{\rightarrow}$ (11,10,9,8,12,13,1,2,6,5,4,3,7)

$\overset{L}{\rightarrow}$ (1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13) A_1.

因此，由上可知，保中心线变换 ψ_3 使对称排列有如下变换:

$$A_1 \overset{\psi_3}{\rightarrow} D_1 \overset{\psi_3}{\rightarrow} E_1 \overset{\psi_3}{\rightarrow} A_1.$$

对 E_1 再分别执行保中心线变换 ψ_1, ψ_2, 又可得 4 组排列:

E_1 (1,2,4,3,11,10,12,13,8,9,7,5,6), F_1(1,2,3,9,7,5,11,12,13,10,8,6,4),

E_2 (1,2,5,3,11,9,12,13,8,4,7,10,6), F_2(1,2,3,4,7,10,11,12,13,9,8,6,5),

E_3 (1,2,10,3,11,4,12,13,8,5,7,9,6), F_3(1,2,3,5,7,9,11,12,13,4,8,6,10),

E_4 (1,2,9,3,11,5,12,13,8,10,7,4,6), F_3(1,2,3,10,7,4,11,12,13,5,8,6,9).

④还有另一种只保 B_5, B_8 的中心线变换 ψ_4:

A_1(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13)

$\overset{\psi_4}{\rightarrow}$ H1(1,2,8,6,12,13; 10,5,11,7,3,9,4)

$\overset{L}{\rightarrow}$ (6,12,13,10,5,11,7,3,9,4,1,2,8)

$\overset{\psi_4}{\rightarrow}$ (6,12,1,13,2,8; 9,10,3,7,11,4,5)

$\overset{X}{\rightarrow}$ E_4(1,2,9,3,11,5,12,13; 8,10,7,4,6)

$\overset{L}{\rightarrow}$ (11,5,12,13,8,10,7,4,6,1,2,9,3)

$\overset{\psi_4}{\rightarrow}$ (11,5,2,12,9,3; 6,13,4,7,10,1,8)

$\overset{X}{\rightarrow}$ (1,2,6,10,5,3,7,11,9,4,8,12,13) A_2

可见有

$$A_1 \xrightarrow{\psi_4} \mathbf{H}_1 \xrightarrow{\psi_4} \mathbf{E}_4 \xrightarrow{\psi_4} A_2 .$$

再由 ψ_1, ψ_2 可得下面 H 组, K 组排列:

H$_1$ (1,2,8,6,12,13,10,5,11,7,3,9,4), **K**$_1$ (1,2,5,10,6,7,8,4,9,12,13,3,11),

H$_2$ (1,2,8,6,12,13,9,10,11,7,3,4,5), **K**$_2$ (1,2,10,9,6,7,8,5,4,12,13,3,11),

H$_3$ (1,2,8,6,12,13,4,9,11,7,3,5,10), **K**$_3$ (1,2,9,4,6,7,8,10,5,12,13,3,11),

H$_4$ (1,2,8,6,12,13,5,4,11,7,3,10,9). **K**$_4$ (1,2,4,5,6,7,8,9,10,12,13,3,11).

下面举一些例, 由指定排列给出分段方, 并计算其列和方的中心线的各次和.

(2) 以对称的 13 级排列: A_1 =(1,2,6,5,4,3,7,11,10,9,8,12,13)为行、列序构作 13 阶分段方:

1	2	6	5	4	3	7	11	10	9	8	12	13	A_1
14	15	19	18	17	16	20	24	23	22	21	25	26	
66	67	71	70	69	68	72	76	75	74	73	77	78	
53	54	58	57	56	55	59	63	62	61	60	64	65	
40	41	45	44	43	42	46	50	49	48	47	51	52	
27	28	32	31	30	29	33	37	36	35	34	38	39	
79	80	84	83	82	81	85	89	88	87	86	90	91	
131	132	136	135	134	133	137	141	140	139	138	142	143	
118	119	123	122	121	120	124	128	127	126	125	129	130	
105	106	110	109	108	107	111	115	114	113	112	116	117	
92	93	97	96	95	94	98	102	101	100	99	103	104	
144	145	149	148	147	146	150	154	153	152	151	155	156	
157	158	162	161	160	159	163	167	166	165	164	168	169	

1	2	12	13	11	5	10	8	7	6	4	9	3	C_1
14	15	25	26	24	18	23	21	20	19	17	22	16	
144	145	155	156	154	148	153	151	150	149	147	152	146	
157	158	168	169	167	161	166	164	163	162	160	165	159	
131	132	142	143	141	135	140	138	137	136	134	139	133	
53	54	64	65	63	57	62	59	58	57	56	61	55	
118	119	129	130	128	122	127	125	124	123	121	126	120	
92	93	103	104	102	96	101	99	98	97	95	100	94	
79	80	90	91	89	83	88	86	85	84	82	87	81	
66	67	77	78	76	70	75	73	72	71	69	74	68	
40	41	51	52	50	44	49	47	46	45	43	48	42	
105	106	116	117	115	109	114	112	111	110	108	113	107	
27	28	38	39	37	31	36	34	33	32	30	35	29	

A_1	C_1													
B_8	B_5	8	16	154	162	132	62	126	104	85	66	44	108	38
B_5	B_8	6	24	146	164	142	56	122	92	85	78	48	114	28
			1105	124865	15873325	2151728657	30373766725							
							44084960935145		6529334556802525					
B_7	B_2	5	21	149	165	131	64	128	101	85	69	42	106	39
B_2	B_7	11	22	148	159	140	53	125	93	85	77	45	117	30
							1105	124241	15714205					
B_{11}	B_6	3	18	152	167	134	65	123	103	85	67	47	105	31
B_6	B_{11}	9	19	151	161	143	54	120	95	85	75	50	116	27
							1105	125489	16032445					
B_9	B_3	4	14	156	166	136	55	129	96	85	74	41	115	34
B_3	B_9	2	17	153	168	139	60	130	94	85	76	40	110	31
							1105	128245	16735225					
B_{10}	B_4	12	23	147	158	135	58	118	102	85	68	52	112	35
B_4	B_{10}	10	26	144	160	138	63	119	100	85	70	51	107	32
							1105	121485	15011425					

由上表可知 13 阶列和方之配对如下:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_6 & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_5 \\ | & | & | & | & | & | \\ \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_9 & \boldsymbol{B}_{10} & \boldsymbol{B}_8 \end{matrix} \tag{38}$$

对 13 阶, 保列和方中心线的变换分为两种: 保所有的列和方的中心线ψ_1; 只保列和方 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_8$ 的中心线ψ_2. 例如, 任以如下 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ 两组 13 级排列中的排列作分段方的行、列序构作分段方. 则组内不同排列所得只保 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_8$ 的中心线; 而组间对应排列所得保所有的列和方的中心线. 这里给出以 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_8$ 为对角线组可作出 5 个 7 次特优的 13 阶完美幻方:

154	70	91	101	17	27	113	3	41	125	163	58	142	$\boldsymbol{A}_1$ ①
40	126	159	54	138	150	71	90	102	18	39	114	4	列 行
98	19	38	115	5	52	127	160	53	139	146	67	86	$\boldsymbol{B}_1$ $\boldsymbol{B}_{12}$
65	140	147	66	87	94	15	34	111	6	51	128	161	
107	2	47	124	162	64	141	148	78	88	95	14	35	I II
77	89	96	26	36	108	1	48	120	158	60	137	149	$\boldsymbol{B}_5$ $\boldsymbol{B}_8$
121	157	61	133	145	73	85	97	25	37	109	13	49	1105
21	33	110	12	50	112	169	62	134	144	74	81	93	124865
135	156	75	82	92	22	29	106	8	46	123	168	63	15873325
9	42	119	164	59	136	155	76	83	104	23	30	105	2151728657
84	103	24	31	117	10	43	118	165	55	132	151	72	30373766725
166	56	131	152	68	80	99	20	32	116	11	44	130	44084960935145
28	112	7	43	129	167	57	143	153	69	79	100	16	6529334556802525
62	159	123	52	9	111	31	14	99	89	69	145	142	$\boldsymbol{A}_1$ ②
19	104	87	72	148	131	60	167	121	41	12	114	29	列 行
165	124	44	1	112	37	17	93	90	75	146	136	65	$\boldsymbol{B}_3$ $\boldsymbol{B}_4$
96	79	73	154	134	54	168	127	42	6	117	35	20	I II
125	50	4	106	38	23	94	84	78	152	137	57	157	$\boldsymbol{B}_5$ $\boldsymbol{B}_8$
82	67	155	140	55	162	130	48	7	109	27	21	102	
51	10	107	32	26	100	85	70	144	138	63	160	119	
68	149	143	61	163	122	40	8	115	30	15	103	88	
13	113	33	18	92	86	76	147	132	64	166	120	45	
150	135	53	164	128	43	2	116	36	16	97	91	74	
105	34	24	95	80	77	153	133	58	169	126	46	5	
141	56	158	129	49	3	110	39	22	98	83	66	151	
28	25	101	81	71	156	139	59	161	118	47	11	108	
66	97	30	7	127	60	156	80	18	107	50	165	142	$\boldsymbol{A}_1$ ③
169	132	70	94	37	9	129	53	149	82	20	114	47	
116	40	162	134	72	101	34	13	119	57	146	89	22	$\boldsymbol{B}_9$ $\boldsymbol{B}_{10}$
86	26	106	44	159	141	74	103	27	6	121	59	153	
61	155	79	19	108	46	166	138	78	93	31	3	128	$\boldsymbol{B}_5$ $\boldsymbol{B}_8$
10	125	65	145	83	16	115	48	168	131	71	95	33	
102	35	12	118	58	147	85	23	112	52	158	135	68	
137	75	99	39	2	122	55	154	87	25	105	45	160	
42	167	139	77	92	32	4	124	62	151	91	15	109	
17	111	40	164	143	67	96	79	11	126	64	144	84	
148	81	24	113	51	157	136	69	98	36	8	130	54	
123	56	150	88	21	117	41	161	133	76	100	38	1	
28	5	120	63	152	90	14	110	43	163	140	73	104	
8	87	166	37	150	42	95	57	110	67	118	26	142	$\boldsymbol{A}_1$ ④
124	16	134	5	84	158	27	156	51	99	61	114	76	
58	106	66	130	25	138	9	88	167	33	146	43	96	$\boldsymbol{B}_6$ $\boldsymbol{B}_2$
155	47	100	62	115	72	120	17	135	6	80	157	39	
89	163	29	147	44	97	54	105	78	129	21	139	10	$\boldsymbol{B}_5$ $\boldsymbol{B}_8$
18	136	2	79	169	38	151	48	101	63	111	68	121	
117	77	125	22	140	11	85	159	30	148	45	93	53	
49	102	59	107	69	122	19	132	1	91	168	34	152	
160	31	149	41	92	65	116	73	126	23	141	7	81	
131	13	90	164	35	153	50	98	55	108	70	123	15	
74	127	24	137	3	82	161	32	145	40	104	64	112	
94	56	109	71	119	14	143	12	86	165	36	154	46	
28	144	52	103	60	113	75	128	20	133	4	83	162	

126	115	94	148	158	13	21	75	59	43	32	79	142	A_1 ⑤
147	162	1	25	74	63	42	31	80	143	125	114	98	
26	73	62	46	30	84	131	129	113	102	146	161	2	B_7 B_{11}
50	29	83	132	130	112	101	150	160	6	14	77	61	
136	118	116	100	154	159	5	15	78	60	49	33	82	B_5 B_8
99	153	163	4	19	66	64	48	37	81	135	119	117	
3	18	67	65	47	36	85	134	123	105	103	152	167	
53	51	35	89	133	122	106	104	151	166	7	17	71	
88	137	121	110	92	155	165	11	16	70	54	51	34	
109	93	156	164	10	20	69	58	40	38	87	141	120	
168	9	24	68	57	41	39	86	140	124	108	97	144	
72	56	45	21	90	139	128	107	96	145	169	8	23	
28	91	138	127	111	95	149	157	12	22	76	55	44	

由 C_1 所构作出 5 个 7 次特优的 13 阶完美幻方与由 A_1 所得的是互不同构的.

66	22	123	112	161	91	2	55	43	150	101	37	142	C_1 ⑥
120	108	163	88	11	64	40	152	97	34	135	78	15	行 列
165	84	8	57	52	145	94	30	137	75	24	129	105	B_4 B_3
4	58	49	154	103	27	139	71	21	122	117	158	81	I II
45	151	96	39	132	68	17	124	114	167	90	1	61	B_5 B_8
98	36	141	77	14	126	110	164	83	13	54	42	147	
138	70	26	119	107	160	85	10	63	51	144	100	32	1105
23	128	116	157	87	6	59	44	156	93	29	134	72	124865
109	169	80	3	56	46	153	102	38	131	74	19	125	15873325
89	12	53	48	149	99	31	143	67	16	121	111	166	2151728657
65	41	146	95	33	140	76	25	118	113	162	86	5	30373766725
155	92	35	136	73	18	130	106	159	82	7	62	50	44084960935145
28	133	69	20	127	115	168	79	9	57	47	148	104	6529334556802525

66	63	20	42	130	151	113	103	166	30	80	135	6	C_1 ⑦
153	108	93	161	32	79	141	7	68	65	21	48	129	
81	143	8	74	64	23	43	119	148	110	92	167	33	B_{12} B_1
18	45	118	154	111	94	169	34	87	142	10	69	54	
100	168	36	82	132	5	71	53	24	46	120	156	112	B_5 B_8
11	72	55	26	47	126	155	114	95	158	31	84	131	
121	145	109	97	157	37	85	133	13	73	61	25	49	
39	86	139	12	75	56	15	44	123	144	115	98	159	
57	14	50	124	146	117	99	165	38	88	134	2	70	
116	101	160	28	83	136	1	76	58	16	52	125	152	
137	3	78	59	22	51	127	147	106	96	162	27	89	
41	122	149	105	102	163	29	91	138	9	77	62	17	
164	35	90	140	4	67	57	19	40	128	150	107	104	

66	131	40	84	29	168	96	111	152	119	50	21	56	C_1 ⑧
99	108	144	130	49	19	55	77	5	137	87	28	167	
54	76	8	134	79	39	166	97	107	155	122	46	22	B_{10} B_9
163	100	106	154	125	43	14	65	75	6	133	90	31	
25	57	72	9	132	89	34	160	92	117	153	123	42	
32	159	103	109	150	126	41	24	59	69	1	143	88	
52	23	58	68	12	135	85	35	158	102	112	147	118	
82	27	169	101	110	146	129	44	20	61	67	11	138	
128	47	17	53	78	10	136	81	38	161	98	113	145	
139	80	37	164	95	105	156	127	45	16	64	70	7	
148	124	48	15	63	74	4	131	91	36	162	94	116	
3	142	83	33	165	93	115	151	121	40	26	62	72	
114	149	120	51	18	58	74	2	141	86	30	157	104	

66	158	51	143	115	57	36	125	7	97	17	87	146	C_1 ⑨
136	108	61	29	118	2	103	26	89	148	75	164	46	
31	127	8	98	19	82	152	68	157	41	142	117	63	B_7 B_{11}
93	25	91	154	70	166	47	137	110	56	35	120	1	
147	74	159	40	132	116	65	37	122	10	99	20	84	
49	138	111	57	30	126	3	92	15	90	156	76	161	
64	39	128	5	101	21	85	149	69	165	42	131	106	
9	94	14	80	155	78	167	44	140	112	58	32	121	
86	150	71	160	48	133	105	54	38	130	11	96	23	
169	50	135	114	59	33	123	4	100	16	79	145	77	
107	53	28	129	13	102	18	88	151	72	162	43	139	
124	6	95	22	81	144	67	168	52	141	109	62	34	
24	83	153	73	163	45	134	113	55	27	119	12	104	

66	90	102	127	58	134	159	145	26	5	34	110	48	C_1 ⑩
33	108	42	67	91	96	125	57	139	157	155	24	10	
156	18	8	32	113	40	77	89	101	124	65	133	158	B_6 B_2
61	131	168	154	23	7	30	107	41	78	83	99	123	
88	98	121	55	132	169	148	21	6	35	105	51	76	
106	52	70	86	97	126	53	142	167	153	20	4	29	
19	9	27	116	50	75	85	95	120	54	143	161	151	
141	166	150	17	3	28	117	44	73	84	100	118	64	
94	119	65	135	164	149	22	1	38	115	49	72	82	
47	71	87	92	129	63	140	163	147	16	2	39	109	
12	37	114	46	69	81	93	130	57	138	162	152	14	
160	146	15	13	31	112	45	74	79	103	128	62	137	
122	59	136	165	144	25	11	36	111	43	68	80	104	

利用电脑编制具有指定对角线的完美幻方的方法:

①复制分段方;

②对分段方执行行 Z 变换, 使一个指定对角线组(这里是 B_5)为列和方;

③转置列和方为行和方, 再执行行 Z 变换, 使另一指定对角线组(这里是 B_8)为列和方. 记此方为(B_5, B_8);

④检查(B_5, B_8), 若 A_0, B_0 不成对角线, 则(B_5, B_8)已是完美幻方. 再查对角线组所属列和方. 例如 B_i, B_j, 则记为($B_5, B_8; B_i, B_j$) $(i, j \neq 5,8)$;

⑤作拓扑变换, 将上方变为($B_i, B_j; B_5, B_8$). 再通过行、列轮回变换使指定线为主对角线, 得所要完美幻方;

⑥对(B_5, B_8)进行行的循环变换, 并重复④、⑤得其他所要完美幻方.

(3) 下面是分别以 A_2, C_2, A_3, C_3 等为列、行序构作的分段方:

1	2	6	10	5	3	7	11	9	4	8	12	13	A_2
14	15	19	23	18	16	20	24	22	17	21	25	26	
66	67	71	75	70	68	72	76	74	69	73	77	78	
118	119	123	127	122	120	124	128	126	121	125	129	130	
53	54	58	62	57	55	59	63	61	56	60	64	65	
27	28	32	36	31	29	33	37	35	30	34	38	39	
79	80	84	88	83	81	85	89	87	82	86	90	91	
131	132	136	140	135	133	137	141	139	134	138	142	143	
105	106	110	114	109	107	111	115	113	108	112	116	117	
40	41	45	49	44	42	46	50	48	43	47	51	52	
92	93	97	101	96	94	98	102	100	95	99	103	104	
144	145	149	153	148	146	150	154	152	147	151	155	156	
157	158	162	166	161	159	163	167	165	160	164	168	169	

													C_2
1	2	12	13	11	10	9	8	7	6	5	4	3	
14	15	25	26	24	23	22	21	20	19	18	17	16	
144	145	155	156	154	153	152	151	150	149	148	147	146	
157	158	168	169	167	166	165	164	163	162	161	160	159	
131	132	142	143	141	140	139	138	137	136	135	134	133	
118	119	129	130	128	127	126	125	124	123	122	121	120	
105	106	116	117	115	114	113	112	111	110	109	108	107	
92	93	103	104	102	101	100	99	98	97	96	95	94	
79	80	90	91	89	88	87	86	85	84	83	82	81	
66	67	77	78	76	75	74	73	72	71	70	69	68	
53	54	64	65	63	62	61	60	59	58	57	56	55	
40	41	51	52	50	49	48	47	46	45	44	43	42	
27	28	38	39	37	36	35	34	33	32	31	30	29	

A_2 C_2

B_5	B_8	6	24	78	122	56	28	85	142	114	48	92	146	164
B_8	B_5	8	16	66	126	62	38	85	132	108	44	104	154	162

1105 124865 15873325 2151728657 30373766725

44084960935145 6529334556802525

B_2	B_7	11	17	77	118	58	31	85	139	112	52	93	153	159
B_7	B_2	10	21	70	129	55	39	85	131	115	41	100	149	160

1105 123721 15581605

B_6	B_{11}	4	19	74	119	63	27	85	143	107	51	96	151	166
B_{11}	B_6	3	23	67	130	60	35	85	135	110	40	103	147	167

1105 126009 16165045

B_3	B_9	2	18	76	125	53	36	85	134	117	45	94	152	168
B_9	B_3	5	14	69	120	54	34	85	136	116	50	101	156	165

1105 126893 16390465

B_4	B_{10}	9	26	75	128	64	32	85	138	106	42	95	144	161
B_{10}	B_4	12	22	68	123	65	30	85	140	105	47	102	148	158

1105 122837 15356185

													A_3
1	2	6	9	10	3	7	11	4	5	8	12	13	
14	15	19	22	23	16	20	24	17	18	21	25	26	
66	67	71	74	75	68	72	76	69	70	73	77	78	
105	106	110	113	114	107	111	115	108	109	112	116	117	
118	119	123	126	127	120	124	128	121	122	125	129	130	
27	28	32	35	36	29	33	37	30	31	34	38	39	
79	80	84	87	88	81	85	89	82	83	86	90	91	
131	132	136	139	140	133	137	141	134	135	138	142	143	
40	41	45	48	49	42	46	50	43	44	47	51	52	
53	54	58	61	62	55	59	63	56	57	60	64	65	
92	93	97	100	101	94	98	102	95	96	99	103	104	
144	145	149	152	153	146	150	154	147	148	151	155	156	
157	158	162	165	166	159	163	167	160	161	164	168	169	

													C_3
1	2	12	13	11	9	4	8	7	6	10	5	3	
14	15	25	26	24	22	17	21	20	19	23	18	16	
144	145	155	156	154	152	147	151	150	149	153	148	146	
157	158	168	169	167	165	160	164	163	162	166	161	159	
131	132	142	143	141	139	134	138	137	136	140	135	133	
105	106	116	117	115	113	108	112	111	110	114	109	107	
40	41	51	52	50	48	43	47	46	45	49	44	42	
92	93	103	104	102	100	95	99	98	97	101	96	94	
79	80	90	91	89	87	82	86	85	84	88	83	81	
66	67	77	78	76	74	69	73	72	71	75	70	68	
118	119	129	130	128	126	121	125	124	123	127	122	120	
53	54	64	65	63	61	56	60	59	58	62	57	55	
27	28	38	39	37	35	30	34	33	32	36	31	26	

A_3 C_3

B_5 B_8 6 24 146 164 142 114 48 92 85 78 122 56 28

B_8 B_5 8 16 154 162 132 108 44 104 85 66 126 62 38

1105 124865 15873325 2151728657 30373766725

44084960935145 6529334556802525

B_2 B_7 11 18 152 159 134 105 47 93 85 77 123 65 36

B_7 B_2 9 21 149 161 131 116 50 95 85 75 120 54 39

1105 122473 15263365

B_6 B_{11} 5 19 151 165 143 106 42 101 85 69 128 64 27

B_{11} B_6 3 22 148 167 140 117 45 103 85 67 125 53 30

1105 127257 16483285

B_3 B_9 10 14 156 160 136 107 51 100 85 70 119 63 34

B_9 B_3 2 23 147 168 135 112 52 94 85 76 118 58 35

1105 124189 15700945

B_4 B_{10} 4 26 144 166 138 115 41 96 85 74 129 55 32

B_{10} B_4 12 17 153 158 139 110 40 102 85 68 130 60 31

1105 125541 16045705

与 A_1, C_1; A_2, C_2 比较，除列和方 B_5, B_8 的中心线组成相同外，其余列和方的中心线组成均不相同.

(4) 这里再给出 D_1, G_1; E_1, F_1; H_2, K_2 的分段方及其列和方中心线，进行比较:

1	2	3	4	6	5	9	8	10	11	12	13	7	D_1
14	15	16	17	19	18	22	21	23	24	25	26	20	
27	28	29	30	32	31	35	34	36	37	38	39	33	
40	41	42	43	45	44	48	47	49	50	51	52	46	
66	67	68	69	71	70	74	73	75	76	77	78	72	
53	54	55	56	58	57	61	60	62	63	64	65	59	
105	106	107	108	110	109	113	112	114	115	116	117	111	
92	93	94	95	97	96	100	99	101	102	103	104	98	
118	119	120	121	123	122	126	125	127	128	129	130	124	
131	132	133	134	136	135	139	138	140	141	142	143	137	
144	145	146	147	149	148	152	151	153	154	155	156	150	
157	158	159	160	162	161	165	164	166	167	168	169	163	
79	80	81	82	84	83	87	86	88	89	90	91	85	
1	2	7	12	13	8	5	11	4	10	3	9	6	G_1
14	15	20	25	26	21	18	24	17	23	16	22	19	
79	80	85	90	91	86	83	89	82	88	81	87	84	
144	145	150	155	156	151	148	154	147	153	146	152	149	
157	158	163	168	169	164	161	167	160	166	159	165	162	
92	93	98	103	104	99	96	102	95	101	94	100	97	
53	54	59	64	65	60	57	63	56	62	55	61	58	
131	132	137	142	143	138	135	141	134	140	133	139	136	
40	41	46	51	52	47	44	50	43	49	42	48	45	
118	119	124	129	130	125	122	128	121	127	120	126	123	
27	28	33	38	39	34	31	37	30	36	29	35	32	
105	106	111	116	117	112	109	115	108	114	107	113	110	
66	67	72	77	78	73	70	76	69	75	68	74	71	

D_1 E_1 H_2 G_1 F_1 K_2

B_5 B_8 6 24 28 48 78 56 114 92 122 142 146 164 85

B_8 B_6 8 16 38 44 66 62 108 104 126 132 154 162 85

1105 124865 15873325 2151728657 3037376672 44084960935145 6529334556802525

所有这些分段方的列和方 B_5, B_8 的中心线都具有相同的组成，都是 7 次特优线. 其余列和方的中心线则不尽相同.

1	2	4	3	11	10	12	13	8	9	7	5	6	E_1
14	15	17	16	24	23	25	26	21	22	20	18	19	
40	41	43	42	50	49	51	52	47	48	46	44	45	
27	28	30	29	37	36	38	39	34	35	33	31	32	
131	132	134	133	141	140	142	143	138	139	137	135	136	
118	119	121	120	128	127	129	130	125	126	124	122	123	
144	145	147	146	154	153	155	156	151	152	150	148	149	
157	158	160	159	167	166	168	169	164	165	163	161	162	
92	93	95	94	102	101	103	104	99	100	98	96	97	
105	106	108	107	115	114	116	117	112	113	111	109	110	
79	80	82	81	89	88	90	91	86	87	85	83	84	
53	54	56	55	63	62	64	65	60	61	59	57	58	
66	67	69	68	76	75	77	78	73	74	72	70	71	
1	2	3	9	7	5	11	12	13	10	8	6	4	F_1
14	15	16	22	20	18	24	25	26	23	21	19	17	
27	28	29	35	33	31	37	38	39	36	34	32	30	
105	106	107	113	111	109	115	116	117	114	112	110	108	
79	80	81	87	85	83	89	90	91	88	86	84	82	
53	54	55	61	59	57	63	64	65	62	60	58	56	
131	132	133	139	137	135	141	142	143	140	138	136	134	
144	145	146	152	150	148	154	155	156	153	151	149	147	
157	158	159	165	163	161	167	168	169	166	164	162	160	
118	119	120	126	124	122	128	129	130	127	125	123	121	
92	93	94	100	98	96	102	103	104	101	99	97	95	
66	67	68	74	72	70	76	77	78	75	73	71	69	
40	41	42	48	46	44	50	51	52	49	47	45	43	
1	2	8	6	12	13	9	10	11	7	3	4	5	H_2
14	15	21	19	25	26	22	23	24	20	16	17	18	
92	93	99	97	103	104	100	101	102	98	94	95	96	
66	67	73	71	77	78	74	75	76	72	68	69	70	
144	145	151	149	155	156	152	153	154	150	146	147	148	
157	158	164	162	168	169	165	166	167	163	159	160	161	
105	106	112	110	116	117	113	114	115	111	107	108	109	
118	119	125	123	129	130	126	127	128	124	120	121	122	
131	132	138	136	142	143	139	140	141	137	133	134	135	
79	80	86	84	90	91	87	88	89	85	81	82	83	
27	28	34	32	38	39	35	36	37	33	29	30	31	
40	41	47	45	51	52	48	49	50	46	42	43	44	
53	54	60	58	64	65	61	62	63	59	55	56	57	
1	2	10	9	6	7	8	5	4	12	13	3	11	K_2
14	15	23	22	19	20	21	18	17	25	26	16	24	
118	119	127	126	123	124	125	122	121	129	130	120	128	
105	106	114	113	110	111	112	109	108	116	117	107	115	
66	67	75	74	71	72	73	70	69	77	78	68	76	
79	80	88	87	84	85	86	83	82	90	91	81	89	
92	93	101	100	97	98	99	96	95	103	104	94	102	
53	54	62	61	58	59	60	57	56	64	65	55	63	
40	41	49	48	45	46	47	44	43	51	52	42	50	
144	145	153	152	149	150	151	148	147	155	156	146	154	
157	158	166	165	162	163	164	161	160	168	169	159	167	
27	28	36	35	32	33	34	31	30	38	39	29	37	
131	132	140	139	136	137	138	135	134	142	143	133	141	

至此，对 13 阶完美幻方，我们已给出 4 种保中心变换 ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4，这些保中心线变换分为两类：

①保所有列和方的中心线：ψ_1；

②只保列和方 B_5, B_8 的中心线，而对其他列和方的中心线则不保持：ψ_2, ψ_3, ψ_4.
用这些保中心线变换，从 A_1 出发可得 8 组 4 对 13 级对称的排列：A, C; D, G; E, F; H, K. 以其中任一排列为分段方的行、列序构作 13 阶分段方，都可得到 5 个以列和方 B_5, B_8 的中心线为主对角线的 7 次特优的 13 阶完美幻方. 下面就是由 H_2, K_2 给出的，以 B_5, B_8 为对角线组的 10 个 7 次特优的 13 阶完美幻方：

38	69	91	96	139	14	127	2	115	60	163	45	146	H_2 ①
105	62	158	50	151	33	71	81	103	134	26	122	9	行 列
98	136	16	129	4	117	57	165	40	153	28	76	86	B_{12} B_1
52	148	35	66	88	93	141	21	124	6	107	64	160	Ⅰ Ⅱ
119	11	112	59	162	42	155	30	78	83	100	131	23	B_5 B_8
68	90	95	143	18	126	1	114	54	167	47	150	32	
61	157	49	145	37	73	85	97	133	25	121	13	109	1105
138	20	123	3	116	56	169	44	152	27	75	80	102	124865
147	39	70	87	92	140	15	128	8	111	58	159	51	15873325
10	106	63	164	46	149	29	77	82	104	135	22	118	2151728657
84	94	142	17	130	5	113	53	166	41	154	34	72	30373766725
161	48	144	36	67	89	99	137	19	120	12	108	65	44084960935145
24	125	7	110	55	168	43	156	31	74	79	101	132	6529334556802525

38	130	152	23	50	137	159	95	57	79	106	73	6	H_2 ②
100	62	89	111	68	4	31	118	145	21	45	142	169	行 列
128	150	16	43	135	157	93	60	84	116	78	9	36	B_{10} B_9
55	82	109	66	2	34	123	155	26	48	140	167	98	
148	14	41	138	162	103	65	87	114	76	7	29	121	Ⅰ Ⅱ
80	112	71	12	39	126	153	24	46	133	160	96	53	B_5 B_8
19	51	143	165	101	63	85	107	69	5	27	119	151	
117	74	10	37	124	146	17	44	131	158	99	58	90	
49	141	163	94	56	83	105	67	8	32	129	156	22	
72	3	30	122	144	15	47	136	168	104	61	88	115	
134	161	92	54	86	110	77	13	35	127	154	20	42	
1	28	125	149	25	52	139	166	102	59	81	108	70	
164	97	64	91	113	75	11	33	120	147	18	40	132	

38	133	110	150	99	11	41	88	118	165	70	26	56	H_2 ③
15	62	27	139	109	156	95	12	42	84	124	164	76	行 列
160	77	16	58	33	138	115	145	101	1	48	83	130	B_3 B_4
89	119	166	66	22	57	39	134	116	146	97	7	47	
13	43	90	120	162	72	21	63	28	140	105	152	96	
151	102	2	49	79	126	161	78	17	64	29	136	111	
135	117	147	103	3	45	85	125	167	67	23	53	35	
59	34	141	106	153	92	9	44	91	121	168	68	19	
74	18	65	30	142	107	149	98	8	50	80	127	157	
123	163	73	24	54	36	131	113	148	104	4	51	81	
40	87	122	169	69	25	55	32	137	112	154	93	10	
94	6	46	86	128	158	75	14	61	31	143	108	155	
114	144	100	5	52	82	129	159	71	20	60	37	132	

38	167	5	136	75	43	112	22	81	145	65	124	92	$\boldsymbol{H}_2$	④
149	62	121	99	35	159	2	143	72	40	116	24	83	行	列
47	113	16	80	156	59	118	103	37	161	6	140	69	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_6$
158	13	137	66	51	115	18	84	153	56	125	100	29		
53	129	102	31	162	10	134	73	48	107	15	91	150		
109	19	88	147	60	126	94	28	169	7	131	77	50		
4	138	74	42	106	26	85	144	64	128	96	32	166		
120	93	39	163	1	142	76	44	110	23	82	151	61		
20	79	155	63	122	97	36	160	8	139	68	41	117		
141	70	45	114	17	86	152	55	119	104	33	157	12		
101	30	164	9	133	67	52	111	14	90	154	57	123		
87	146	54	130	98	27	168	11	135	71	49	108	21		
78	46	105	25	89	148	58	127	95	34	165	3	132		

38	86	131	121	111	166	156	71	93	18	3	63	48	$\boldsymbol{H}_2$	⑤
7	62	52	32	80	135	120	115	165	155	73	92	17	行	列
67	96	16	11	61	51	34	79	134	124	114	169	149	$\boldsymbol{B}_7$	$\boldsymbol{B}_{11}$
113	168	151	66	95	20	10	65	45	28	83	133	128		
82	137	127	117	162	145	70	94	24	9	64	47	27		
58	41	31	81	141	126	116	164	144	69	98	23	13		
102	22	12	60	40	30	85	140	130	110	158	148	68		
157	147	72	101	26	6	54	44	29	89	139	129	112		
143	123	106	161	146	76	100	25	8	53	43	33	88		
42	37	87	142	125	105	160	150	75	104	19	2	57		
21	1	56	46	36	91	136	119	109	159	154	74	103		
153	78	97	15	5	55	50	35	90	138	118	108	163		
122	107	167	152	77	99	14	4	59	49	39	84	132		

104	30	112	45	10	79	159	129	57	137	74	145	24	$\boldsymbol{K}_2$	⑥
116	44	7	87	158	128	65	134	73	149	23	92	29	行	列
4	86	162	127	53	133	77	148	20	100	28	115	52	$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{B}_3$
161	124	61	132	76	156	17	99	32	114	40	3	90		
60	136	75	144	16	103	31	111	48	2	89	169	121	I	II
72	152	15	102	39	108	47	6	88	157	120	64	135	$\boldsymbol{B}_8$	$\boldsymbol{B}_5$
19	101	27	107	51	5	85	165	119	63	143	69	151		
35	106	50	13	82	164	123	62	131	68	155	18	98		
134	1	81	168	122	59	139	67	154	68	158	128	65		
80	167	130	56	138	71	153	14	94	38	109	46	9		
118	55	142	70	150	22	93	37	117	43	8	84	166		
141	78	147	21	97	36	105	42	12	83	163	126	54		
146	25	96	33	113	41	11	91	160	125	58	140	66		

104	119	33	64	105	136	43	76	9	148	81	23	164	$\boldsymbol{K}_2$	⑦
139	44	68	10	151	91	15	163	103	118	32	56	115	行	列
90	14	162	95	128	35	57	107	140	47	78	2	150	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{B}_1$
36	60	117	132	46	77	1	149	82	24	165	96	120		
69	11	152	83	16	166	99	130	28	59	116	131	45	I	II
158	98	129	27	58	108	141	48	70	3	153	86	26	$\boldsymbol{B}_8$	$\boldsymbol{B}_5$
109	133	49	73	13	145	85	25	157	97	121	37	61		
144	84	17	167	100	122	29	62	112	143	41	72	12		
125	39	54	111	142	40	71	4	154	87	18	159	101		
50	74	5	146	88	21	169	93	124	38	53	110	134		
20	168	92	123	30	63	113	135	42	75	8	156	80		
55	114	138	52	67	7	155	79	19	160	102	126	31		
6	147	89	22	161	94	127	34	65	106	137	51	66		

104	157	22	86	155	11	75	46	134	107	54	32	122	K_2 ⑧
71	44	143	105	61	34	129	102	166	20	82	146	2	行 列
120	93	162	18	91	144	9	73	51	141	114	59	30	B_{10} B_9
7	69	42	132	110	57	39	118	100	164	25	89	153	
37	127	98	160	16	80	149	5	78	40	139	112	64	
151	12	76	49	137	108	55	28	123	96	169	14	87	
53	35	125	103	167	23	85	147	3	67	45	135	117	
83	156	1	74	47	142	115	62	33	121	94	158	19	
106	58	31	130	92	165	21	90	154	10	72	43	133	
17	81	145	6	70	52	131	113	60	38	128	101	163	
140	111	56	29	119	97	161	26	79	152	8	77	50	
168	24	88	150	4	68	41	136	109	65	27	126	99	
48	138	116	63	36	124	95	159	15	84	148	13	66	

104	2	63	14	41	127	152	110	163	73	31	82	142	K_2 ⑨
21	44	121	155	117	159	76	27	80	140	100	6	59	行 列
153	113	162	72	34	83	134	103	13	55	24	40	119	B_7 B_{11}
68	37	79	132	101	9	58	20	47	122	147	116	169	
135	95	12	65	16	50	118	145	114	165	71	33	86	
61	19	46	125	148	108	168	78	29	89	131	93	10	
128	144	106	166	74	32	85	138	96	4	64	26	42	
160	77	39	81	141	92	2	62	22	45	124	151	109	
84	137	99	5	56	25	52	120	154	105	158	75	35	
1	54	23	48	123	150	112	161	69	38	91	133	102	
51	130	146	115	157	67	36	87	136	98	8	57	17	
111	164	70	30	90	143	94	11	53	15	49	126	149	
28	88	139	97	7	60	18	43	129	156	107	167	66	

104	89	67	113	124	18	12	133	27	166	149	47	56	K_2 ⑩
150	44	64	94	79	75	110	125	17	13	141	28	165	行 列
131	36	162	151	43	65	102	80	74	111	122	25	3	B_6 B_2
121	26	11	132	35	163	148	51	55	92	88	71	112	
87	72	109	129	16	1	140	32	164	147	52	63	93	
42	53	101	84	73	108	130	24	2	139	33	161	155	
34	160	156	50	54	100	85	70	116	120	14	10	136	
15	9	137	31	168	146	40	62	97	86	69	117	128	
77	107	118	23	6	138	30	169	154	41	61	98	83	
58	99	82	78	115	119	22	7	135	38	159	144	49	
167	145	48	59	96	90	68	105	127	19	8	134	39	
5	142	29	157	153	45	60	95	91	76	106	126	20	
114	123	21	4	143	37	158	152	46	57	103	81	66	

这些完美幻方都是互不同构的，因而是基本的. 由上可见，以 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_8$ 为对角线组作 13 阶完美幻方，其行、列线组之配对如下:

$$\boldsymbol{B}_1 — \boldsymbol{B}_{12}, \boldsymbol{B}_2 — \boldsymbol{B}_6, \boldsymbol{B}_3 — \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7 — \boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_9 — \boldsymbol{B}_{10}. \tag{39}$$

全部 12 个 13 阶列和方都已用到. 因此，对每一个 13 阶分段方，只能得到 5 个以 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_8$ 为对角线的 13 阶完美幻方. 所以，从 $\boldsymbol{A}_1$ 出发总共可得

$$8 \times 4 \times 5 = 160$$

个基本的 7 次特优的 13 阶完美幻方.

六、乘积完美幻方的特优性

首先，我们看一个例:

例 1 **A** **B**

23	6	19	2	15
9	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9

(a_{ij})

44	32	20	1	38	26	14
3	40	28	9	46	34	15
11	48	29	17	5	42	23
19	7	37	25	13	43	31
27	8	45	33	21	2	39
35	16	4	41	22	10	47
36	24	12	49	30	18	6

(b_{kh}) (40)

A*, *B 之主对角线:

I_0:23 12 1 20 9; 44 40 29 25 21 10 6. $\{a\}$

II_0:15 8 1 24 17; 14 34 5 25 45 16 36. $\{b\}$

$\{a-1\}$: 22 11 0 19 8; 43 39 28 24 20 9 5

$\{b-1\}$: 14 7 0 18 7; 13 33 4 24 44 15 35. (41)

	$\{a, b\}$	$\{a-1, b-1\}$;	$\{a, b\}$	$\{a-1, b-1\}$
1 次和:	65	60	175	168
2 次和:	1155	1030	5579	5236
3 次和:	22625	19350	199675	183456
4 次和:			7611779	6845860
5 次和:			301784875	265667808

(42)

由结合式: $b_{kh}+(a_{ij}-1)\cdot 7^2$, 构作

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_{ij}),\qquad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}^{o}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}_{kh}{}^{o}) \tag{43}$$

由此可得 ***A*×*B***(46)之主对角线上元素:

1 次和: $\Sigma_{35}=21455$;

2 次和: 18368105;

3 次和: 17284102955. (44)

因此, 故 ***A*×*B*** 是 3 次特优的 35 阶完美幻方.

表(45)给出了乘积完美幻方 ***A*×*B*** 之主对角线 I, II.下面给出各因子 7 阶完美幻方之各幻和; 主对角线上各因子完美幻方的主对角线的: 1 次和、2 次和、3 次和, 以及 ***A*×*B*** 之主对角线元素的 1 次和、2 次和、3 次和. 得 ***A*×*B*** 仍是对称的 3 次特优的 35 阶完美幻方. 同理 ***B*×*A***°也是.

7721 8517467 9397422125	1890	6349 5759747 5226274585	518	4977 3639851 2518546149
1024	3948 2227876 1257880176	8407	2576 949172 350181440	5320
3262 1521296 710046064	6006	175 7759 199675	4634	7378
3605	8064 9290932 10705927680	2233	6692 6398756 6119512784	861 107107 13470345
5663 4582751 3709248011	1547	4251	7035 7071379 7109155935	2919 1218427 509088195

(45)

$A \times B$

1122 730 700
1118 726 720
1107 715 691
7721 1103 1890 6309 518 4977 711
1099 731 707
1088 702 696
1084 722 692
583 553 357
579 573 377
568 544 348
1024 3948 564 8407 2576 368 5320
584 560 388
555 549 359
575 545 379
44 32 20 1 38 26 14
3 40 28 9 46 34 15
11 48 29 17 5 42 23
3262 6006 19 7 37 25 13 43 31 4634 7378
27 8 45 33 21 2 39
35 16 4 41 22 10 47
36 24 12 49 30 18 6
1141 975
1161 971
1132 960
3605 8064 1152 2233 6692 956 861
1172 952
1143 941
1163 937
798 436
818 432
789 421
5663 809 1547 4251 7035 2919 417
829 413
800 402
820 398

(46)

定理 4　设有正整数列 $\{a\}$ $:a_1, a_2, \cdots, a_n$；$\{b\}$ $:b_1, b_2, \cdots, b_n$. 它们的 1 次和, 2 次和, …, k 次和分别对应相等. 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2,\ \cdots,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k. \tag{47}$$

则 (1) 非负整数列 $\{a-1\}$，$\{b-1\}$；

(2) 正整数列 $\{M+aR\}$，$\{M+bR\}$，M, R 是给定的正常数的 1 次和, 2 次和, …, k 次和也分别对应相等.

证明　用牛顿二项式定理即可证明.

① $k=1$, $\Sigma(a_i-1)=\Sigma a_i-n=\Sigma b_i-n=\Sigma(b_i-1)$.

$$k=2,\ \Sigma(a_i-1)^2=\Sigma(a^2_i-2a_i+1)$$
$$=\Sigma a^2_i-2\Sigma a_i+n$$
$$=\Sigma b^2_i-2\Sigma b_i+n=\Sigma(b_i-1))^2.$$

$$\Sigma(a_i-1)^k=\Sigma\{a^k_i-c^1_k a^{k-1}_i+\cdots+(-1)^{k-1}c^{k-1}_k a_i+(-1)^k\cdot 1\}$$
$$=\Sigma a^k_i-c^1_k\Sigma a^{k-1}_i+\cdots+(-1)^{k-1}c^{k-1}_k\Sigma a_i+(-1)^k\cdot n$$
$$=\Sigma b^k_i-c^1_k\Sigma b^{k-1}_i+\cdots+(-1)^{k-1}c^{k-1}_k\Sigma b_i+(-1)^k\cdot n$$
$$=\Sigma(b_i-1)^k.$$

② 用类似的方法可证明 2. 如

$$\sum(M+a_iR)^k=\Sigma(M^k+c^1_kM^{k-1}Ra_i+\cdots+c^{k-1}_kMR^{k-1}a^{k-1}_i+R^ka^k_i)$$
$$=nM^k+c^1_kM^{k-1}R\sum a_i+\cdots+c^{k-1}_kMR^{k-1}\sum a^{k-1}_i+R^k\sum a^k_i$$
$$=nM^k+c^1_kM^{k-1}R\sum b_i+\cdots+c^{k-1}_kMR^{k-1}\sum b^{k-1}_i+R^k\sum b^k_i$$
$$=\sum(M+b_iR)^k.$$

由定理可知, 在 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 中, 各 7 阶方都是 5 次特优的 7 阶完美幻方.

定理 5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}), i,j=1,2,\cdots,p;\ a_{ij}=1,2,\cdots,p^2$;

$\boldsymbol{B}=(b_{kh}), k,h=1,2,\cdots,q;\ b_{kh}=1,2,\cdots,q^2$

分别是 k_1, k_2 次特优的 p, q 阶完美幻方, 即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 之主对角线:

$$\begin{array}{ll}\Sigma a_{ii}=\Sigma a_{ip-i+1}; & \Sigma b_{kk}=\Sigma b_{kq-k+1};\\ \Sigma a^2_{ii}=\Sigma a^2_{ip-i+1}; & \Sigma b^2_{kk}=\Sigma b^2_{kq-k+1};\\ \vdots\qquad\vdots & \vdots\qquad\vdots\\ \Sigma a^{k1}_{ii}=\Sigma a^{k1}_{ip-i+1}; & \Sigma b^{k2}_{kk}=\Sigma b^{k2}_{kq-k+1}\ .\end{array}\tag{48}$$

则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}^{\circ}; \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}^{\circ}$ 都是 k 次特优的 pq 阶完美幻方, $k=\min\{k_1, k_2\}$.

证明　在结合式

$$b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2\tag{49}$$
$$(a_{ij}\in\{1,2,\cdots,p^2\};\ i,j=1,2,\cdots,p;\ b_{kh}\in\{1,2,\cdots,q^2\};\ k,h=1,2,\cdots,q)$$

中, 固定 a_{ij} 变动 b_{kh};　　　固定 b_{kh} 变动 a_{ij}, 有

$$\boldsymbol{B}_{ij}=(b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2)\qquad \boldsymbol{A}^{\circ}_{kh}=(b_{kh}+(a_{ij}-1)q^2)$$
$$=\boldsymbol{B}+(a_{ij}-1)q^2\qquad =b_{kh}+(\boldsymbol{A}-1)q^2$$
$$i,j=1,2,\cdots,p;\qquad k,h=1,2,\cdots,q.$$

从而

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_{ij})\qquad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\circ}_{kh})$$

在 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 中, 第 I 主对角线组成如下:

$$\begin{array}{l}\mathrm{I}_0: \boldsymbol{B}_{11}: b_{11}+(a_{11}-1)q^2,\ b_{22}+(a_{11}-1)q^2,\ \cdots,\ b_{qq}+(a_{11}-1)q^2;\\ \boldsymbol{B}_{12}: b_{11}+(a_{22}-1)q^2,\ b_{22}+(a_{22}-1)q^2,\cdots,\ b_{qq}+(a_{22}-1)q^2;\\ \qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \boldsymbol{B}_{pp}: b_{11}+(a_{pp}-1)q^2,\ b_{22}+(a_{pp}-1)q^2,\cdots,\ b_{qq}+(a_{pp}-1)q^2.\end{array}\tag{50}$$

第Ⅱ主对角线组成:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_0:\ & \boldsymbol{B}_{1p}: b_{1q}+(a_{1p}-1)q^2,\ b_{2q-1}+(a_{1p}-1)q^2,\cdots,\ b_{q1}+(a_{1p}-1)q^2;\\
& \boldsymbol{B}_{2p-1}: b_{1q}+(a_{2p-1}-1)q^2,\ b_{2q-1}+(a_{2p-1}-1)q^2,\cdots,\ b_{q1}+(a_{2p-1}-1)q^2;\\
& \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
& \boldsymbol{B}_{p1}: b_{1q}+(a_{p1}-1)q^2,\ b_{2q-1}+(a_{p1}-1)q^2,\cdots,\ b_{q1}+(a_{p1}-1)q^2.
\end{aligned} \tag{51}
$$

把上列组成按竖列顺序看，则各列是由$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}^{\circ}$中第Ⅰ,Ⅱ主对角线上各因子完美幻方$\boldsymbol{A}^{\circ}_{kh}$的主对角线组成. 从而构成$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}^{\circ}$之第Ⅰ,Ⅱ主对角线. 因此，对$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$的特优性结论，对$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}^{\circ}$也成立；反之也对.

运用前一定理，可证明此2主对角线的1次和, 2次和,⋯, k次和分别对应相等($k=\min\{k_1, k_2\}$). 下面直接证明k次和等式:

$$
\begin{aligned}
\sum \mathrm{I}_0^k &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(b_{ii}+(a_{jj}-1)q^2)^k\\
&= \sum\sum[b_{ii}^k + c_k^1 b_{ii}^{k-1}(a_{jj}-1)q^2\\
&\quad + c_k^2 b_{ii}^{k-2}(a_{jj}-1)^2 q^4+\cdots+(a_{jj}-1)^k q^{2k}].
\end{aligned} \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum \mathrm{II}_0^k &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(b_{iq-i+1}+(a_{ip}-1)q^2)^k\\
&= \sum\sum[b_{iq-i+1}^k + c_k^1 b_{iq-i+q}^{k-1}(a_{ip}-1)q^2\\
&\quad + c_k^2 b_{iq-i+1}^{k-2}(a_{ip}-1)^2 q^4+\cdots+(a_{ip}-1)^k q^{2k}].
\end{aligned} \tag{53}
$$

当k取k_1, k_2之较小者，即$k=\min\{k_1, k_2\}$时, (52), (53)的左边相等，因而右边也相等. 利用结合式$a_{ij}+(b_{kh}-1)p^2$进行类似处理，可给出$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}^{\circ}$之相同结论.

由上面的定理知，对乘积完美幻方之主对角线元素的1次和, 2次和, ⋯的计算有两种方法:

①计算乘积完美幻方的主对角线上各因子方的主对角线元的各次和并相加;

②利用公式(52), (53)计算 .

检查前例各次和可用(52), (53)计算:

1次和　$\Sigma_{35}=7\times7^2(\Sigma_{\boldsymbol{A}}-5)+5\Sigma_{\boldsymbol{B}}=7\times7^2\times60+5\times175=21455$;

2次和　$\Sigma\,\mathrm{I}_0^2=\Sigma\,\mathrm{II}_0^2$

$=7\times7^4\times1030+2\times7^2\times60\times175+5\times5579=18368105$;

3次和　$\Sigma\,\mathrm{I}_0^3=\Sigma\,\mathrm{II}_0^3$

$=7\times7^6\times19350+3\times7^4\times1030\times175+3\times7^2\times60\times5579+5\times199675$

$=17284102955.$ (54)

$\mathrm{I}_0, \mathrm{II}_0$的4次和不相等.

例2　以5阶完美幻方$\boldsymbol{A}$为基础，构作25阶完美幻方$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^{\circ}$, $\Sigma_{25}=7825$.

$\boldsymbol{A}$

23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9

中心	Σ_5	2次和	3次和
1	65	1155	22625
25	65	1155	23525
13	65	1105	21125
5	65	1055	19475
21	65	1055	18875

(55)

573	556	569	552	565	148	131	144	127	140	473	456	469	452	465	48	31	44	27	40	373	356	369	352	365
554	562	575	558	566	129	137	150	133	141	454	462	475	458	466	29	37	50	33	41	354	362	375	358	366
560	568	551	564	572	135	143	126	139	147	460	468	451	464	472	35	43	26	39	47	360	368	351	364	372
561	574	557	570	553	136	149	132	145	128	461	474	457	470	453	36	49	32	45	28	361	374	357	370	353
567	555	563	571	559	142	130	138	146	134	467	455	463	471	459	42	30	38	46	34	367	355	363	371	359
98	81	94	77	90	298	281	294	277	290	623	606	619	602	615	198	181	194	177	190	398	381	394	377	390
79	87	100	83	91	279	287	300	283	291	604	612	625	608	616	179	187	200	183	191	379	387	400	383	391
85	93	76	89	97	285	293	276	289	297	610	618	601	614	622	185	193	176	189	197	385	393	376	389	397
86	99	82	95	78	286	299	282	295	278	611	624	607	620	603	186	199	182	195	178	386	399	382	395	378
92	80	88	96	84	292	280	288	296	284	617	605	613	621	609	192	180	188	196	184	392	380	388	396	384
248	231	244	227	240	448	431	444	427	440	23	6	19	2	15	348	331	344	327	340	548	531	544	527	540
229	237	250	233	241	429	437	450	433	441	4	12	25	8	16	329	337	350	333	341	529	537	550	533	541
235	243	226	239	247	435	443	426	439	447	10	18	1	14	22	335	343	326	339	347	535	543	526	539	547
236	249	232	245	228	436	449	432	445	428	11	24	7	20	3	336	349	332	345	328	536	549	532	545	528
242	230	238	246	234	442	430	438	446	434	17	5	13	21	9	342	330	338	346	334	542	530	538	546	534
273	256	269	252	265	598	581	594	577	590	173	156	169	152	165	498	481	494	477	490	73	56	69	52	65
254	262	275	258	266	579	587	600	583	591	154	162	175	158	166	479	487	500	483	491	54	62	75	58	66
260	268	251	264	272	585	593	576	589	597	160	168	151	164	172	485	493	476	489	497	60	68	51	64	72
261	274	257	270	253	586	599	582	595	578	161	174	157	170	153	486	499	482	495	478	61	74	57	70	53
267	255	263	271	259	592	580	588	596	584	167	155	163	171	159	492	480	488	496	484	67	55	63	71	59
423	406	419	402	415	123	106	119	102	115	323	306	319	302	315	523	506	519	502	515	223	206	219	202	215
404	412	425	408	416	104	112	125	108	116	304	312	325	308	316	504	512	525	508	516	204	212	252	208	216
410	418	401	414	422	110	118	101	114	122	310	318	301	314	322	510	518	501	514	522	210	218	201	214	222
411	424	407	420	403	111	124	107	120	103	311	324	307	320	303	511	524	507	520	503	211	224	207	220	203
417	405	413	421	409	117	105	113	121	109	317	305	313	321	309	517	505	513	521	509	217	205	213	221	209

$A \times A$

573	148	473	48	373	556	131	456	31	356	569	144	469	44	369	552	127	452	27	352	565	140	465	40	365
98	298	623	198	398	81	281	606	181	381	94	294	619	194	394	77	277	602	177	377	90	290	615	190	390
248	448	23	348	548	231	431	6	331	531	244	444	19	344	544	227	427	2	327	527	240	440	15	340	540
273	598	173	498	73	256	581	156	481	56	269	594	169	494	69	252	577	152	477	52	265	590	165	490	65
423	123	323	523	223	406	106	306	506	206	419	119	319	519	219	402	102	302	502	202	415	115	315	515	215
554	129	454	29	354	562	137	462	37	362	575	150	475	50	375	558	133	458	33	358	566	141	466	41	366
79	279	604	179	379	87	287	612	187	387	100	300	625	200	400	83	283	608	183	383	91	291	616	191	391
229	429	4	329	529	237	437	12	337	537	250	450	25	350	550	233	433	8	333	533	241	441	16	341	541
254	579	154	479	54	262	587	162	487	62	275	600	175	500	75	258	583	158	483	58	266	591	166	491	66
404	104	304	504	204	412	112	312	512	212	425	125	325	525	225	408	108	308	508	208	416	116	316	516	216
560	135	460	35	360	568	143	468	43	368	551	126	451	26	351	564	139	464	39	364	572	147	472	47	372
85	285	610	185	385	93	293	618	193	393	76	276	601	176	376	89	289	614	189	389	97	297	622	197	397
235	435	10	335	535	243	443	18	343	543	226	426	1	326	526	239	439	14	339	539	247	447	22	347	547
260	585	160	185	60	268	593	168	493	68	251	576	151	476	51	264	589	164	489	64	272	597	172	497	72
410	110	310	510	210	418	118	318	518	218	401	101	301	501	201	414	114	314	514	214	422	122	322	522	222
561	136	461	36	361	574	149	474	49	374	557	132	457	32	357	570	145	470	45	370	553	128	453	28	353
86	186	611	186	386	99	299	624	199	399	82	182	607	182	382	95	295	620	195	395	78	278	603	178	378
236	436	11	336	536	249	449	24	349	549	232	432	7	332	532	245	445	20	345	545	228	428	3	328	528
261	586	161	486	61	274	599	174	499	74	257	582	157	482	57	270	595	171	495	70	253	578	153	478	53
411	111	311	511	211	424	124	324	524	224	407	107	307	507	207	420	120	320	520	220	403	103	303	503	203
567	142	467	42	367	555	130	455	30	355	563	138	463	38	363	571	146	471	46	371	559	134	459	34	359
92	292	617	192	392	80	280	605	180	380	88	288	613	188	388	96	296	621	196	396	84	284	609	184	384
242	442	27	342	542	230	430	5	330	530	238	438	13	338	538	246	446	21	346	546	234	434	9	334	534
267	592	167	492	67	255	580	155	480	55	263	588	163	488	63	271	596	171	496	71	259	584	159	484	59
417	117	317	517	217	405	105	305	505	205	413	113	313	513	213	421	121	321	521	221	409	109	309	509	209

$A \times A^{o}$

在 $A\times A$ 中，计算各 5 阶完美幻方的幻和、2 次和、3 次和，可得如下 5 阶方:

2815 1585155 892790875	690 95530 13268250	2315 1072155 496694375	190 7530 309250	1815 659155 239497875
440 39030 3488750	1440 415030 119706750	3065 1879155 1152301625	940 177030 33397750	1940 753030 292415750
1150 283530 67627250	2190 959530 420545250	65 1155 22625	1690 571530 193386250	2690 1447530 779104250
1315 346155 91201375	2940 1729030 1017033750	815 133155 21804875	2440 1191030 581524750	315 20155 1308375
2065 853155 352608625	565 64155 7319125	1565 490155 153612125	2565 1316155 675505125	1065 227155 48515625

(56)

对幻和而言，这也是一个 5 阶完美幻方. 它的各行、各列、各对角线元素和均为 7825. 而各对角线的 2 次和、3 次和如下:

	中心		次和	
①	1	7825	3419525	1642560625
②	101	7825	3107025	1407716875
③	301	7825	3263275	1530998125
④	501	7825	3107025	1360841875
⑤	601	7825	3419525	1712873125

(57)

在 $A\times A$ 中, 1, 101, 301, 501, 601 为中心方可得 5 个 3 次特优的 25 阶完善幻方. 各中心, 次和如上. 其中各 5 阶方也组成的 5 阶完美幻方. 如下面就是 $A\times A$ 的各 5 阶方的幻和组成的 5 阶完美幻方:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 1615 & 1530 & 1595 & 1510 & 1575 \\ 1520 & 1560 & 1625 & 1540 & 1580 \\ 1550 & 1590 & 1505 & 1570 & 1610 \\ 1555 & 1620 & 1535 & 1600 & 1515 \\ 1585 & 1525 & 1565 & 1605 & 1545 \\ \hline\end{array} \tag{58}$$

各行各列各对角线元素和 $\Sigma=7825$,

对角线元素 2 次和　　12253875　　(59)

3 次和　　19201515625

这两个 5 阶方也是 3 次特优的 5 阶完美幻方.

例 3　由 A 经行轮回得

$$A_1 = \begin{array}{|ccccc|}\hline 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ \hline\end{array} = (3,4,5,1,2)A \tag{60}$$

中心	1	25	13	5	21
Σ			65		
2 次和	1155	1155	1105	1055	1055
3 次和	22625	23525	21125	19475	18875

(61)

235	243	226	239	247	435	443	426	439	447	10	18	1	14	22	335	343	326	339	347	535	543	526	539	547
236	249	232	245	228	436	449	432	445	428	11	24	7	20	3	336	349	332	345	328	536	549	532	545	528
242	230	238	246	234	442	430	438	446	434	17	5	13	21	9	342	330	338	346	334	542	530	538	546	534
248	231	244	227	240	448	431	444	427	440	23	6	19	2	15	348	331	344	327	340	548	531	544	527	540
229	237	250	233	241	429	437	450	433	441	4	12	25	8	16	329	337	350	333	341	529	537	550	533	541
260	268	251	264	272	585	593	576	589	597	160	168	151	164	172	485	493	476	489	497	60	68	51	64	72
261	274	257	270	253	586	599	582	595	578	161	174	157	170	153	486	499	482	495	478	61	74	57	70	53
267	255	263	271	259	592	580	588	596	584	167	155	163	171	159	492	480	488	496	484	67	55	63	71	59
273	256	269	252	265	598	581	594	577	590	173	156	169	152	165	498	481	494	477	490	73	56	69	52	65
254	262	275	258	266	579	587	600	583	591	154	162	175	158	166	479	487	500	483	491	54	62	75	58	66
410	418	401	414	422	110	118	101	114	122	310	318	301	314	322	510	518	501	514	522	210	218	201	214	222
411	424	407	420	403	111	124	107	120	103	311	324	307	320	303	511	524	507	520	503	211	224	207	220	203
417	405	413	421	409	117	105	113	121	109	317	305	313	321	309	517	505	513	521	509	217	205	213	221	209
423	406	419	402	415	123	106	119	102	115	323	306	319	302	315	523	506	519	502	515	223	206	219	202	215
404	412	425	408	416	104	112	125	108	116	304	312	325	308	316	504	512	525	508	516	204	212	252	208	216
560	568	551	564	572	135	143	126	139	147	460	468	451	464	472	35	43	26	39	47	360	368	351	364	372
561	574	557	570	553	136	149	132	145	128	461	474	457	470	453	36	49	32	45	28	361	374	357	370	353
567	555	563	571	559	142	130	138	146	134	467	455	463	471	459	42	30	38	46	34	367	355	363	371	359
573	556	569	552	565	148	131	144	127	140	473	456	469	452	465	48	31	44	27	40	373	356	369	352	365
554	562	575	558	566	129	137	150	133	141	454	462	475	458	466	29	37	50	33	41	354	362	375	358	366
85	93	76	89	97	285	293	276	289	297	610	618	601	614	622	185	193	176	189	197	385	393	376	389	397
86	99	82	95	78	286	299	282	295	278	611	624	607	620	603	186	199	182	195	178	386	399	382	395	378
92	80	88	96	84	292	280	288	296	284	617	605	613	621	609	192	180	188	196	184	392	380	388	396	384
98	81	94	77	90	298	281	294	277	290	623	606	619	602	615	198	181	194	177	190	398	381	394	377	390
79	87	100	83	91	279	287	300	283	291	604	612	625	608	616	179	187	200	183	191	379	387	400	383	391

作 $A_1 \times A_1$

1190 283480 67592000	2190 959480 420480000	65 1105 21125	1690 571480 193336000	2690 1447480 779024000
1315 346105 91162375	2940 1728980 1016946000	815 133105 21780875	2440 1190980 581452000	315 20105 1299375
2065 853105 352547125	565 64105 7302625	1565 490105 153565625	2565 1316105 675428625	1065 227105 48484125.
2815 1585105 892706875	690 95480 13248000	2315 1072105 496625375	190 7480 304000	1815 659105 239443875
440 38980 3476000	1440 414980 119664000	3065 1879105 1152210125	940 176980 33370000	1940 752980 292358000

(62)

在 $A_1 \times A_1$ 中, 以 313, 513, 613, 113 为中心可得 5 个 3 次特优的 25 阶完美幻方. 其中心、各次和如下:

	中心	次和		
①	313	7825	3263025	1530765625
②	513	7825	3106775	1360609375
③	613	7825	3419275	1712640625
④	13	7825	3419275	1642328125
⑤	113	7825	3106775	1407484375

(63)

下面是 $A_1 \times A_1$ 中, 幻和组成的 5 阶完美幻方:

1190	2190	65	1690	2690
1315	2940	815	2440	315
2065	565	1565	2565	1065
2815	690	2315	190	1815
440	1440	3065	940	1940

(64)

主对角线元素的次和如下:

$$7825 \quad 16308625 \quad 38238623125 \tag{65}$$

也是 3 次特优的完美幻方.

第 7 章　9 阶完美幻方

由第 5, 6 章可知, 除含 3 因数的奇数外, 其余各奇数阶的完美幻方都可以构造了. 本章先给出 9 阶和 27 阶完美幻方的构造方法, 下一章我们将给出 3 因数奇阶完美幻方的构造.

一、9 阶列和方与可幻的 9 级排列

1. 9 阶列和方

$$n=9=3^2,\ \mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,81\},\ \varphi(9)=6,\ \Sigma_9=369.$$

以 π=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)为行、列序给出 9 阶分段方:

$\boldsymbol{A}$

1	2	3	3	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

(1)

显然, 通过对 $\boldsymbol{A}$ 执行行 $\boldsymbol{Z}$ 变换得 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_8$ 都是列和方, 这些方的各列和都是 $\Sigma_9=369$. 但 $\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_6$ 不是:

	$\boldsymbol{B}_3$									$\boldsymbol{B}_6$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	13	14	15	16	17	18	10	11	12	16	17	18	10	11	12	13	14	15
	25	26	27	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	19	20	21
	28	29	30	31	32	33	34	35	36	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	40	41	42	43	44	45	37	38	39	43	44	45	37	38	39	40	41	42
	52	53	54	46	47	48	49	50	51	49	50	51	52	53	54	46	47	48
	55	56	57	58	59	60	61	62	63	55	56	57	58	59	60	61	62	63
	67	68	69	70	71	72	64	65	66	70	71	72	64	65	66	67	68	69
	79	80	81	73	74	75	76	77	78	76	77	78	79	80	81	73	74	75
Σ	360	369	378	360	369	378	360	369	378	360	369	378	360	369	378	360	369	378

(2)

引起这种变易的原因, 可由下面的 9 阶行排列方阵的行 $\boldsymbol{Z}$ 变换得知.

	$\boldsymbol{Z}_1$									$\boldsymbol{Z}_3$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8	9	1	4	5	6	7	8	9	1	2	3
	3	4	5	6	7	8	9	1	2	7	8	9	1	2	3	4	5	6
	4	5	6	7	8	9	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	1	2	3
	6	7	8	9	1	2	3	4	5	7	8	9	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	8	9	1	2	3	4	5	6	7	4	5	6	7	8	9	1	2	3
	9	1	2	3	4	5	6	7	8	7	8	9	1	2	3	4	5	6
Σ					45					36	45	54	36	45	54	36	45	54

(3)

注意到

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45=3\times 15 \tag{4}$$

可以构造列和为 15 的 3 阶列和方，然后将 3 阶列和方拉成 9 级排列. 如

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{array} \rightarrow \pi_1: (1,2,3,5,6,4,9,7,8). \tag{5}$$

以π_1为行、列序构作 9 阶排列方、分段方，并执行行 Z 变换，所得各列分别都对应相等.

A	1	2	3	5	6	4	9	7	8	1	2	3	5	6	4	9	7	8	B_1
	10	11	12	14	15	13	18	16	17	11	12	14	15	13	18	16	17	10	
	19	20	21	23	24	22	27	25	26	21	23	24	22	27	25	26	19	20	
	37	38	39	41	42	40	45	43	44	41	42	40	45	43	44	37	38	39	
	46	47	48	50	51	49	54	52	53	51	49	54	52	53	46	47	48	50	
	28	29	30	32	33	31	36	34	35	31	36	34	35	28	29	30	32	33	
	73	74	75	77	78	76	81	79	80	81	79	80	73	74	75	77	78	76	
	55	56	57	59	60	58	63	61	62	61	62	55	56	57	59	60	58	63	
	64	65	66	68	69	67	72	70	71	71	64	65	66	68	69	67	72	70	
B_3	1	2	3	5	6	4	9	7	8	1	2	3	5	6	4	9	7	8	B_6
	14	15	13	18	16	17	10	11	12	18	16	17	10	11	12	14	15	13	
	27	25	26	19	20	21	23	24	22	23	24	22	27	25	26	19	20	21	
	37	38	39	41	42	40	45	43	44	37	38	39	41	42	40	45	43	44	
	50	51	49	54	52	53	46	47	48	54	52	53	46	47	48	50	51	49	
	36	34	35	28	29	30	32	33	31	32	33	31	36	34	35	28	29	30	
	73	74	75	77	78	76	81	79	80	73	74	75	77	78	76	81	79	80	
	59	60	58	63	61	62	55	56	57	63	61	62	55	56	57	59	60	58	
	72	70	71	64	65	66	68	69	67	68	69	67	72	70	71	64	65	66	
C_3	1	38	75	5	42	76	9	43	80	1	74	39	5	78	40	9	79	44	C_6
	10	47	57	14	51	58	18	52	62	10	56	48	14	60	49	18	61	53	
	19	29	66	23	33	67	27	34	71	19	65	30	23	69	31	27	70	35	
	37	74	3	41	78	4	45	79	8	37	2	75	41	6	76	45	7	80	
	46	56	12	50	60	13	54	61	17	46	11	57	50	15	58	54	16	62	
	28	65	21	32	69	22	36	70	26	28	20	66	32	24	67	36	25	71	
	73	2	39	77	6	40	81	7	44	73	38	3	77	42	4	81	43	8	(6)
	55	11	48	59	15	49	63	16	53	55	47	12	59	51	13	63	52	17	
	64	20	30	68	24	31	72	25	35	64	29	21	68	33	22	72	34	26	

B_1, B_2, B_4, B_5, B_7, B_8 显然都是列和方(这里只给出 B_1)；同时 B_3, B_6 也是列和方, C_3, C_6 是行和方, 且不相同. 下面仍以第一列(或行)做它们的代表:

B_1:	1	11	21	41	51	31	81	61	71	Σ	369
B_4:	1	15	26	41	52	30	81	56	67		369
B_7:	1	16	22	41	47	35	81	60	66		
B_2:	1	12	24	45	53	29	77	58	70		
B_5:	1	13	20	45	48	34	77	62	69		
B_8:	1	17	25	45	49	33	77	57	65		
B_3:	1	14	27	37	50	36	73	59	72		
B_6:	1	18	23	37	54	32	73	63	68		369
A_1:	1	10	19	37	46	28	73	55	64		333
C_3:	1	38	75	5	42	76	9	43	80		369
C_6:	1	39	74	5	40	78	9	44	79		369
A_0:	1	2	3	5	6	4	9	7	8		45

(7)

上列各方可分成 4 组:

(1)	B_1	B_4	B_7	1	41	81
(2)	B_2	B_5	B_8	1	45	77
(3)	B_3	B_6	A_1	1	37	73
(4)	C_3	C_6	A_0	1	5	9

(8)

各同行方为一个同类组，因为他们的第 1 线中有 3 个相同元. 我们知道在一个奇阶方阵中，任意两条不同线组的线有而且只有一个交点，即只有一个共同元. 因此，同组方不能同时出现在同一个方阵中. 这里行和方 C_3, C_6 与列和方 B_3, B_6 是不同的. 由此例可见，当 k, n 不互素，即 $\gcd(k,n)\neq 1$ 时，对分段方 $\boldsymbol{A}$ 执行行 $\boldsymbol{Z}$ 变换和列 $\boldsymbol{Z}$ 变换的结果是不同的. 今后总是分别用 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 表示列和方及行和方.在这 4 组幻和组中各选一个幻和组可组成一个完美幻方. 下面以 $\boldsymbol{B}_1$ 为行线组，利用行 $\boldsymbol{Z}$ 变换，行序重排得如下各方:

1	11	21	41	51	31	81	61	71	
12	23	42	49	36	79	62	64	2	
24	40	54	34	80	55	65	3	14	行 $\boldsymbol{B}_1$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	列 $\boldsymbol{B}_2$
53	28	74	57	68	6	13	27	43	Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$
29	75	59	69	4	18	25	44	46	Ⅱ $\boldsymbol{A}_0$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	
58	72	7	17	19	38	48	32	78	
70	8	10	20	39	50	33	76	63	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	
62	64	2	12	23	42	49	36	79	
34	80	55	65	3	14	24	40	54	行 $\boldsymbol{B}_1$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	列 $\boldsymbol{B}_5$
13	27	43	53	28	74	57	68	6	Ⅰ $\boldsymbol{A}_1$
69	4	18	25	44	46	29	75	59	Ⅱ $\boldsymbol{C}_6$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	
48	32	78	58	72	7	17	19	38	
20	39	50	33	76	63	70	8	10	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	①
24	40	54	34	80	55	65	3	14	
53	28	74	57	68	6	13	27	43	行 $\boldsymbol{B}_1$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	列 $\boldsymbol{B}_2$
70	8	10	20	39	50	33	76	63	Ⅰ $\boldsymbol{C}_6$
12	23	42	49	36	79	62	64	2	Ⅱ $\boldsymbol{B}_3$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	
29	75	59	69	4	18	25	44	46	
58	72	7	17	19	38	48	32	78	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	②
34	80	55	65	3	14	24	40	54	
13	27	43	53	28	74	57	68	6	行 $\boldsymbol{B}_1$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	列 $\boldsymbol{B}_5$
20	39	50	33	76	63	70	8	10	Ⅰ $\boldsymbol{C}_3$
62	64	2	12	23	42	49	36	79	Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	
69	4	18	25	44	46	29	75	59	
48	32	78	58	72	7	17	19	38	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	③
49	36	79	62	64	2	12	23	42	
65	3	14	24	40	54	34	80	55	行 $\boldsymbol{B}_1$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	列 $\boldsymbol{B}_8$
57	68	6	13	27	43	53	28	74	Ⅰ $\boldsymbol{B}_3$
25	44	46	29	75	59	69	4	18	Ⅱ $\boldsymbol{C}_3$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	
17	19	38	48	32	78	58	72	7	
33	76	63	70	8	10	20	39	50	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	④
57	68	6	13	27	43	53	28	74	
33	76	63	70	8	10	20	39	50	行 $\boldsymbol{B}_1$
45	52	35	73	59	66	5	15	22	列 $\boldsymbol{B}_8$
17	19	38	48	32	78	58	72	7	Ⅰ $\boldsymbol{B}_6$
65	3	14	24	40	54	34	80	55	Ⅱ $\boldsymbol{C}_6$
77	60	67	9	16	26	37	47	30	
49	36	79	62	64	2	12	23	42	
25	44	46	29	75	59	69	4	18	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑤
36	79	62	64	2	12	23	42	49	
14	24	40	54	34	80	55	65	3	行 $\boldsymbol{B}_1$
73	59	66	5	15	22	45	52	35	列 $\boldsymbol{B}_3$
27	43	53	28	74	57	68	6	13	Ⅰ $\boldsymbol{C}_6$
59	69	4	18	25	44	46	29	75	Ⅱ $\boldsymbol{B}_8$
37	47	30	77	60	67	9	16	26	
72	7	17	19	38	48	32	78	58	
50	33	76	63	70	8	10	20	39	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑥
27	43	53	28	74	57	68	6	13	
50	33	76	63	70	8	10	20	39	行 $\boldsymbol{B}_1$
73	59	66	5	15	22	45	52	35	列 $\boldsymbol{B}_3$
72	7	17	19	38	48	32	78	58	Ⅰ $\boldsymbol{C}_3$
14	24	40	54	34	80	55	65	3	Ⅱ $\boldsymbol{B}_5$
37	47	30	77	60	67	9	16	26	
36	79	62	64	2	12	23	42	49	
59	69	4	18	25	44	46	29	75	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑦
23	42	49	36	79	62	64	2	12	
54	34	80	55	65	3	14	24	40	行 $\boldsymbol{B}_1$
73	59	66	5	15	22	45	52	35	列 $\boldsymbol{B}_6$
68	6	13	27	43	53	28	74	57	Ⅰ $\boldsymbol{C}_3$
18	25	44	46	29	75	59	69	4	Ⅱ $\boldsymbol{B}_2$
37	47	30	77	60	67	9	16	26	
32	78	58	72	7	17	19	38	48	
63	70	8	10	20	39	50	33	76	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑧
54	34	80	55	65	3	14	24	40	
68	6	13	27	43	53	28	74	57	行 $\boldsymbol{B}_1$
37	47	30	77	60	67	9	16	26	列 $\boldsymbol{B}_6$
63	70	8	10	20	39	50	33	76	Ⅰ $\boldsymbol{B}_5$
23	42	49	36	79	62	64	2	12	Ⅱ $\boldsymbol{C}_6$
73	59	66	5	15	22	45	52	35	
18	25	44	46	29	75	59	69	4	
32	78	58	72	7	17	19	38	48	

1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑨	1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑩
42	49	36	79	62	64	2	12	23		43	53	28	74	57	68	6	13	27	
80	55	65	3	14	24	40	54	34	行 B_1	76	63	70	8	10	20	39	50	33	行 B_1
5	15	22	45	52	35	73	59	66	列 C_3	5	15	22	45	52	35	73	59	66	列 C_3
43	53	28	74	57	68	6	13	27	Ⅰ B_8	38	48	32	78	58	72	7	17	19	Ⅰ B_2
75	59	69	4	18	25	44	46	29	Ⅱ B_6	80	55	65	3	14	24	40	54	34	Ⅱ B_3
9	16	26	37	47	30	77	60	67		9	16	26	37	47	30	77	60	67	
38	48	32	78	58	72	7	17	19		42	49	36	79	62	64	2	12	23	
76	63	70	8	10	20	39	50	33		75	59	69	4	18	25	44	46	29	
1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑪	1	11	21	41	51	31	81	61	71	⑫
79	62	64	2	12	23	42	49	36	行 B_1	40	54	34	80	55	65	3	14	24	
40	54	34	80	55	65	3	14	24	列 C_6	74	57	68	6	13	27	43	53	28	行 B_1
5	15	22	45	52	35	73	59	66	Ⅰ B_5	9	16	26	37	47	30	77	60	67	列 C_6
74	57	68	6	13	27	43	53	28	Ⅱ B_3	39	50	33	76	63	70	8	10	20	Ⅰ B_6
44	46	29	75	59	69	4	18	25		79	62	64	2	12	23	42	49	36	Ⅱ B_2
9	16	26	37	47	30	77	60	67		5	15	22	45	52	35	73	59	66	
78	58	72	7	17	19	38	48	32		44	46	29	75	59	69	4	18	25	
39	50	33	76	63	70	8	10	20		78	58	72	7	17	19	38	48	32	
1	38	75	5	42	76	9	43	80	①	1	38	75	5	42	76	9	43	80	②
51	58	18	52	62	10	47	57	14		61	17	46	56	12	50	60	13	54	
71	19	29	66	23	33	67	27	34	行 C_3	31	72	25	35	64	20	30	68	24	行 C_3
41	78	4	45	79	8	37	74	3	列 B_1	41	78	4	45	79	8	37	74	3	列 B_1
61	17	46	56	12	50	60	13	54	Ⅰ B_2	11	48	59	15	49	63	16	53	55	Ⅰ B_8
21	32	69	22	36	70	26	28	65	Ⅱ B_3	71	19	29	66	23	33	67	27	34	Ⅱ B_6
81	7	44	73	2	39	77	6	40		81	7	44	73	2	39	77	6	40	
11	48	59	15	49	63	16	53	55		51	58	18	52	62	10	47	57	14	
31	72	25	35	64	20	30	68	24		21	32	69	22	36	70	26	28	65	
1	38	75	5	42	76	9	43	80	③	1	38	75	5	42	76	9	43	80	④
52	62	10	47	57	14	51	58	18		67	27	34	71	19	29	66	23	33	
67	27	34	71	19	29	66	23	33	行 C_3	56	12	50	60	13	54	61	17	46	行 C_3
41	78	4	45	79	8	37	74	3	列 B_4	81	7	44	73	2	39	77	6	40	列 B_4
56	12	50	60	13	54	61	17	46	Ⅰ B_5	30	68	24	31	72	25	35	64	20	Ⅰ B_3
26	28	65	21	32	69	22	36	70	Ⅱ B_6	52	62	10	47	57	14	51	58	18	Ⅱ B_8
81	7	44	73	2	39	77	6	40		41	78	4	45	79	8	37	74	3	
15	49	63	16	53	55	11	48	59		26	28	65	21	32	69	22	36	70	
30	68	24	31	72	25	35	64	20		15	49	63	16	53	55	11	48	59	
1	38	75	5	42	76	9	43	80		1	38	75	5	42	76	9	43	80	⑤
47	57	14	51	58	18	52	62	10		66	23	33	67	27	34	71	19	29	
66	23	33	67	27	34	71	19	29	行 C_3	60	13	54	61	17	46	56	12	50	行 C_3
41	78	4	45	79	8	37	74	3	列 B_7	81	7	44	73	2	39	77	6	40	列 B_7
60	13	54	61	17	46	56	12	50	Ⅰ B_8	35	64	20	30	68	24	31	72	25	Ⅰ B_6
22	36	70	26	28	65	21	32	69	Ⅱ A_1	47	57	14	51	58	18	52	62	10	Ⅱ B_2
81	7	44	73	2	39	77	6	40		41	78	4	45	79	8	37	74	3	
16	53	55	11	48	59	15	49	63		22	36	70	26	28	65	21	32	69	
35	64	20	30	68	24	31	72	25		16	53	55	11	48	59	15	49	63	
1	38	75	5	42	76	9	43	80	⑥	1	38	75	5	42	76	9	43	80	⑦
60	13	54	61	17	46	56	12	50		14	51	58	18	52	62	10	47	57	
35	64	20	30	68	24	31	72	25	行 C_3	27	34	71	19	29	66	23	33	67	行 C_3
41	78	4	45	79	8	37	74	3	列 B_7	37	74	3	41	78	4	45	79	8	列 B_3
16	53	55	11	48	59	15	49	63	Ⅰ B_5	50	60	13	54	61	17	46	56	12	Ⅰ B_1
66	23	33	67	27	34	71	19	29	Ⅱ B_3	36	70	26	28	65	21	32	69	22	Ⅱ B_8
81	7	44	73	2	39	77	6	40		73	2	39	77	6	40	81	7	44	
47	57	14	51	58	18	52	62	10		59	15	49	63	16	53	55	11	48	
22	36	70	26	28	65	21	32	69		72	25	35	64	20	30	68	24	31	

⑧ 行 C_3 列 B_3 ⅠB_5 ⅡB_4

1	38	75	5	42	76	9	43	80
27	34	71	19	29	66	23	33	67
50	60	13	54	61	17	46	56	12
73	2	39	77	6	40	81	7	44
72	25	35	64	20	30	68	24	31
14	51	58	18	52	62	10	47	57
37	74	3	41	78	4	45	79	8
36	70	26	28	65	21	32	69	22
59	15	49	63	16	53	55	11	48

⑨ 行 C_3 列 B_3 ⅠB_7 ⅡB_2

1	38	75	5	42	76	9	43	80
50	60	13	54	61	17	46	56	12
72	25	35	64	20	30	68	24	31
37	74	3	41	78	4	45	79	8
59	15	49	63	16	53	55	11	48
27	34	71	19	29	66	23	33	67
73	2	39	77	6	40	81	7	44
14	51	58	18	52	62	10	47	57
36	70	26	28	65	21	32	69	22

⑩ 行 C_3 列 B_6 ⅠB_4 ⅡB_2

1	38	75	5	42	76	9	43	80
18	52	62	10	47	57	14	51	58
23	33	67	27	34	71	19	29	66
37	74	3	41	78	4	45	79	8
54	61	17	46	56	12	50	60	13
32	69	22	36	70	26	28	65	21
73	2	39	77	6	40	81	7	44
63	16	53	55	11	48	59	15	49
68	24	31	72	25	35	64	20	30

⑪ 行 C_3 列 B_6 ⅠB_8 ⅡB_7

1	38	75	5	42	76	9	43	80
23	33	67	27	34	71	19	29	66
54	61	17	46	56	12	50	60	13
73	2	39	77	6	40	81	7	44
68	24	31	72	25	35	64	20	30
18	52	62	10	47	57	14	51	58
37	74	3	41	78	4	45	79	8
32	69	22	36	70	26	28	65	21
63	16	53	55	11	48	59	15	49

⑫ 行 C_3 列 B_6 ⅠB_1 ⅡB_5

1	38	75	5	42	76	9	43	80
54	61	17	46	56	12	50	60	13
68	24	31	72	25	35	64	20	30
37	74	3	41	78	4	45	79	8
63	16	53	55	11	48	59	15	49
23	33	67	27	34	71	19	29	66
73	2	39	77	6	40	81	7	44
18	52	62	10	47	57	14	51	58
32	69	22	36	70	26	28	65	21

⑬ 行 C_3 列 B_2 ⅠB_6 ⅡB_1

1	38	75	5	42	76	9	43	80
58	18	52	62	10	47	57	14	51
29	66	23	33	67	27	34	71	19
45	79	8	37	74	3	41	78	4
12	50	60	13	54	61	17	46	56
70	26	28	65	21	32	69	22	36
77	6	40	81	7	44	73	2	39
53	55	11	48	59	15	49	63	16
24	31	72	25	35	64	20	30	68

⑭ 行 C_3 列 B_2 ⅠB_3 ⅡB_4

1	38	75	5	42	76	9	43	80
12	50	60	13	54	61	17	46	56
24	31	72	25	35	64	20	30	68
45	79	8	37	74	3	41	78	4
53	55	11	48	59	15	49	63	16
29	66	23	33	67	27	34	71	19
77	6	40	81	7	44	73	2	39
58	18	52	62	10	47	57	14	51
70	26	28	65	21	32	69	22	36

⑮ 行 C_3 列 B_5 ⅠB_1 ⅡB_3

1	38	75	5	42	76	9	43	80
34	71	19	29	66	23	33	67	27
13	54	61	17	46	56	12	50	60
77	6	40	81	7	44	73	2	39
20	30	68	24	31	72	25	35	64
62	10	47	57	14	51	58	18	52
45	79	8	37	74	3	41	78	4
69	22	36	70	26	28	65	21	32
48	59	15	49	63	16	53	55	11

行 C_3 列 B_2 ⅠB_6 ⅡA_1

1	38	75	5	42	76	9	43	80
29	66	23	33	67	27	34	71	19
12	50	60	13	54	61	17	46	56
77	6	40	81	7	44	73	2	39
24	31	72	25	35	64	20	30	68
58	18	52	62	10	47	57	14	51
45	79	8	37	74	3	41	78	4
70	26	28	65	21	32	69	22	36
53	55	11	48	59	15	49	63	16

⑯ 行 C_3 列 B_5 ⅠB_6 ⅡB_7

1	38	75	5	42	76	9	43	80
13	54	61	17	46	56	12	50	60
20	30	68	24	31	72	25	35	64
45	79	8	37	74	3	41	78	4
48	59	15	49	63	16	53	55	11
34	71	19	29	66	23	33	67	27
77	6	40	81	7	44	73	2	39
62	10	47	57	14	51	58	18	52
69	22	36	70	26	28	65	21	32

⑰ 行 C_3 列 B_8 ⅠB_3 ⅡB_7

1	38	75	5	42	76	9	43	80
57	14	51	58	18	52	62	10	47
33	67	27	34	71	19	29	66	23
45	79	8	37	74	3	41	78	4
17	46	56	12	50	60	13	54	61
65	21	32	69	22	36	70	26	28
77	6	40	81	7	44	73	2	39
49	63	16	53	55	11	48	59	15
25	35	64	20	30	68	24	31	72

⑱ 行 C_3 列 B_8 ⅠB_4 ⅡB_6

1	38	75	5	42	76	9	43	80
33	67	27	34	71	19	29	66	23
17	46	56	12	50	60	13	54	61
77	6	40	81	7	44	73	2	39
25	35	64	20	30	68	24	31	72
57	14	51	58	18	52	62	10	47
45	79	8	37	74	3	41	78	4
65	21	32	69	22	36	70	26	28
49	63	16	53	55	11	48	59	15

上列各完美幻方的行、列，Ⅰ，Ⅱ各线组及一些非幻方的组成如下表:

行	B_1							
列	B_2	B_5	B_8	B_3	B_6	C_3	C_6	
Ⅰ Ⅱ	B_6A_0	A_1C_6	$B_3C_3$③	$C_6B_8$⑤	$C_3B_2$⑦	$B_8\ B_6$⑨	$B_5\ B_3$⑪	
	A_1C_3	$C_3B_6$②	A_0A_1	B_2A_0	$B_5C_6$⑧	$B_2\ B_3$⑩	$B_6\ B_2$⑫	
	$C_6B_3$①	B_3A_1	$B_6C_6$④	$C_3B_5$⑥	A_0B_8	$A_1\ B_5$	$B_8\ A_1$	
行	C_3							
列	B_1	B_4	B_7	B_3	B_6	B_2	B_5	B_8
Ⅰ Ⅱ	$B_2B_3$①	$B_5B_6$③	$B_8\ A_1$	$B_1B_8$⑦	B_4B_2⑩	$B_6\ B_1$⑬	B_1B_3⑮	A_1B_1
	A_1B_5	$B_3B_8$④	$B_6\ B_2$⑤	$B_5B_4$⑧	B_8B_7⑪	$B_7\ A_1$	B_6B_7⑯	B_3B_7⑰
	$B_8B_6$②	B_2A_1	$B_5\ B_3$⑥	$B_7B_2$⑨	B_1B_5⑫	$B_3\ B_4$⑭	$B_4\ A_1$	B_4B_6⑱

(9)

通过检查有:

当行、列线组均为 1、2 类, 对角线组为 3、4 类时, 可产生 1+1+2 = 4 个 **9** 阶完美幻方;

当行、列线组一组为 1、2 类之一时, 也可产生 2+2 = 4 个 **9** 阶完美幻方;

当行、列线组均为 3、4 类, 对角线组为, 1、2 类时, 可产生 3+3 = 6 个 **9** 阶完美幻方.

在以 B_1 为行线组的 12 个 9 阶完美幻方中, 改成以 B_4, B_7, B_2, B_5, B_8 为行线组也各可得 12 个 9 阶完美幻方; 但改成从 B_3, B_6; C_3, C_6 出发则各可得 18 个 9 阶完美幻方, 因为这时 A_0 或 A_1 不会成列线出现. 因此, 由可幻排列给出的分段方总能构造出:

$$(12\times 6\ +18\times 4)\div 4\ =36 \tag{10}$$

或

$$3\times 3\times 2\times 2\ =\ 36 \tag{11}$$

个基本的 9 阶完美幻方. 后式是由分类表 (8), 通过 4 个不同类各选其一, 组合而成. 因此, 为找出所有的 9 阶完美幻方, 其关键是找到所有的可幻的 9 级排列, 即可幻的 9 阶分段方.

2. 可幻 9 级排列

由前知不是对任意的 9 级排列作分段方的行、列序都可以给出 9 阶完美幻方, 只有由列和相等的 3 阶列和方拉出的 9 级排列才是可幻的 9 级排列. 现在, 设 $\mathbf{F}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 若 $\mathbf{F}$ 上的 3 阶方的各列元素和相等, 即在 9 级排列 $\pi=(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9)$ 中, 若有列和相等的 3 阶方:

$$\begin{array}{c|ccc|} \cline{2-4} & i_1 & i_2 & i_3 \\ & i_4 & i_5 & i_6 \\ & i_7 & i_8 & i_9 \\ \cline{2-4} \Sigma & 15 & 15 & 15 \end{array} \qquad i_j\in \mathbf{F},\ j=1,2,\cdots,9. \tag{12}$$

即

$$i_1\ +\ i_4\ +\ i_7\ =\ i_2\ +\ i_5\ +\ i_8\ =\ i_3\ +\ i_6\ +\ i_9\ =15 \tag{13}$$

成立, 则称 π 是可幻的 9 级排列. 若 π 还满足对称性条件

$$i_1\ +\ i_9\ =\ i_2\ +\ i_8\ =\ i_3\ +\ i_7\ =\ i_4\ +\ i_6\ =\ 2\times i_5=10 \tag{14}$$

则称 π 是对称的可幻 9 级排列.

有两个基本的等列 3 阶方:

$$\boldsymbol{A}\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{array}} \qquad \boldsymbol{B}\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{array}} \tag{15}$$

其余的等列 3 阶方可由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 型在保持 1 列不动的条件下, 交换 2、3 列; 在各列中,交换除 1 外的

其他数得到. 这可以得到下列 48 个互不同态的 3 阶等列方, 即得 48 个可幻的 9 级排列:

(1)

1	2	3	1	2	3	**1**	**6**	**3**	1	6	3	1	7	3	1	7	3
5	6	4	5	7	4	**5**	**7**	**4**	5	2	4	5	2	4	5	6	4
9	7	8	9	6	8	**9**	**2**	**8**	9	7	8	9	6	8	9	2	8
1	2	3	**1**	**2**	**3**	1	6	3	1	6	3	1	7	3	1	7	3
5	6	8	**5**	**7**	**8**	5	7	8	5	2	8	5	2	8	5	6	8
9	7	4	**9**	**6**	**4**	9	2	4	9	7	4	9	6	4	9	2	4

(2)

1	2	3	1	2	3	1	6	3	1	6	3	**1**	**7**	**3**	1	7	3
9	6	4	9	7	4	9	7	4	9	2	4	**9**	**2**	**4**	9	6	4
5	7	8	5	6	8	5	2	8	5	7	8	**5**	**6**	**8**	5	2	8
1	2	3	1	2	3	1	6	3	1	6	3	1	7	3	**1**	**7**	**3**
9	6	8	9	7	8	9	7	8	9	2	8	9	2	8	**9**	**6**	**8**
5	7	4	5	6	4	5	2	4	5	7	4	5	6	4	**5**	**2**	**4**

(3)

1	**2**	**3**	1	2	3	1	4	3	1	4	3	1	9	3	1	9	3
6	**4**	**7**	6	9	7	6	9	7	6	2	7	6	2	7	6	4	7
8	**9**	**5**	8	4	5	8	2	5	8	9	5	8	4	5	8	2	5
1	2	3	1	2	3	1	4	3	1	4	3	**1**	**9**	**3**	1	9	3
6	4	5	6	9	5	6	9	5	6	2	5	**6**	**2**	**5**	6	4	5
8	9	7	8	4	7	8	2	7	8	9	7	**8**	**4**	**7**	8	2	7

(4)

1	2	3	1	2	3	1	4	3	**1**	**4**	**3**	1	9	3	1	9	3
8	4	7	8	9	7	8	9	7	**8**	**2**	**7**	8	2	7	8	4	7
6	9	5	6	4	5	6	2	5	**6**	**9**	**5**	6	4	5	6	2	5
1	2	3	1	2	3	1	4	3	1	4	3	1	9	3	**1**	**9**	**3**
8	4	5	8	9	5	8	9	5	8	2	5	8	2	5	**8**	**4**	**5**
6	9	7	6	4	7	6	2	7	6	9	7	6	4	7	**6**	**2**	**7**

(16)

其中, 由黑体 8 方可得对称的 9 级可幻排列. 因此, 总共可得 $48^2\times36=82944$ 个基本的 9 阶完美幻方, 其中有

$$8^2\times36=2304 \tag{17}$$

个对称的基本 9 阶完美幻方.

二、9 阶完美幻方的特优性

如同对奇阶完美幻方的特优性讨论一样, 可用那里的方法给出特优的 9 阶完美幻方. 这里共有 8 个对称的可幻 9 级排列:

$$\begin{array}{lcl}
(1,6,3,5,7,4,9,2,8) & \to & \alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3),\\
 & & \alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4),\\
(1,7,3,9,2,4,5,6,8) & \to & \alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4),\\
(1,7,3,9,6,8,5,2,4) & \to & \alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3),\\
 & & \\
 & & \beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5),\\
(1,9,3,6,2,5,8,4,7) & \to & \beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5),\\
(1,4,3,8,2,7,6,9,5) & \to & \beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7),\\
(1,9,3,8,4,5,6,2,7) & \to & \beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3).
\end{array} \tag{18}$$

这里α型表第一列表为 1,5,9 的对称 9 级可幻排列; β型表第一列为 1,6,8 的对称 9 级可幻排列. 任选其一对排列对作对称的分段方的行、列序, 均可得到对称的 9 阶完美幻方. 为了解决其特优性还需对这些排列的组合作进一步的研究, 可分为下列情形:

1. 同型排列

例 1　以排列 α_2 (1,2,3,5,7,8,9,6,4)为行、列序构作分段方:

列序→

行序↓

1	1	2	3	5	7	8	9	6	4
2	10	11	12	14	16	17	18	15	13
3	19	20	21	23	25	26	27	24	22
5	37	38	39	41	43	44	45	42	40
7	55	56	57	59	61	62	63	60	58
8	64	65	66	68	70	71	72	69	67
9	73	74	75	77	79	80	81	78	76
6	46	47	48	50	52	53	54	51	49
4	28	29	30	32	34	35	36	33	31

(19)

执行行 Z 变换, 并作行列转换可得如下列、行和方:

1	11	21	41	61	71	81	51	31	B_1	1	12	25	45	58	65	77	53	33	B_2
2	12	23	43	62	72	78	49	28		2	14	26	44	55	66	79	54	31	
3	14	25	44	63	69	76	46	29		3	16	27	40	56	68	80	51	28	
5	16	26	45	60	67	73	47	30		5	17	24	37	57	70	81	49	29	
7	17	27	42	58	64	74	48	32		7	18	22	38	59	71	78	46	30	
8	18	24	40	55	65	75	50	34		8	15	19	39	61	72	76	47	32	
9	15	22	37	56	66	77	52	35		9	13	20	41	62	69	73	48	34	
6	13	19	38	57	68	79	53	36		6	10	21	43	63	67	74	50	35	
4	10	20	39	59	70	80	54	33		4	11	23	44	60	64	75	52	36	
1	16	22	41	60	66	81	47	35	B_4	1	17	20	45	57	69	77	49	34	B_5
2	17	19	43	58	68	78	48	36		2	18	21	42	59	67	79	46	35	
3	18	20	44	55	70	76	50	33		3	15	23	40	61	64	80	47	36	
5	15	21	45	56	71	73	52	31		5	13	25	37	62	65	81	48	33	
7	13	23	42	57	72	74	53	28		7	10	26	38	63	66	78	50	31	
8	10	25	40	59	69	75	54	29		8	11	27	39	60	68	76	52	28	
9	11	26	37	61	67	77	51	30		9	12	24	41	58	70	73	53	29	
6	12	27	38	62	64	79	49	32		6	14	22	43	55	71	74	54	30	
4	14	24	39	63	65	80	46	34		4	16	19	44	56	72	75	51	32	
1	15	26	41	56	67	81	52	30	B_7	1	13	24	45	62	70	77	48	29	B_8
2	13	27	43	57	64	78	53	32		2	10	22	42	63	71	79	50	30	
3	10	24	44	59	65	76	54	34		3	11	19	40	60	72	80	52	32	
5	11	22	45	61	66	73	51	35		5	12	20	37	58	69	81	53	34	
7	12	19	42	62	68	74	49	36		7	14	21	38	55	67	78	54	35	
8	14	20	40	63	70	75	46	33		8	16	23	39	56	64	76	51	36	
9	16	21	37	60	71	77	47	31		9	17	25	41	57	65	73	49	33	
6	17	23	38	58	72	79	48	28		6	18	26	43	59	66	74	46	31	
4	18	25	39	55	69	80	50	29		4	15	27	44	61	68	75	47	28	
1	14	27	37	59	72	73	50	36	B_3	1	38	75	5	43	80	9	42	76	C_3
2	16	24	38	61	69	74	52	33		10	56	48	14	61	53	18	60	49	
3	17	22	39	62	67	75	53	31		19	65	30	23	70	35	27	69	31	
5	18	19	41	63	64	77	54	28		37	74	3	41	79	8	45	78	4	
7	15	20	43	60	65	79	51	29		55	47	12	59	52	17	63	51	13	
8	13	21	44	58	66	80	49	30		64	29	21	68	34	26	72	33	22	
9	10	23	45	55	68	81	46	32		73	2	39	77	7	44	81	6	40	
6	11	25	42	56	70	78	47	34		46	11	57	50	16	62	54	15	58	
4	12	26	40	57	71	76	48	35		28	20	66	32	25	71	36	24	67	

1	18	23	37	63	68	73	54	32	B_6	1	74	39	5	79	44	9	78	40	C_6
2	15	25	38	60	70	74	51	34		10	47	57	14	52	62	18	51	58	
3	13	26	39	58	71	75	49	35		19	29	66	23	34	71	27	33	67	
5	10	27	41	55	72	77	46	36		37	2	75	41	7	80	45	6	76	
7	11	24	43	56	69	79	47	33		55	11	48	59	16	53	63	15	49	
8	12	22	44	57	67	80	48	31		64	20	30	68	25	35	72	24	31	
9	14	19	45	59	64	81	50	28		73	38	3	77	43	8	81	42	4	
6	16	20	42	61	65	78	52	29		46	56	12	50	61	17	54	60	13	
4	17	21	40	62	66	76	53	30		28	65	21	32	70	26	36	69	22	

对于奇阶, 其特优性的最高次由各列和方的中心线(中心数 41 所在线)达到. 因此 , 给出各列、行和方的中心线, 并计算各线的元素和, 方次和($\Sigma_9 = 369$):

B_1	1	11	21	41	61	71	81	51	31	369	21129
B_4	1	16	22	41	60	66	81	47	35	369	20373
B_7	1	15	26	41	56	67	81	52	30	369	20373
B_2	9	13	20	41	62	69	73	48	34	369	19725
B_5	9	12	24	41	58	70	73	53	29	369	19725
B_8	9	17	25	41	57	65	73	49	33	369	18969
B_3	5	18	19	41	63	64	77	54	28	369	20085
B_6	5	10	27	41	55	72	77	46	36	369	20085
A_1	1	10	19	37	55	64	73	46	28	333	
C_3	37	74	3	41	79	8	45	78	4	369	22965
C_6	37	2	75	41	7	80	45	6	76	369	22965
A_0	1	2	3	5	7	8	9	6	4	45	

(20)

列行和方	各方中心线中相同元
B_1 B_4 B_7	1 41 81
B_2 B_5 B_8	9 41 73
B_3 B_6 A_1	5 41 77
C_3 C_6 A_0	37 41 45

(21)

其中 A_1, A_0 分别是分段方的行列线组的第一线, 它们不是列和方.表(21)是列行和方的分类表. 同行各方有 3 个相同元素, 因此不可能出现在同一个完美幻方中. 这种分类对 9 阶可幻排列总是成立的, 只是中心线中相同元不同而已. 由计算可知:不同类列和方中心线的 2 次和都不相同. 因此不可能构作出 3 次特优的 9 阶完美幻方.

例 2　分别以 β_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5), β_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)为分段方的列、行序:

列序→	1	1	2	3	6	4	7	8	9	5		1	1	2	5	8	9	7	6	4	3
行序↓	2	10	11	12	15	13	16	17	18	14		2	10	11	14	17	18	16	15	13	12
	5	37	38	39	42	40	43	44	45	41		3	19	20	23	26	27	25	24	22	21
	8	64	65	66	69	67	70	71	72	68		6	46	47	50	53	54	52	51	49	48
	9	73	74	75	78	76	79	80	81	77		4	28	29	32	35	36	34	33	31	30
	7	55	56	57	60	58	61	62	63	59		7	55	56	59	62	63	61	60	58	57
	6	46	47	48	51	49	52	53	54	50		6	64	65	68	71	72	70	69	67	66
	4	28	29	30	33	31	34	35	36	32		4	73	74	77	80	81	79	78	76	75
	3	19	20	21	24	22	25	26	27	23		3	37	38	41	44	45	43	42	40	39

由行 Z 变换得各列、行和方. 这些列、行和方详细给出如下:

A_1	B_1	1	11	39	69	76	61	53	36	23	1	14	45	71	79	58	51	30	20	B_8
		2	12	42	67	79	62	54	32	19	2	10	41	72	80	61	49	33	21	
		3	15	40	70	80	63	50	28	20	3	11	37	68	81	62	52	31	24	
		6	13	43	71	81	59	46	29	21	6	12	38	64	77	63	53	34	22	
		4	16	44	72	77	55	47	30	24	4	15	39	65	73	59	54	35	25	
		7	17	45	68	73	56	48	33	22	7	13	42	66	74	55	50	36	26	
		8	18	41	64	74	57	51	31	25	8	16	40	69	75	56	46	32	27	
		9	14	37	65	75	60	49	34	26	9	17	43	67	78	57	47	28	23	
		5	10	38	66	78	58	52	35	27	5	18	44	70	76	60	48	29	19	
	B_7	1	18	43	69	74	59	53	31	21	1	12	40	71	77	56	51	34	27	B_2
		2	14	44	67	75	55	54	34	24	2	15	43	72	73	57	49	35	23	
		3	10	45	70	78	56	50	35	22	3	13	44	68	74	60	52	36	19	
		6	11	41	71	76	57	46	36	25	6	16	45	64	75	58	53	32	20	
		4	12	37	72	79	60	47	32	26	4	17	41	65	78	61	54	28	21	
		7	15	38	68	80	58	48	28	27	7	18	37	66	76	62	50	29	24	
		8	13	39	64	81	61	51	29	23	8	14	38	69	79	63	46	30	22	
		9	16	42	65	77	62	49	30	19	9	10	39	67	80	59	47	33	25	
		5	17	40	66	73	63	52	33	20	5	11	42	70	81	55	48	31	26	
	B_4	1	13	41	69	81	57	53	29	25	1	16	38	71	75	63	51	32	22	B_5
		2	16	37	67	77	60	54	30	26	2	17	39	72	78	59	49	28	25	
		3	17	38	70	73	58	50	33	27	3	18	42	68	76	55	52	29	26	
		6	18	39	71	74	61	46	31	23	6	14	40	64	79	56	53	30	27	
		4	14	42	72	75	62	47	34	19	4	10	43	65	80	57	54	33	23	
		7	10	40	68	78	63	48	35	20	7	11	44	66	81	60	50	31	19	
		8	11	43	64	76	59	51	36	21	8	12	45	69	77	58	46	34	20	
		9	12	44	65	79	55	49	32	24	9	15	41	67	73	61	47	35	21	
		5	15	45	66	80	56	52	28	22	5	13	37	70	74	62	48	36	24	
	B_3	1	15	44	64	78	62	46	33	26	1	10	37	64	73	55	46	28	19	C_3
		2	13	45	65	76	63	47	31	27	47	29	20	2	11	38	65	74	56	
		3	16	41	66	79	59	48	34	23	66	75	57	48	30	21	3	12	39	
		6	17	37	69	80	55	51	35	19	6	15	42	69	78	60	51	33	24	
		4	18	38	67	81	56	49	36	20	49	31	22	4	13	40	67	76	58	
		7	14	39	70	77	57	52	32	21	70	79	61	52	34	25	7	16	43	
		8	10	42	71	73	60	53	28	24	8	17	44	71	80	62	53	35	26	
		9	11	40	72	74	58	54	29	22	54	36	27	9	18	45	72	81	63	
		5	12	43	68	75	61	50	30	25	68	77	59	50	32	23	5	14	41	
	B_6	1	17	42	64	80	60	46	35	24	1	10	37	64	73	55	46	28	19	C_6
		2	18	40	65	81	58	47	36	22	65	74	56	47	29	20	2	11	38	
		3	14	43	66	77	61	48	32	25	48	30	21	3	12	39	66	75	57	
		6	10	44	69	73	62	51	28	26	6	15	42	69	78	60	51	33	24	
		4	11	45	67	74	63	49	29	27	67	76	58	49	31	22	4	13	40	
		7	12	41	70	75	59	52	30	23	52	34	25	7	16	43	70	79	61	
		8	15	37	71	78	55	53	33	19	8	17	44	71	80	62	53	35	26	
		9	13	38	72	76	56	54	31	20	72	81	63	54	36	27	9	18	45	
		5	16	39	68	79	57	50	34	21	50	32	23	5	14	41	68	77	59	
A_2	B_1	1	11	23	53	36	61	69	76	39	1	12	22	51	34	63	71	77	38	B_8
		2	14	26	54	34	60	67	75	37	2	10	21	49	33	61	72	80	41	
		5	17	27	52	33	58	66	73	38	5	11	19	48	31	60	70	81	44	
		8	18	25	51	31	57	64	74	41	8	14	20	46	30	58	69	79	45	
		9	16	24	49	30	55	65	77	44	9	17	23	47	28	57	67	78	42	
		7	15	22	48	28	56	68	80	43	7	18	26	50	29	55	66	76	42	
		6	13	21	46	29	59	71	81	43	6	16	27	53	32	56	64	75	40	
		4	12	19	47	32	62	72	79	42	4	15	25	54	35	59	65	73	39	
		3	10	20	50	35	63	70	78	40	3	13	24	52	36	62	68	74	37	

B_7	1	18	21	53	31	59	69	74	43	1	16	20	51	32	58	71	75	45	B_2
	2	16	19	54	30	62	67	77	42	2	15	23	49	35	57	72	73	43	
	5	15	20	52	28	63	66	80	40	5	13	26	48	36	55	70	74	42	
	8	13	23	51	29	61	64	81	39	8	12	27	46	34	56	69	77	40	
	9	12	26	49	32	60	65	79	37	9	10	25	47	33	59	67	80	39	
	7	10	27	48	35	58	68	78	38	7	11	24	50	31	62	66	81	37	
	6	11	25	46	36	57	71	76	41	6	14	22	53	30	63	64	79	38	
	4	14	24	47	34	55	72	75	44	4	17	21	54	28	61	65	78	41	
	3	17	22	50	33	56	70	73	45	3	18	19	52	29	60	68	76	44	
B_4	1	13	25	53	29	57	69	81	41	1	14	27	51	30	56	71	79	40	B_5
	2	12	24	54	32	55	67	79	44	2	17	25	49	28	59	72	78	39	
	5	10	22	52	35	56	66	78	45	5	18	24	48	29	62	70	76	37	
	8	11	21	51	36	59	64	76	43	8	16	22	46	32	63	69	75	38	
	9	14	19	49	34	62	65	75	42	9	15	21	47	35	61	67	73	41	
	7	17	20	48	33	63	68	73	40	7	13	19	50	36	60	66	74	44	
	6	18	23	46	31	61	71	74	37	6	12	20	53	34	58	64	77	45	
	4	16	26	47	30	60	72	77	37	4	10	23	54	33	57	65	80	43	
	3	15	27	50	28	58	70	80	38	3	11	26	52	31	55	68	81	42	
B_3	1	15	26	46	33	62	64	78	44	1	10	19	46	28	55	64	73	37	C_3
	2	13	27	47	31	63	65	76	45	47	29	56	65	74	38	2	11	20	
	5	12	25	50	30	61	68	75	43	68	77	41	5	14	23	50	32	59	
	8	10	24	53	28	60	71	73	42	8	17	26	53	35	62	71	80	44	
	9	11	22	54	29	58	72	74	40	54	36	63	72	81	45	9	18	27	
	7	14	21	52	32	57	70	77	39	70	79	43	7	16	25	52	34	61	
	6	17	19	51	35	55	69	80	37	6	15	24	51	33	60	69	78	42	
	4	18	20	49	36	56	67	81	38	49	31	58	67	76	40	4	13	22	
	3	16	23	48	34	59	66	79	41	66	75	39	3	12	21	48	30	57	
B_6	1	17	24	46	35	60	64	80	42	1	10	19	46	28	55	64	73	37	C_6
	2	18	22	47	36	58	65	81	40	65	74	38	2	11	20	47	29	56	
	5	16	21	50	34	57	68	79	39	50	32	59	68	77	41	5	14	23	
	8	15	19	53	33	55	71	78	37	8	17	26	53	35	62	71	80	44	
	9	13	20	54	31	56	72	76	38	72	81	45	9	18	27	54	36	63	
	7	12	23	52	30	59	70	75	41	52	34	61	70	79	43	7	16	25	
	6	10	26	51	28	62	69	73	44	6	15	24	51	33	60	69	78	42	
	4	11	27	49	29	63	67	74	45	67	76	40	4	13	22	49	31	58	
	3	14	25	48	32	61	66	77	43	48	30	57	66	75	39	3	12	21	

对比 A_1, A_2 之各列和方，可知在两方的 B_1, B_4, B_7 之第 1,4,7 线对应相同，B_2, B_5, B_8 之第 2, 5, 8 线对应相同，B_3, B_6, C_3, C_6 之各线对应相同. 这里，对应相同线是指列、行和方中组成元素相同的线，且不论线中元素的排列顺序，以及这些线所在序号. 奇阶对称完美幻方的特优性，其最高次和往往出现在列、行和方的中心线上. 因此，再把上列各方中心线(中心数 41 所在线)及其次和列出: $\Sigma_9 = 369$，并计算各线的 2 次和.

B_1	8	18	41	64	74	57	51	31	25	369	19077
B_4	1	13	41	69	81	57	53	29	25	369	20697
B_7	6	11	41	71	76	57	46	36	25	369	19941
B_2	4	17	41	65	78	61	54	28	21	369	20157
B_5	9	15	41	67	73	61	47	35	21	369	19401
B_8	2	10	41	72	80	61	49	33	21	369	21021
B_3	3	16	41	66	79	59	48	34	23	369	20013
B_6	7	12	41	70	75	59	52	30	23	369	20013
C_3	19	56	41	26	63	43	24	58	39	369	17133
C_6	55	20	41	62	27	43	60	22	39	369	17133

对称中心 41，
$a + a' = 82$.

(22)

容易看出不同类列和方的中心线无相同的2次和, 因此, 同样不能构作出3次特优的9阶完美幻方.

2. 不同型排列

通过研究, 8个对称排列的下列配对可得3次特优的9阶完美幻方:

	α_1	α_2	α_3	α_4
β_1		O	×	
β_2	×			O
β_3	O			×
β_4		×	O	

(23)

甲 20049　1225449　　　　乙 19725　1185597
20373　1265301

① $\alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3)$,　$\beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5)$,
$\beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5)$,　$\alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4)$,
② $\alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4)$,　$\alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3)$,
$\beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)$,　$\beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7)$,
③ $\alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4)$,　$\beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5)$,
$\beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5)$,　$\alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3)$,
④ $\alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3)$,　$\beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)$,
$\beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7)$,　$\alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4)$.

(24)

甲类(1)以 $\alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3)$, $\beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5)$为行列序作分段方:

A_1

1	1	2	4	5	6	8	9	7	3
2	10	11	13	14	15	17	18	16	12
7	55	56	58	59	60	62	63	61	57
6	46	47	49	50	51	53	54	52	48
4	28	29	31	32	33	35	36	34	30
3	19	20	22	23	24	26	27	25	21
8	64	65	67	68	69	71	72	70	66
9	73	74	76	77	78	80	81	79	75
5	37	38	40	41	42	44	45	43	39

A_2

1	1	2	7	6	4	3	8	9	5
2	10	11	16	15	13	12	17	18	14
4	28	29	34	33	31	30	35	36	32
5	37	38	43	42	40	39	44	45	41
6	46	47	52	51	49	48	53	54	50
8	64	65	70	69	67	66	71	72	68
9	73	74	79	78	76	75	80	81	77
7	55	56	61	60	58	57	62	63	59
3	19	20	25	24	22	21	26	27	23

B_4

1	2	4	5	6	8	9	7	3
15	17	18	16	12	10	11	13	14
57	55	56	58	59	60	62	63	61
50	51	53	54	52	48	46	47	49
34	30	28	29	31	32	33	35	36
22	23	24	26	27	25	21	19	20
72	70	66	64	65	67	68	69	71
74	76	77	78	80	81	79	75	73
44	45	43	39	37	38	40	41	42

B_2

1	2	7	6	4	3	8	9	5
16	15	13	12	17	18	14	10	11
31	30	35	36	32	28	29	34	33
44	45	41	37	38	43	42	40	39
50	46	47	52	51	49	48	53	54
65	70	69	67	66	71	72	68	64
78	76	75	80	81	77	73	74	79
57	62	63	59	55	56	61	60	58
27	23	19	20	25	24	22	21	26

B_5

1	2	4	5	6	8	9	7	3
17	18	16	12	10	11	13	14	15
56	58	59	60	62	63	61	57	55
54	52	48	46	47	49	50	51	53
31	32	33	35	36	34	30	28	29
25	21	19	20	22	23	24	26	27
68	69	71	72	70	66	64	65	67
75	73	74	76	77	78	80	81	79
42	44	45	43	39	37	38	40	41

B_7

1	2	7	6	4	3	8	9	5
18	14	10	11	16	15	13	12	17
30	35	36	32	28	29	34	33	31
42	40	39	44	45	41	37	38	43
47	52	51	49	48	53	54	50	46
68	64	65	70	69	67	66	71	72
80	81	77	73	74	79	78	76	75
58	57	62	63	59	55	56	61	60
25	24	22	21	26	27	23	19	20

各方之中心线:

A_1										A_2										
B_1	6	17	63	52	30	19	65	76	41	B_1	3	17	36	41	46	65	79	60	22,	19941
B_7	2	12	63	51	31	19	70	80	41	B_4	3	10	31	41	51	72	79	62	20,	21021
B_8	4	11	55	48	34	27	71	78	41	B_8	7	11	28	41	54	71	75	58	24,	20157
B_2	8	16	55	49	33	27	66	74	41	B_5	7	18	33	41	49	64	75	56	26,	19077
B_4	7	13	63	47	35	19	69	75	41	B_2	369	20049	1225449							
B_5	3	15	55	53	29	27	67	79	41	B_7	369	20049	1225449							
B_3	9	10	59	54	28	23	72	73	41	20085	5	16	30	41	52	66	77	61	21,	20013
B_6	1	18	59	46	36	23	64	81	41	20085	5	12	34	41	48	70	77	57	25,	20013
C_3	37	56	22	41	60	26	45	61	21	17133	2	73	43	4	78	39	9	80	41,	22965
C_6	37	20	58	41	24	62	45	25	57	17133	1	74	43	6	76	39	8	81	41.	22965

可见, 对 A_1 以 B_4, B_5 为对角线组, A_2 以 B_2, B_7 为对角线组, 可得 3 次特优的 9 阶完美幻方. 而且, 3 次特优的主对角线是相同的. 为此, 对 A_1 的 B_4, B_5, 对 A_2 作 B_2, B_7. 然后作拓扑变换各得两个 3 次特优的 9 阶完美幻方:

7	38	78	70	20	33	52	56	**15**	**7**	24	11	70	60	74	52	42	**29**	① ② A_1
50	**63**	10	5	45	73	68	**27**	28	64	**63**	77	46	45	32	1	**27**	14	行 B_6 B_3
66	22	**35**	48	58	17	**3**	40	80	49	39	**35**	4	21	17	**67**	57	80	列 C_6 C_3
6	43	74	**69**	25	**29**	51	61	11	6	20	16	**69**	56	**79**	51	38	34	
46	59	18	1	**41**	81	64	23	36	72	59	73	54	**41**	28	9	23	10	I II
71	21	31	**53**	57	**13**	8	39	76	48	44	31	**3**	26	**13**	66	62	76	B_4 B_5
2	42	**79**	65	24	34	**47**	60	16	2	25	**15**	65	61	78	**47**	43	33	369
54	**55**	14	9	37	77	72	**19**	32	68	**55**	81	50	37	36	5	**19**	18	20049
67	26	30	49	62	12	4	44	**75**	**53**	40	30	8	22	12	71	58	**75**	1225449
47	45	31	11	9	22	56	81	**67**	**47**	4	72	11	76	36	56	40	**27**	③ ④ A_2
59	**75**	70	50	39	34	14	**3**	25	16	**75**	32	61	39	23	52	**3**	68	B_3 B_6
17	6	**19**	62	78	64	**53**	42	28	60	44	**19**	51	8	64	**15**	80	28	C_3 C_6
49	38	36	**13**	2	**27**	58	74	72	49	9	65	**13**	81	**29**	58	45	20	
61	77	66	52	**41**	30	16	5	21	12	77	34	57	**41**	25	48	5	70	
10	8	24	**55**	80	**69**	46	44	33	62	37	24	**53**	1	**69**	17	73	33	B_2 B_7
54	40	**29**	18	4	20	**63**	76	65	54	2	**67**	18	74	31	**63**	38	22	369
57	**79**	68	48	43	32	12	**7**	23	14	**79**	30	59	43	21	50	**7**	66	20049
15	1	26	60	73	71	51	37	**35**	**55**	42	26	46	6	71	10	78	**35**	1225449

甲类(2) 以 $\alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4)$, $\beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)$为行列序构作分段方:

A_3 A_4

1	1	2	3	5	7	8	9	6	4	1	1	2	5	8	9	7	6	4	3
2	10	11	12	14	16	17	18	15	13	2	10	11	14	17	18	16	15	13	12
5	37	38	39	41	43	44	45	42	40	3	19	20	23	26	27	25	24	22	21
8	64	65	66	68	70	71	72	69	67	5	37	38	41	44	45	43	42	40	39
9	73	74	75	77	79	80	81	78	76	7	55	56	59	62	63	61	60	58	57
7	55	56	57	59	61	62	63	60	58	8	64	65	68	71	72	70	69	67	66
6	46	47	48	50	52	53	54	51	49	9	73	74	77	80	81	79	78	76	75
4	28	29	30	32	34	35	36	33	31	6	46	47	50	53	54	52	51	49	48
3	19	20	21	23	25	26	27	24	22	4	28	29	32	35	36	34	33	31	30

1	2	3	5	7	8	9	6	4	B_4	B_2	1	2	5	8	9	7	6	4	3
16	17	18	15	13	10	11	12	14			14	17	18	16	15	13	12	10	11
40	37	38	39	41	43	44	45	42			27	25	24	22	21	19	20	23	26
68	70	71	72	69	67	64	65	66			42	40	39	37	38	41	44	45	43
78	76	73	74	75	77	79	80	81			63	61	60	58	57	55	56	59	62
57	59	61	62	63	60	58	55	56			65	68	71	72	70	69	67	66	64
54	51	49	46	47	48	50	52	53			80	81	79	78	76	75	73	74	77
29	30	32	34	35	36	33	31	28			52	51	49	48	46	47	50	53	54
26	27	24	22	19	20	21	23	25			31	30	28	29	32	35	36	34	33
1	2	3	5	7	8	9	6	4	B_5	B_7	1	2	5	8	9	7	6	4	3
17	18	15	13	10	11	12	14	16			13	12	10	11	14	17	18	16	15
38	39	41	43	44	45	42	40	37			25	24	22	21	19	20	23	26	27
72	69	67	64	65	66	68	70	71			44	45	43	42	40	39	37	38	41
75	77	79	80	81	78	76	73	74			56	59	62	63	61	60	58	57	55
60	58	55	56	57	59	61	62	63			66	64	65	68	71	72	70	69	67
50	52	53	54	51	49	46	47	48			78	76	75	73	74	77	80	81	79
31	28	29	30	32	34	35	36	33			54	52	51	49	48	46	47	50	53
25	26	27	24	22	19	20	21	23			32	35	36	34	33	31	30	28	29

各列行和方的中心线:

A_3											A_4										
B_1	2	12	41	70	80	63	51	31	19	21021	B_1	3	10	20	41	62	72	79	51	31	21021
B_7	6	17	41	65	76	63	52	30	19	19941	B_4	3	17	22	41	60	65	79	46	36	19941
B_2	4	11	41	71	78	55	48	34	27	20157	B_5	7	11	24	41	58	71	75	54	28	20157
B_8	8	16	41	66	74	55	49	33	27	19077	B_8	7	18	26	41	56	64	75	49	33	19077
B_4	7	13	41	69	75	63	47	35	19	B_2	369	20049	1225449								
	2	17	37	70	76	59	51	30	27	20049		5	18	24	39	56	71	79	49	28	20049
	6	12	45	65	80	55	52	31	23	20049		3	11	26	43	58	64	77	54	33	20049
B_5	3	15	41	67	79	55	53	29	27	B_7	369	20049	1225449								
	8	11	45	66	78	59	49	34	19	20049		5	10	22	43	62	65	75	51	36	20049
	4	16	37	71	74	63	48	33	23	20049		7	17	20	39	60	72	77	46	31	20049

69	38	16	6	20	34	51	56	**79**	**69**	25	74	6	61	11	51	43	**29**	⑤　⑥ A_3
50	**63**	73	68	45	10	5	**27**	28	1	**63**	14	46	45	32	64	**27**	77	行 B_6 B_3
4	21	**35**	49	57	80	**67**	39	17	48	40	**35**	66	22	80	**3**	58	17	列 C_6 C_3
70	42	11	**7**	24	**29**	52	60	74	70	20	78	**7**	56	**15**	52	38	33	
46	59	81	64	**41**	18	1	23	36	9	59	10	54	**41**	28	72	23	73	I　II
8	22	30	**53**	58	**75**	71	40	12	49	44	30	**67**	26	**75**	4	62	12	B_4　B_5
65	43	**15**	2	25	33	**47**	61	78	65	24	**79**	2	60	16	**47**	42	34	369
54	**55**	77	72	37	14	9	**19**	32	5	**55**	18	50	37	36	68	**19**	81	20049
3	26	31	48	62	76	66	44	**13**	**53**	39	31	71	21	76	8	57	**13**	1225449
63	38	22	18	2	31	54	74	**67**	**63**	4	65	18	76	20	54	40	**29**	⑦　⑧ A_4
50	**75**	70	59	39	25	14	**3**	34	16	**75**	23	52	39	32	61	**3**	68	B_3　B_6
10	6	**35**	46	78	71	**55**	42	26	51	37	**35**	60	1	71	**15**	73	26	C_6　C_3
58	45	20	**13**	9	**29**	49	81	65	58	2	42	**13**	74	**27**	49	38	36	
52	77	66	61	**41**	21	16	5	30	12	77	25	48	**41**	34	57	5	70	I　II
17	1	33	**53**	73	**69**	62	37	24	46	44	33	**55**	8	**69**	10	80	24	B_2　B_7
56	40	**27**	11	4	36	**47**	76	72	56	9	**67**	11	81	22	**47**	45	31	369
48	**79**	68	57	43	23	12	**7**	32	14	**79**	21	50	43	30	59	**7**	66	20049
15	8	28	51	80	64	60	44	**19**	**53**	42	28	62	6	64	17	78	**19**	1225449

甲类(3)以α_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4), β_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5)为行列序构作分段为:

1	1	2	8	9	6	3	5	7	4	A_5	1	1	2	3	6	4	7	8	9	5
2	10	11	17	18	15	12	14	16	13		2	10	11	12	15	13	16	17	18	14
3	19	20	26	27	24	21	23	25	22		8	64	65	66	69	67	70	71	72	68
6	46	47	53	54	51	48	50	52	49		9	73	74	75	78	76	79	80	81	77
4	28	29	35	36	33	30	32	34	31		6	46	47	48	51	49	52	53	54	50
7	55	56	62	63	60	57	59	61	58		3	19	20	21	24	22	25	26	27	23
8	64	65	71	72	69	66	68	70	67		5	37	38	39	42	40	43	44	45	41
9	73	74	80	81	78	75	77	79	76		7	55	56	57	60	58	61	62	63	59
5	37	38	44	45	42	39	41	43	40	A_6	4	28	29	30	33	31	34	35	36	32

1	2	8	9	6	3	5	7	4	B_1	B_8	1	2	3	6	4	7	8	9	5
11	17	18	15	12	14	16	13	10			14	10	11	12	15	13	16	17	18
26	27	24	21	23	25	22	19	20			72	68	64	65	66	69	67	70	71
54	51	48	50	52	49	46	47	53			80	81	77	73	74	75	78	76	79
33	30	32	34	31	28	29	35	36			52	53	54	50	46	47	48	51	49
57	59	61	58	55	56	62	63	60			22	25	26	27	23	19	20	21	24
68	70	67	64	65	71	72	69	66			42	40	43	44	45	41	37	38	39
79	76	73	74	80	81	78	75	77			57	60	58	61	62	63	59	55	56
40	37	38	44	45	42	39	41	43			29	30	33	31	34	35	36	32	28
1	2	8	9	6	3	5	7	4	B_8	B_1	1	2	3	6	4	7	8	9	5
13	10	11	17	18	15	12	14	16			11	12	15	13	16	17	18	14	10
25	22	19	20	26	27	24	21	23			66	69	67	70	71	72	68	64	65
50	52	49	46	47	53	54	51	48			78	76	79	80	81	77	73	74	75
30	32	34	31	28	29	35	36	33			49	52	53	54	50	46	47	48	51
60	57	59	61	58	55	56	62	63			25	26	27	23	19	20	21	24	22
72	69	66	68	70	67	64	65	71			44	45	41	37	38	39	42	40	43
80	81	78	75	77	79	76	73	74			63	59	55	56	57	60	58	61	62
38	44	45	42	39	41	43	40	37			32	28	29	30	33	31	34	35	36

7 13 19 47 35 63 69 75 41 369 20049 1225449
3 15 27 53 29 55 67 79 41 369 20049 1225449,
甲类各方之B_3, B_6, C_3, C_6的中心线的组成成分是相同的.

47	42	34	2	60	16	65	24	**79**	**47**	61	78	2	25	33	65	43	**15**	A_5
68	**19**	81	50	37	36	5	**55**	18	9	**19**	32	72	37	14	54	**55**	77	⑨ B_6 C_6
8	57	**13**	71	21	76	**53**	39	31	66	44	**13**	48	62	76	**3**	26	31	⑩ B_3 C_3
52	38	33	**7**	56	**15**	70	20	78	52	60	74	**7**	24	**29**	70	42	11	
72	23	73	54	**41**	28	9	59	10	1	23	36	64	**41**	18	46	59	81	
4	62	12	**67**	26	**75**	49	44	30	71	40	12	**53**	58	**75**	8	22	30	B_1 B_8
51	43	**29**	6	61	11	**69**	25	74	51	56	**79**	6	20	34	**69**	38	16	369
64	**27**	77	46	45	32	1	**63**	14	5	**27**	28	68	45	10	50	**63**	73	20049
3	58	17	66	22	80	48	40	**35**	**67**	39	17	49	57	80	4	21	**35**	1225449
63	74	31	54	2	22	18	38	**67**	**63**	40	20	54	76	65	18	4	**29**	A_6
48	**7**	23	12	43	68	57	**79**	32	14	**7**	30	59	43	21	50	**79**	66	⑪ B_6 C_6
17	37	**69**	62	73	33	**53**	1	24	46	80	**69**	10	8	33	**55**	44	24	⑫ B_3 C_3
56	76	36	**47**	4	**27**	11	40	72	56	45	22	**47**	81	**67**	11	9	31	
52	5	21	16	**41**	66	61	77	30	12	5	34	57	**41**	25	48	77	70	
10	42	71	**55**	78	**35**	46	6	26	51	73	71	**15**	1	**35**	60	37	26	B_8 B_1
58	81	**29**	49	9	20	**13**	45	65	58	38	**27**	49	74	72	**13**	2	36	369
50	**3**	25	14	39	70	59	**75**	34	16	**3**	32	61	39	23	52	**75**	68	20049
15	44	64	60	80	28	51	8	**19**	**53**	78	64	17	6	28	62	42	**19**	1225449

甲类(4)以α_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3), β_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7)为行列序构作分段为:

1	1	2	8	9	7	4	5	6	3	A_7
2	10	11	17	18	16	13	14	15	12	
5	37	38	44	45	43	40	41	42	39	
8	64	65	71	72	70	67	68	69	66	
9	73	74	80	81	79	76	77	78	75	
3	19	20	26	27	25	22	23	24	21	
6	46	47	53	54	52	49	50	51	48	
4	28	29	35	36	34	31	32	33	30	
7	55	56	62	63	61	58	59	60	57	A_8

1	1	2	5	8	9	3	6	4	7
2	10	11	14	17	18	12	15	13	16
8	64	65	68	71	72	66	69	67	70
9	73	74	77	80	81	75	78	76	79
7	55	56	59	62	63	57	60	58	61
4	28	29	32	35	36	30	33	31	34
5	37	38	41	44	45	39	42	40	43
6	46	47	50	53	54	48	51	49	52
3	19	20	23	26	27	21	24	22	25

1	2	8	9	7	4	5	6	3	B_1
11	17	18	16	13	14	15	12	10	
44	45	43	40	41	42	39	37	38	
72	70	67	68	69	66	64	65	71	
79	76	77	78	75	73	74	80	81	
22	23	24	21	19	20	26	27	25	
50	51	48	46	47	53	54	52	49	
33	30	28	29	35	36	34	31	32	
57	55	56	62	63	61	58	59	60	

B_8	1	2	5	8	9	3	6	4	7
	16	10	11	14	17	18	12	15	13
	67	70	64	65	68	71	72	66	69
	78	76	79	73	74	77	80	81	75
	57	60	58	61	55	56	59	62	63
	36	30	33	31	34	28	29	32	35
	44	45	39	42	40	43	37	38	41
	50	53	54	48	51	49	52	46	47
	20	23	26	27	21	24	22	25	19

1	2	8	9	7	4	5	6	3	B_8
12	10	11	17	18	16	13	14	15	
42	39	37	38	44	45	43	40	41	
68	69	66	64	65	71	72	70	67	
76	77	78	75	73	74	80	81	79	
25	22	23	24	21	19	20	26	27	
54	52	49	50	51	48	46	47	53	
35	36	34	31	32	33	30	28	29	
56	62	63	61	58	59	60	57	55	

B_1	1	2	5	8	9	3	6	4	7
	11	14	17	18	12	15	13	16	10
	68	71	72	66	69	67	70	64	65
	80	81	75	78	76	79	73	74	77
	63	57	60	58	61	55	56	59	62
	30	33	31	34	28	29	32	35	36
	42	40	43	37	38	41	44	45	39
	49	52	46	47	50	53	54	48	51
	25	19	20	23	26	27	21	24	22

甲: (1)(2)(3)(4)都是以 41 为中心, 以线对

3 15 27 41 55 67 79 53 29   369   20049   1225449

7 13 19 41 63 69 75 47 35   369   20049   1225449

为主对角线的 3 次特优的 9 阶完美幻方. 若以其中如 45, 43 等为中心, 则得 1 次和 369, 2 次和 20049 的 2 次特优的 9 阶完美幻方.

13	21	8	76	57	71	31	39	**53**
73	**63**	68	28	45	50	10	**27**	5
34	42	**47**	16	24	2	**79**	60	65
12	26	4	**75**	62	**67**	30	44	49
81	59	64	36	**41**	46	18	23	1
33	38	52	**15**	20	**7**	78	56	70
17	22	**3**	80	58	66	**35**	40	48
77	**55**	72	32	37	54	14	**19**	9
29	43	51	11	25	6	74	61	**69**

13	44	66	76	26	48	31	62	**3**
32	**63**	1	14	45	64	77	**27**	46
78	25	**47**	33	61	2	**15**	43	65
12	40	71	**75**	22	**78**	30	58	8
28	59	9	10	**41**	72	73	23	54
74	24	52	**29**	60	**7**	11	42	70
17	39	**67**	80	21	49	**35**	57	4
36	**55**	5	18	37	68	81	**19**	50
79	20	51	34	56	6	16	38	**69**

A_7
⑬ B_3 C_3
⑭ B_6 C_6

B_1 B_8
369
20049
1225449

47	81	22	56	9	31	11	45	**67**
57	**7**	32	12	43	68	48	**79**	23
10	44	**69**	46	80	24	**55**	8	33
54	76	20	**63**	4	**29**	18	40	65
61	5	30	16	**41**	66	52	77	21
17	42	64	**53**	78	**19**	62	6	28
49	74	**27**	58	2	36	**13**	38	72
59	**3**	34	14	39	70	50	**75**	25
15	37	71	51	73	26	60	1	**35**

47	40	36	56	76	72	11	4	**27**
14	**7**	21	50	43	30	59	**79**	66
62	73	**69**	17	1	24	**53**	37	33
54	38	31	**63**	74	**67**	18	2	22
12	5	25	48	**41**	34	57	77	70
60	80	64	**15**	8	**19**	51	44	28
49	45	**29**	58	81	65	**13**	9	20
16	**3**	23	52	39	32	61	**75**	68
55	78	71	10	6	26	46	42	**35**

A_8
⑮ B_6 C_6
⑯ B_3 C_3

B_8 B_1
369
20049
1225449

乙类:

$$
\begin{array}{lll}
乙① & \alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3), & \beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7),\\
乙② & \alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4), & \beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5),\\
乙③ & \alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4), & \beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3),\\
乙④ & \alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3), & \beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5).
\end{array}
\qquad (25)
$$

1	1	2	4	5	6	8	9	7	3	1	1	2	5	8	9	3	6	4	7	乙①
2	10	11	13	14	15	17	18	16	12	2	10	11	14	17	18	12	15	13	16	
5	37	38	40	41	42	44	45	43	39	4	28	29	32	35	36	30	33	31	34	
8	64	65	67	68	69	71	72	70	66	5	37	38	41	44	45	39	42	40	43	
9	73	74	76	77	78	80	81	79	75	6	46	47	50	53	54	48	51	49	52	
3	19	20	22	23	24	26	27	25	21	8	64	65	68	71	72	66	69	67	70	
6	46	47	49	50	51	53	54	52	48	9	73	74	77	80	81	75	78	76	79	
4	28	29	31	32	33	35	36	34	30	7	55	56	59	62	63	57	60	58	61	
7	55	56	58	59	60	62	63	61	57	3	19	20	23	26	27	21	24	22	25	
1	1	2	3	5	7	8	9	6	4	1	1	2	3	6	4	7	8	9	5	乙②
2	10	11	12	14	16	17	18	15	13	2	10	11	12	15	13	16	17	18	14	
3	19	20	21	23	25	26	27	24	22	3	19	20	21	24	22	25	26	27	23	
6	46	47	48	50	52	53	54	51	49	5	37	38	39	42	40	43	44	45	41	
4	28	29	30	32	34	35	36	33	31	7	55	56	57	60	58	61	62	63	59	
7	55	56	57	59	61	62	63	60	58	8	64	65	66	69	67	70	71	72	68	
8	64	65	66	68	70	71	72	69	67	9	73	74	75	78	76	79	80	81	77	
9	73	74	75	77	79	80	81	78	76	6	46	47	48	51	49	52	53	54	50	
5	37	38	39	41	43	44	45	42	40	4	28	29	30	33	31	34	35	36	32	
1	1	2	8	9	6	3	5	7	4	1	1	2	5	8	9	7	6	4	3	乙③
2	10	11	17	18	15	12	14	16	13	2	10	11	14	17	18	16	15	13	12	
5	37	38	44	45	42	39	41	43	40	8	64	65	68	71	72	70	69	67	66	
8	64	65	71	72	69	66	68	70	67	9	73	74	77	80	81	79	78	76	75	
9	73	74	80	81	78	75	77	79	76	6	46	47	50	53	54	52	51	49	48	
7	55	56	62	63	60	57	59	61	58	3	19	20	23	26	27	25	24	22	21	
6	46	47	53	54	51	48	50	52	49	5	37	38	41	44	45	43	42	40	39	
4	28	29	35	36	33	30	32	34	31	7	55	56	59	62	63	61	60	58	57	
3	19	20	26	27	24	21	23	25	22	4	28	29	32	35	36	34	33	31	30	
1	1	2	8	9	7	4	5	6	3	1	1	2	7	6	4	3	8	9	5	乙④
2	10	11	17	18	16	13	14	15	12	2	10	11	16	15	13	12	17	18	14	
7	55	56	62	63	61	58	59	60	57	8	64	65	70	69	67	66	71	72	68	
6	46	47	53	54	52	49	50	51	48	9	73	74	79	78	76	75	80	81	77	
4	28	29	35	36	34	31	32	33	30	7	55	56	61	60	58	57	62	63	59	
3	19	20	26	27	25	22	23	24	21	4	28	29	34	33	31	30	35	36	32	
8	64	65	71	72	70	67	68	69	66	5	37	38	43	42	40	39	44	45	41	
9	73	74	80	81	79	76	77	78	75	6	46	47	52	51	49	48	53	54	50	
5	37	38	44	45	43	40	41	42	39	3	19	20	25	24	22	21	26	27	23	

各列和方中心线及其次和:

B_4	6	12	27	47	35	55	70	76	41, B_7	7	15	20	41	62	67	75	46	36	369	19725	1185597
B_2	8	15	19	48	34	63	67	74	41, B_5	3	18	24	41	58	64	79	47	35	369	19725	1185597
B_7	2	13	27	52	30	55	69	80	41, B_4	7	10	22	41	60	72	75	53	29	369	20373	1265301
B_5	4	16	19	53	29	63	66	78	41, B_2	3	13	26	41	56	69	79	54	28	369	20373	1265301
B_1	7	17	27	51	31	55	65	75	41, B_1	7	17	27	41	55	65	75	51	31	369	19185	
B_8	3	11	19	49	33	63	71	79	41, B_8	3	11	19	41	63	71	79	49	33	369	20913	

16	42	65	79	24	47	34	60	**2**	乙①	**29**	45	49	65	81	58	20	9	**13**	乙①
28	**63**	5	10	45	68	73	**27**	50		21	**7**	14	30	43	50	66	**79**	59	
76	21	**53**	31	57	8	**13**	39	71	B_6	64	80	**60**	19	8	15	**28**	44	51	B_3
15	38	70	**78**	20	**52**	33	56	7	C_3	36	40	47	**72**	76	**56**	27	4	11	C_6
36	59	1	18	**41**	64	81	23	46		25	5	12	34	**41**	48	70	77	57	
75	26	49	**30**	62	**4**	12	44	67	369	71	78	55	**26**	6	**10**	35	42	46	369
11	43	**69**	74	25	51	**29**	61	6	20373	31	38	**54**	67	74	63	**22**	2	18	20373
32	**55**	9	14	37	72	77	**19**	54	1265301	23	**3**	16	32	39	52	68	**75**	61	1265301
80	22	48	35	58	3	17	40	**66**		**69**	73	62	24	1	17	33	37	**53**	
4	62	12	67	26	75	49	44	**30**	乙②	**10**	6	35	46	78	71	55	42	**26**	乙②
68	**19**	81	50	37	36	5	**55**	18		50	75	70	59	39	25	14	**3**	34	
51	43	**29**	6	61	11	**69**	25	74	B_3	63	38	**22**	18	2	31	**54**	74	67	B_6
3	58	17	**66**	22	**80**	48	40	35	C_6	17	1	33	**53**	73	**69**	62	37	24	C_3
72	23	73	54	**41**	28	9	59	10	B_5	52	77	66	61	**41**	21	16	5	30	B_2
47	42	34	**2**	60	**16**	65	24	79	B_7	58	45	20	**13**	9	**29**	49	81	65	B_4
8	57	**13**	71	21	76	**53**	39	31	369	15	8	**28**	51	80	64	**60**	44	19	369
64	**27**	77	46	45	32	1	**63**	14	20373	48	**79**	68	57	43	23	12	**7**	32	20373
52	38	33	7	56	15	70	20	**78**	1265301	**56**	40	27	11	4	36	47	76	**72**	1265301
16	42	65	79	60	47	34	24	**2**	乙③	**22**	38	63	31	2	18	67	74	**54**	乙③
36	**19**	5	18	37	68	81	**55**	50		70	**75**	50	25	39	59	34	**3**	14	
76	57	**53**	31	21	8	**13**	39	71		35	6	**10**	71	78	46	**26**	42	55	
15	38	70	**78**	56	**52**	33	20	7		20	45	58	**29**	9	**13**	65	81	49	
28	23	9	10	**41**	72	73	59	54	369	66	77	52	21	**41**	61	30	5	16	369
75	62	49	**30**	26	**4**	12	44	67	20373	33	1	17	**69**	73	**53**	24	37	62	20373
11	43	**69**	74	61	51	**29**	25	6	1265301	27	40	**56**	36	4	11	**72**	76	47	1265301
32	**27**	1	14	45	64	77	**63**	46		68	**79**	48	23	43	57	32	**7**	12	
80	58	48	35	22	3	17	40	**66**		**28**	8	15	64	80	51	19	44	**60**	
16	60	47	34	24	65	79	42	**2**	乙④	**22**	2	18	67	74	63	31	38	**54**	乙④
32	**19**	72	77	37	9	14	**55**	54		68	**75**	61	32	39	52	23	**3**	16	
75	44	**4**	12	62	49	**30**	26	67		33	37	**53**	24	1	17	**69**	73	62	
11	61	51	**29**	25	**69**	74	43	6		27	4	11	**72**	76	**56**	36	40	47	
36	23	64	81	**41**	1	18	59	46	369	70	77	57	34	**41**	48	25	5	12	369
76	39	8	**13**	57	**53**	31	21	71	20373	35	42	46	**26**	6	**10**	71	78	55	20373
15	56	**52**	33	20	70	**78**	38	7	1265301	20	9	**13**	65	81	58	**29**	45	49	1265301
28	**27**	68	73	45	5	10	**63**	50		66	**79**	59	30	43	50	21	**7**	14	
80	40	3	17	58	48	35	22	**66**		**28**	44	51	19	8	15	64	80	**60**	

12	40	71	75	22	53	30	58	**8**		**67**	81	56	22	9	11	31	45	**47**	
36	**55**	5	18	37	68	81	**19**	50	B_3	23	**7**	12	32	43	48	68	**79**	57	B_6
78	25	**47**	33	61	2	**15**	43	65	C_6	33	44	**46**	69	80	55	**24**	8	10	C_3
13	44	66	**76**	26	**48**	31	62	3		65	76	63	**20**	4	**18**	29	40	54	
28	59	9	10	**41**	72	73	23	54		21	5	16	30	**41**	52	66	77	61	
79	20	51	**34**	56	**6**	16	38	69	369	28	42	53	**64**	78	**62**	19	6	17	369
17	39	**67**	80	21	49	**35**	57	4	19725	72	74	**58**	27	2	13	**36**	38	49	19725
32	**63**	1	14	45	64	77	**27**	46	1185597	25	**3**	14	34	39	50	70	**75**	59	1185597
74	24	52	29	60	7	11	42	**70**		**35**	37	51	71	73	60	26	1	**15**	
12	22	53	30	58	71	75	40	**8**		**58**	2	72	13	74	27	49	38	**36**	
32	**55**	72	77	37	9	14	**19**	54	B_6	14	**79**	21	50	43	30	59	**7**	66	B_6
79	38	**6**	16	20	51	**34**	56	69	C_3	51	37	**35**	60	1	71	**15**	73	26	C_3
17	21	49	**35**	57	**67**	80	39	4	B_2	63	4	65	**18**	76	**20**	54	40	29	B_5
36	59	64	81	**41**	1	18	23	46	B_4	12	77	25	48	**41**	34	57	5	70	B_7
78	43	2	**15**	25	**47**	33	61	65		53	42	28	**62**	6	**64**	17	78	19	
13	26	**48**	31	62	66	**76**	44	3	369	56	9	**67**	11	81	22	**47**	45	31	369
28	**63**	68	73	45	5	10	**27**	50	19725	16	**75**	23	52	39	32	61	**3**	68	19725
74	42	7	11	24	52	29	60	**70**	1185597	**46**	44	33	55	8	69	10	80	**24**	1185597
12	40	71	75	58	53	30	22	**8**		**24**	44	55	33	8	10	69	80	**46**	
28	**27**	5	10	45	68	73	**63**	50		66	**79**	50	21	43	59	30	**7**	14	
78	61	**47**	33	25	2	**15**	43	65		29	4	**18**	65	76	54	**20**	40	63	
13	44	66	**76**	62	**48**	31	26	3		26	37	60	**35**	1	**15**	71	73	51	
36	23	1	18	**41**	64	81	59	46	369	70	77	48	25	**41**	57	34	5	12	369
79	56	51	**34**	20	**6**	16	38	69	19725	31	9	11	**67**	81	**47**	22	45	56	19725
17	39	**67**	80	57	49	**35**	21	4	1185597	19	42	**62**	28	6	17	**64**	78	53	1185597
32	**19**	9	14	37	72	77	**55**	54		68	**75**	52	23	39	61	32	**3**	16	
74	60	52	29	24	7	11	42	**70**		**36**	2	13	72	74	49	27	38	**58**	
12	58	53	30	22	71	75	40	**8**		**24**	8	10	69	80	55	33	44	**46**	
32	**27**	64	77	45	1	14	**63**	46		68	**79**	57	32	43	48	23	**7**	12	
79	38	**6**	16	56	51	**34**	20	69		31	45	**47**	22	9	11	**67**	81	56	
17	57	49	**35**	21	**67**	80	39	4	369	19	6	17	**64**	78	**62**	28	42	53	369
28	23	72	73	**41**	9	10	59	54	19725	66	77	61	30	**41**	52	21	5	16	19725
78	43	2	**15**	61	**47**	33	25	65	1185597	29	40	54	**20**	4	**18**	65	76	63	1185597
13	62	**48**	31	26	66	**76**	44	3		26	1	**15**	71	73	60	**35**	37	51	
36	**19**	68	81	37	5	18	**55**	50		70	**75**	59	34	39	50	25	**3**	14	
74	60	52	29	24	7	11	42	**70**		**36**	2	13	72	74	49	27	38	**58**	

各分段方的 B_3, B_6, C_3, C_6 之中心线是相同的:

B_3	9	10	23	54	28	59	72	73	41, 20085	5	12	25	41	57	70	77	48	34,	20013
B_6	1	18	23	46	36	59	64	81	41, 20085	5	16	21	41	61	66	77	52	30,	20013
C_3	25	62	45	24	58	37	20	57	41, 17133	1	76	41	6	81	39	8	74	43,	22965
C_6	22	61	37	26	56	45	21	60	41, 19133	2	73	41	9	80	43	4	78	39,	22965

乙类排列组合, 各得 4 个有如下 4 组线对为主对角线的 3 次特优 9 阶完美幻方:

3	18	24	35	41	47	58	64	79,	3	13	26	28	41	54	56	69	79,
7	15	20	36	41	46	62	67	75,	7	10	22	29	41	53	60	72	75,
6	12	27	35	41	47	55	70	76,	2	13	27	30	41	52	55	69	80,
8	15	19	34	41	48	63	67	74,	4	16	19	29	41	53	63	66	78.
			369		19725		1185597					369		20373		1265301	

	丙	丁
①	$\alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3)$, $\beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5)$,	$\alpha_1(1,2,4,5,6,8,9,7,3)$, $\beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)$,
②	$\alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4)$, $\beta_2(1,2,7,6,4,3,8,9,5)$,	$\alpha_2(1,2,3,5,7,8,9,6,4)$, $\beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7)$,
③	$\alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4)$, $\beta_3(1,2,5,8,9,3,6,4,7)$,	$\alpha_3(1,2,8,9,6,3,5,7,4)$, $\beta_4(1,2,7,6,4,3,8,9,5)$,
④	$\alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3)$, $\beta_4(1,2,5,8,9,7,6,4,3)$,	$\alpha_4(1,2,8,9,7,4,5,6,3)$, $\beta_1(1,2,3,6,4,7,8,9,5)$.

通过计算, 丙、丁类无 3 次特优的完美幻方. (26)

由此可见在对称的 9 阶完美幻方中, 只在甲、乙两类可得总共 32 个 3 次特优的 9 阶完美幻方. 而且只有如前所述 5 对特优对角线组.

三、27 阶完美幻方

$$n=27=3^3,\ 27^2=729,\ \mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,729\},\ \Sigma_{27}=9855.$$
$$1+2+3+\cdots+27=27\times14=9\times42=3\times126.$$

3×9 等列阵:

A_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	14	18	13	17	12	16	11	15	10		18	13	17	12	16	11	15	10	14
	27	22	26	21	25	20	24	19	23		23	27	22	26	21	25	20	24	19
Σ				42										42					

(28)

从而得可幻排列:

$\pi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8,9;14,18,13,17,12,16,11,15,10;27,22,26,21,25,20,24,19,23)$,

$\pi_2=(1,2,3,4,5,6,7,8,9;18,13,17,12,16,11,15,10,14;23,27,22,26,21,25,20,24,19)$. (29)

例 1 1. 首先给出以 π_1 为 27 阶分段方的行序、列序构作分段方 A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	18	13	17	12	16	11	15	10	27	22	26	21	25	20	24	19	23
28	29	30	31	32	33	34	35	36	41	45	40	44	39	43	38	42	37	54	49	53	48	52	47	51	46	50
55	56	57	58	59	60	61	62	63	68	72	67	71	66	70	65	69	64	81	76	80	75	79	74	78	73	77
82	83	84	85	86	87	88	89	90	95	99	94	98	93	97	92	96	91	108	103	107	102	106	101	105	100	104
109	110	111	112	113	114	115	116	117	122	126	121	125	120	124	119	123	118	135	130	134	129	133	128	132	127	131
136	137	138	139	140	141	142	143	144	149	153	148	152	147	151	146	150	145	162	157	161	156	160	155	159	154	158
163	164	165	166	167	168	169	170	171	176	180	175	179	174	178	173	177	172	189	184	188	183	187	182	186	181	185
190	191	192	193	194	195	196	197	198	203	207	202	206	201	205	200	204	199	216	211	215	210	214	209	213	208	212
217	218	219	220	221	222	223	224	225	230	234	229	233	228	232	227	231	226	243	238	242	237	241	236	240	235	239
352	353	354	355	356	357	358	359	360	365	369	364	368	363	367	362	366	361	378	373	377	372	376	371	375	370	374
460	461	462	463	464	465	466	467	468	473	477	472	476	471	475	470	474	469	486	481	485	480	484	479	483	478	482
325	326	327	328	329	330	331	332	333	338	342	337	341	336	340	335	339	334	351	346	350	345	349	344	348	343	347
433	434	435	436	437	438	439	440	441	446	450	445	449	444	448	443	447	442	459	454	458	453	457	452	456	451	455
298	299	300	301	302	303	304	305	306	311	315	310	314	309	313	308	312	307	324	319	323	318	322	317	321	316	320
406	407	408	409	410	411	412	413	414	419	423	418	422	417	421	416	420	415	432	427	431	426	430	425	429	424	428
271	272	273	274	275	276	277	278	279	284	288	283	287	282	286	281	285	280	297	292	296	291	295	290	294	289	293
379	380	381	382	383	384	385	386	387	392	396	391	395	390	394	389	393	388	405	400	404	399	403	398	402	397	401
244	245	246	247	248	249	250	251	252	257	261	256	260	255	259	254	258	253	270	265	269	264	268	263	267	262	266
703	704	705	706	707	708	709	710	711	716	720	715	719	714	718	713	717	712	729	724	728	723	727	722	726	721	725
568	569	570	571	572	573	574	575	576	581	585	580	584	579	583	578	582	577	594	589	593	588	592	587	591	586	590
676	677	678	679	680	681	682	683	684	689	693	688	692	687	691	686	690	685	702	697	701	696	700	695	699	694	698
541	542	543	544	545	546	547	548	549	554	558	553	557	552	556	551	555	550	567	562	566	561	565	560	564	559	563
649	650	651	652	653	654	655	656	657	662	666	661	665	660	664	659	663	658	675	670	674	669	673	668	672	667	671
514	515	516	517	518	519	520	521	522	527	531	526	530	525	529	524	528	523	540	535	539	534	538	533	537	532	536
622	623	624	625	626	627	628	629	630	635	639	634	638	633	637	632	636	631	648	643	647	642	646	641	645	640	644
487	488	489	490	491	492	493	494	495	500	504	499	503	498	502	497	501	496	513	508	512	507	511	506	510	505	509
595	596	597	598	599	600	601	602	603	608	612	607	611	606	610	605	609	604	621	616	620	615	619	614	618	613	617

A

2. 再对 A 执行行、列 Z 变换得列、行和方，并给出各列、行和方的第一列.

B_{1} :1 29 57 85 113 141 169 197 225 365 477 337 449 309 421 281 393 253
729 589 701 561 673 533 645 505 617

B_{10}:1 45 80 85 120 155 169 204 239 365 481 327 449 322 411 281 397 252
729 569 688 561 653 529 645 494 604

B_{19}:1 49 67 85 466 151 169 208 226 365 461 350 449 302 425 281 386 266
729 585 678 561 660 519 645 501 603

B_{4} :1 32 63 98 123 161 186 191 222 365 471 334 453 316 408 277 396 259
729 592 698 544 656 526 632 508 614

B_{13}:1 39 77 98 127 148 186 207 236 365 484 333 453 305 431 277 400 249
729 572 685 544 663 516 632 488 610

B_{22}:1 52 64 98 116 138 186 211 232 365 464 347 453 312 418 277 380 263
729 579 684 544 667 539 632 504 600

B_{7} :1 35 70 102 110 144 173 214 219 365 474 344 436 315 415 294 383 256
729 586 681 557 670 536 628 498 620

B_{16}: 1 42 60 102 126 158 173 194 242 365 478 340 436 319 414 294 390 246
729 575 695 557 650 523 628 511 607

B_{25}: 1 46 74 102 130 145 173 201 229 365 467 330 436 299 428 294 403 269
729 582 691 557 666 522 628 491 597

B_{5} :1 33 72 92 134 154 166 198 228 378 479 326 439 310 420 291 401 248
716 583 697 564 651 521 638 496 619

B_{14}:1 43 56 92 111 150 166 199 221 378 465 346 439 323 413 291 387 268
716 587 693 564 661 532 638 509 606

B_{23}: 1 47 76 92 121 143 166 212 241 378 475 342 439 300 424 291 388 255
716 573 677 564 674 528 638 495 599

B_{8} : 1 36 69 105 114 147 183 192 234 378 482 332 443 317 410 287 404 245
716 577 694 547 664 538 625 499 616

B_{17}: 1 37 62 105 124 140 183 202 218 378 468 343 443 303 430 287 381 265
716 590 690 547 668 525 625 512 612

B_{26}: 1 50 73 105 128 160 183 215 238 378 469 339 443 313 417 287 391 261
716 576 683 547 654 518 625 489 596

B_{2} : 1 30 59 88 117 153 179 205 231 378 485 349 456 320 407 274 384 251
716 580 687 551 658 535 642 506 613

B_{11}:1 40 79 88 118 137 179 209 224 378 462 336 456 306 427 274 394 262
716 593 680 551 671 531 642 492 609

B_{20}: 1 53 66 88 131 157 179 195 235 378 472 329 456 307 423 274 398 258
716 570 700 551 657 515 642 502 602

B_{3} : 1 31 61 95 125 146 189 210 240 352 463 331 446 314 416 297 399 267
703 571 682 554 665 524 648 507 618

B_{12}: 1 44 78 95 129 142 189 193 227 352 476 348 446 318 412 297 382 254
703 584 699 554 669 520 648 490 605

B_{21}: 1 48 65 95 112 159 189 206 223 352 480 335 446 301 429 297 395 250
703 588 686 554 652 537 648 503 601

B_{6} :1 34 71 108 132 139 176 200 237 352 466 341 459 321 409 284 389 264
703 574 692 567 672 517 635 497 615

B_{15}: 1 38 58 108 115 156 176 213 233 352 470 328 459 304 426 284 402 260
703 578 679 567 655 534 635 510 611

B_{24}: 1 51 75 108 119 152 176 196 220 352 483 345 459 308 422 284 385 247
703 591 696 567 659 530 635 493 598

$\boldsymbol{B}_9$:1 41 81 82 122 162 163 203 243 352 473 351 433 311 432 271 392 270
703 581 702 541 662 540 622 500 621

$\boldsymbol{B}_{18}$:1 54 68 82 135 149 163 216 230 352 486 338 433 324 419 271 405 257
703 594 689 541 675 527 622 513 608

$\boldsymbol{C}_3$:1 83 165 355 437 276 709 548 630 14 99 175 368 444 286 713 555 631
27 103 188 372 457 290 726 559 644

$\boldsymbol{C}_{12}$:1 89 168 355 434 279 709 545 624 14 96 178 368 450 280 713 552 634
27 100 182 372 45 4 293 726 565 647

$\boldsymbol{C}_{21}$:1 86 171 355 440 273 709 542 627 14 93 172 368 447 283 713 558 637
27 106 185 372 451 296 726 562 641

$\boldsymbol{C}_6$:1 87 164 358 435 278 706 549 626 14 97 180 362 445 285 719 550 633
27 101 184 375 458 289 723 646 563

$\boldsymbol{C}_{15}$:1 84 167 358 441 272 706 546 629 14 94 174 362 442 288 719 556 636
27 107 187 375 455 292 723 560 540

$\boldsymbol{C}_{24}$:1 90 170 358 438 275 706 543 623 14 91 177 362 448 282 719 566 639
27 104 181 375 452 295 723 553 643

$\boldsymbol{C}_9$:1 353 705 4 356 708 7 359 711 14 369 715 17 363 718 11 366 712
27 373 728 21 376 722 24 370 725

$\boldsymbol{C}_{18}$:1 354 704 4 357 707 7 360 710 14 364 720 17 367 714 11 361 717
27 377 724 21 374 727 24 371 721

3. 对列、行和方给以分类($\Sigma_{27}=9855$)如下:

(1)	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_{10}$	$\boldsymbol{B}_{19}$	$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{B}_{13}$	$\boldsymbol{B}_{22}$	$\boldsymbol{B}_7$	$\boldsymbol{B}_{16}$	$\boldsymbol{B}_{25}$	1	365	729
(2)	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{B}_{20}$	$\boldsymbol{B}_5$	$\boldsymbol{B}_{14}$	$\boldsymbol{B}_{23}$	$\boldsymbol{B}_8$	$\boldsymbol{B}_{17}$	$\boldsymbol{B}_{26}$	1	378	716
(3)	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{B}_{21}$	$\boldsymbol{B}_6$	$\boldsymbol{B}_{15}$	$\boldsymbol{B}_{24}$	$\boldsymbol{B}_9$	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{A}_1$	1	352	703
(4)	$\boldsymbol{C}_3$	$\boldsymbol{C}_{12}$	$\boldsymbol{C}_{21}$	$\boldsymbol{C}_6$	$\boldsymbol{C}_{15}$	$\boldsymbol{C}_{24}$	$\boldsymbol{C}_9$	$\boldsymbol{C}_{18}$	$\boldsymbol{A}_0$	1	14	27
同行方为同类方，不能出现在同一个 27 阶完美幻方中. 4 类方中各取其一个列、行和方，可组成一个基本的 27 阶完美幻方.												

(30)

如同 9 阶的(18)式一样，因此由这些列、行和方，即由一个可幻的分段方可构造出

$$9\times9\times8\times8=5184 \tag{31}$$

个基本的互不同构的 27 阶完美幻方. 这些列和方、行和方的分类如上述(30).下面给出一些这样的完美幻方.

4. 任取一个列和方(如 $\boldsymbol{B}_1$)依次作 Z 变换，并变为 27 阶完美幻方的行线组. 再作 Z 变换串，可得 27 阶完美幻方.

例 2 以对称排列

1	6	8	10	15	17	19	24	26	$\Sigma=126$
3	5	7	12	14	16	21	23	25	126
2	4	9	11	13	18	20	22	27	126

$$\to (1,3,2,6,5,4,8,7,9,10,12,11,15,14,13,17,16,18,\ 19,21,20,24,23,22,26,25,27) \tag{32}$$

为分段方的行、列序. 也可以同样给出分段方、列和方、完美幻方. 这时所得所有各方都是对称的. 对这个例，我们只是提一下，不做进一步的讨论.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595
3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596
4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597
5	33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598
6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599
7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600
8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542	651	517	626	492	601
9	41	72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602
14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603
18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608
13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655	521	630	500	612
17	39	70	92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607
12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611
16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606
11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526	638	498	610
15	37	81	103	134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605
10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609
27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604
22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636	496	621
26	48	79	101	132	154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616
21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620
25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615
20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	286	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507	619
24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614
19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618
23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613

B_1

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594

① 行 $\boldsymbol{B}_1$ 列 $\boldsymbol{B}_5$ Ⅰ $\boldsymbol{B}_{18}$ Ⅱ $\boldsymbol{C}_{24}$ $\Sigma_{27}=9855.$

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450

② 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_5$　Ⅰ $\boldsymbol{C}_{12}$　Ⅱ $\boldsymbol{B}_{24}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636

③ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_5$　Ⅰ $\boldsymbol{C}_{15}$　Ⅱ $\boldsymbol{B}_9$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655

④ 行$\boldsymbol{B}_1$ 列$\boldsymbol{B}_5$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{15}$ Ⅱ$\boldsymbol{C}_3$ $\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542

⑤ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_5$　Ⅰ $\boldsymbol{C}_{21}$　Ⅱ $\boldsymbol{B}_6$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382

⑥ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_5$　Ⅰ $\boldsymbol{B}_{12}$　Ⅱ $\boldsymbol{C}_9$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
228	367	470	339	442	324	427	296	399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206
401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124	146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289
638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684	554	666	526
154	185	190	218	354	463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132
310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503	618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450
564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415	297	400	269	723	592	695
72	94	125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41
479	348	451	320	406	272	381	247	707	573	682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376
716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239	352	461	327	436	302	411	277	386	252
619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647	507
198	230	369	472	341	444	313	416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170
291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63	95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431
521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705	571	680	546	655
134	156	187	209	240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103
439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523	648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330
697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445	314	417	286	389	258	712	594
33	61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5
378	481	350	453	322	425	294	397	266	703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226
248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188	210	241	371	483	343	455	298	407	273	382
496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664	524	636
166	194	222	358	467	333	446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138
420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3	31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308
651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398	267	721	590	676	542
92	123	145	189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70
326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553	665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460
583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465	331	440	306	419	288	391	260	714

⑦ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_5$　Ⅰ$\boldsymbol{C}_{18}$　Ⅱ$\boldsymbol{B}_{21}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	209
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	427	296
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313

⑧ 行 $\boldsymbol{B}_1$ 列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{C}_6$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_{26}$ $\Sigma_{27} = 9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	427	296
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	209
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33

⑨ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_5$ Ⅱ$\boldsymbol{C}_{12}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	427	296
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	209
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94

⑩行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_8$ Ⅱ$\boldsymbol{C}_{15}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	427	296
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	209

⑪ 行 $\boldsymbol{B}_1$ 列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{11}$ Ⅱ$\boldsymbol{C}_9$ $\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	206
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	467	296

⑫ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$　Ⅰ C_{21}　Ⅱ $\boldsymbol{B}_{14}$　　$\Sigma_{27} = 9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	467	296
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	206
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124

⑬ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$　Ⅰ$\boldsymbol{B}_{17}$　Ⅱ$\boldsymbol{C}_{24}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	206
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	467	296
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354

⑭ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$　Ⅰ$\boldsymbol{C}_{18}$　Ⅱ$\boldsymbol{B}_{20}$　　$\Sigma_{27}=9855$.

1	29	57	85	113	141	169	197	225	365	477	337	449	309	421	281	393	253	729	589	701	561	673	533	645	505	617
210	241	371	483	343	455	298	407	273	382	248	708	574	683	549	662	531	634	503	606	16	38	69	91	135	157	188
416	285	388	270	724	593	696	565	668	537	640	509	595	2	30	58	86	114	142	170	198	230	369	472	341	444	313
554	666	526	638	498	610	11	42	64	108	130	161	183	214	236	375	478	347	433	299	408	274	383	249	709	575	684
31	59	87	115	143	171	203	234	364	476	336	448	308	420	280	405	265	728	588	700	560	672	532	644	487	596	3
240	370	482	325	434	300	409	275	384	250	710	576	689	558	661	530	633	502	605	15	37	81	103	134	156	187	206
297	400	269	723	592	695	564	667	536	622	488	597	4	32	60	88	116	144	176	207	229	368	471	340	443	312	415
665	525	637	497	609	10	54	76	107	129	160	182	213	235	374	460	326	435	301	410	276	385	251	711	581	693	553
61	89	117	149	180	202	233	363	475	335	447	307	432	292	404	264	727	587	699	559	671	514	623	489	598	5	33
352	461	327	436	302	411	277	386	252	716	585	688	557	660	529	632	501	604	27	49	80	102	133	155	186	208	239
399	268	722	591	694	563	649	515	624	490	599	6	34	62	90	122	153	175	206	228	367	470	339	442	324	467	296
524	636	496	621	22	53	75	106	128	159	181	212	217	353	462	328	437	303	412	278	387	257	720	580	692	552	664
95	126	148	179	201	232	362	474	334	459	319	431	291	403	263	726	586	698	541	650	516	625	491	600	7	35	63
463	329	438	304	413	279	392	261	715	584	687	556	659	528	631	513	616	26	48	79	101	132	154	185	190	218	354
267	721	590	676	542	651	517	626	492	601	8	36	68	99	121	152	174	205	227	366	469	351	454	323	426	295	398
648	508	620	21	52	74	105	127	158	163	191	219	355	464	330	439	305	414	284	396	256	719	579	694	551	663	523
125	147	178	200	231	361	486	346	458	318	430	290	402	262	725	568	677	543	652	518	627	493	602	9	41	72	94
331	440	306	419	288	391	260	714	583	686	555	658	540	643	512	615	25	47	78	100	131	136	164	192	220	356	465
703	569	678	544	653	519	628	494	603	14	45	67	98	120	151	173	204	226	378	481	350	453	322	425	294	397	266
507	619	20	51	73	104	109	137	165	193	221	357	466	332	441	311	423	283	395	255	718	578	690	550	675	535	647
146	177	199	243	373	485	345	457	317	429	289	401	244	704	570	679	545	654	520	629	495	608	18	40	71	93	124
446	315	418	287	390	259	713	582	685	567	670	539	642	511	614	24	46	77	82	110	138	166	194	222	358	467	333
571	680	546	655	521	630	500	612	13	44	66	97	119	150	172	216	238	377	480	349	452	321	424	293	379	245	705
618	19	50	55	83	111	139	167	195	223	359	468	338	450	310	422	282	394	254	717	577	702	562	674	534	646	503
189	211	242	372	484	344	456	316	428	271	380	246	706	572	681	547	656	522	635	504	607	17	39	70	92	123	145
314	417	286	389	258	712	594	697	566	669	538	641	510	613	23	28	56	84	112	140	168	196	224	360	473	342	445
682	548	657	527	639	499	611	12	43	65	96	118	162	184	215	237	376	479	348	451	320	406	272	381	247	707	573

⑮ 行 $\boldsymbol{B}_1$　列 $\boldsymbol{B}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{23}$ Ⅱ$\boldsymbol{C}_3$　$\Sigma_{27}=9855$.

结论:

当行、列线组均为①、②类时, 对角线组为③、④类, 可产生: 7× 9 + 1 = 64 个 27 阶完美幻方;

当行、列线组一组各为①、②类之一时, 也可产生: 8×8= 64 个 27 阶完美幻方;

当行、列线组均为③、④类, 对角线组为①、②类时, 可产生: 9× 9 = 81 个 27 阶完美幻方.

因此, 一个可幻的 27 阶分段方可产生: 9×(3×64 + 81×8)=7560 个 27 阶完美幻方.

第 8 章　3 因数奇阶完美幻方

一、可幻 15 级排列

除 9 阶外，现在对一般的含因数 3 的奇阶完美幻方进行研究. 设 $n=3r$, r 奇数. 因为

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} = 3r\frac{3r+1}{2} \qquad 2|3r+1. \tag{1}$$

对任意的 n 级排列 $\pi=(i_1, i_2, i_3,\cdots, i_{3r})$, $i_j=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,n$. 可处理成 $3r$ 等行、等列阵:

$$\begin{matrix} i_1 & i_{2r+2} & i_{r+3} & i_4 & i_{2r+5} & \cdots & i_{2r-1} & i_r \\ i_{r+1} & i_2 & i_{2r+3} & i_{r+4} & i_5 & \cdots & i_{3r-1} & i_{2r} \\ i_{2r+1} & i_{r+2} & i_3 & i_{2r+4} & i_{r+5} & \cdots & i_{r-1} & i_{3r} \end{matrix} \tag{2}$$

各行和 Σ:　　$r(3r+1)\div 2$
各列和 Σ:　　$3(3r+1)\div 2$

当 n 级排列 π 满足可幻条件:

(1) $i_1+i_{r+1}+i_{2r+1}=i_2+i_{r+2}+i_{2r+2}=\cdots=i_r+i_{2r}+i_{3r}=3(3r+1)\div 2$; (3)

(2) $i_1+i_4+i_7+\cdots+i_{3r-2}=i_2+i_5+i_8+\cdots+i_{3r-1}$
$=i_3+i_6+i_9+\cdots+i_{3r}=r(3r+1)\div 2$ (4)

则称 π 为可幻的 n 级排列. 若 π 还满足对称性条件:

(3) $i_1+i_{3r}=i_2+i_{3r-1}=\cdots=2i_{3r+1/2}=3r+1=n+1$ (5)

则称 π 是对称的 n 级可幻排列.

$n=3r$ 之 r 可分为两种情形:

① r 全是 3 因数组成, 如 $n=9,27,81,\cdots$. 此时, 可幻条件(1), (2)合并成(1). 如前面所示;

② r 还含有非 3 的奇因数, 如 $n=15,21,33,39,\cdots,63,\cdots,105,\cdots$ 等. 此时, 可幻条件(1), (2)不能合并. 这里将着重对 15 阶完美幻方进行研究:

$$n=15=3\times5, \qquad 1+2+\cdots+15=3\times40=5\times24.$$
$$\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,225\} \qquad \Sigma_{15}=1695.$$
$$\pi=\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}\} \tag{6}$$
$$(i_j\in\{1,2,\cdots,15\}, j=1,2,\cdots,15.)$$

应满足条件:

(1) $i_1+i_6+i_{11}=i_2+i_7+i_{12}=i_3+i_8+i_{13}=i_4+i_9+i_{14}=i_5+i_{10}+i_{15}=24$,

(2) $i_1+i_4+i_7+i_{10}+i_{13}=i_2+i_5+i_8+i_{11}+i_{14}=i_3+i_6+i_9+i_{12}+i_{15}=40$,

和对称性条件:

(3) $i_1+i_{15}=i_2+i_{14}=\cdots=i_7+i_9=2i_8=16$;

首先, 我们要证明:

定理 1　不存在同时满足可幻条件(1), (2)和对称性条件(3)的 15 级排列.

证明　由对称性条件和可幻条件各等式有

$$\begin{aligned} &i_1-i_3+i_4-i_6+i_7=8\\ &i_1-i_5+i_6=8\\ &i_2-i_4+i_7=8\\ &i_8=8 \end{aligned}\tag{7}$$

按习惯, 可令 $i_1=1, i_2=2$. 同时, 由对称性有 $i_{15}=15, i_{14}=14$. 从而(7)化简为:

$$\begin{aligned} &i_3=2i_7-i_6-13\\ &i_4=i_7-6\\ &i_5=i_6-7 \end{aligned}\tag{8}$$

注意, 这里 i_3, i_4, i_5, i_6, i_7 只能取集合 $\mathbf{F}=\{1,2,\cdots,15\}$中数, 且各 $i_j\ (j=1,2,\cdots,15)$互不相同. 因此, 令

(1) $i_4=3$, 则　$i_7=9\ \rightarrow\ i_3=5-i_6, i_5=i_6-7$

(2) $i_4=4$, 则　$i_7=10\ \rightarrow\ i_3=7-i_6, i_5=i_6-7$

(3) $i_4=5$, 则　$i_7=11\ \rightarrow\ i_3=9-i_6, i_5=i_6-7$

(4) $i_4=6$, 则　$i_7=12\ \rightarrow\ i_3=11-i_6, i_5=i_6-7$

(5) $i_4=7$, 则　$i_7=13\ \rightarrow\ i_3=13-i_6, i_5=i_6-7$

(6) $i_4=8$, 则　$i_7=14$

(7) $i_4=9$, 则　$i_7=15$

无论哪种情形, 都不能确定互不相同的各 $i_j(j=1,2,\cdots,15)$.故不存在同时满足可幻条件(1), (2)和对称性条件(3)的 15 级可幻排列.

显然, 这个定理对一般的 $n=3r, r$ 含有非 3 因数的奇数级都是成立的.

因此, 对 15 级分段方 $\boldsymbol{A}$ 给定的 15 级排列 n_1, n_2 作为 $\boldsymbol{A}$ 的行列序, 则

(1) 对任意的 n_1, n_2, 由 $\boldsymbol{A}$ 经过行(列)Z 变换所得 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_8, \boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_{13}, \boldsymbol{B}_{14}$ 都是列和方;

(2) 当排列 n_1, n_2 满足条件(1), (2)时, $\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_6, \boldsymbol{B}_9, \boldsymbol{B}_{12}, \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_6,\boldsymbol{C}_9, \boldsymbol{C}_{12}, \boldsymbol{B}_5,\boldsymbol{B}_{10}, \boldsymbol{C}_5, \boldsymbol{C}_{10}$ 都是列(行)和方;

(3) 当排列 n_1, n_2 满足条件(1)时, $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{B}_{10}, \boldsymbol{C}_5,\boldsymbol{C}_{10}$ 都是列(行)和方;

(4) 当排列 n_1, n_2 满足条件(2)时, $\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_6, \boldsymbol{B}_9, \boldsymbol{B}_{12},\boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{C}_9, \boldsymbol{C}_{12}$, 都是列(行)和方.

因此, 可幻排列有如下几种类型:

1. 满足可幻条件(1), (2)之 15 级可幻排列π. 把π排成 3×5 列式, 应满足

$$\begin{matrix} i_1 & i_7 & i_{13} & i_4 & i_{10} & \text{各行和} & 40\\ i_{11} & i_2 & i_8 & i_{14} & i_5 & \text{各列和} & 24\\ i_6 & i_{12} & i_3 & i_9 & i_{15} & & \end{matrix}\tag{9}$$

如

$$\pi_1=(1,3,8,2,4,10,12,5,7,14,13,9,11,15,6)\tag{10}$$

满足

$$\begin{matrix} 1 & 12 & 11 & 2 & 14 & \text{各行和} & 40\\ 13 & 3 & 5 & 15 & 4 & \text{各列和} & 24\\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & & \end{matrix}$$

以排列π_1为行、列序作分段方. 并用行、列 Z 变换得幻和组, 分类如下:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{B}_{13} & \boldsymbol{B}_{10} & \boldsymbol{C}_{10} & \text{同行、同列之方同类如前.}\\ \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{14} & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_8 & \boldsymbol{C}_5 & \boldsymbol{B}_5 & \\ \boldsymbol{B}_6 & \boldsymbol{B}_9 & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_{15} & \boldsymbol{A}_1 & \\ \boldsymbol{C}_9 & \boldsymbol{C}_6 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_{12} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{C}_{15} & \end{matrix}\tag{11}$$

后面将详细研究，此类排列将产生 252 个 15 阶完美幻方.

2. 满足可幻条件(2)，对称条件(3)的可幻排列π. π作成 3×5 列式应满足:

$$\begin{matrix} i_1 & i_4 & i_7 & i_{10} & i_{13} & \text{各行和} \quad 40 \\ i_2 & i_5 & i_8 & i_{11} & i_{14} & \text{中心对称} \\ i_3 & i_6 & i_9 & i_{12} & i_{15} & \end{matrix} \tag{12}$$

如

$$\pi_2 = (1,5,4,3,7,2,10,8,6,14,9,13,12,11,15) \tag{13}$$

满足

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 10 & 14 & 12 & \text{各行和} \quad 40 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 11 & a + a' = 16 \\ 4 & 2 & 6 & 13 & 15 & \end{matrix}$$

以排列π_2为行、列序作分段方. 并用行、列 Z 变换得幻和组，分类如下:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{B}_{13} & \text{同行各方为同类方;} \\ \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{14} & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_8 & \text{同列各方为同类方.} \\ \boldsymbol{B}_6 & \boldsymbol{B}_9 & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_3 & \\ \boldsymbol{C}_6 & \boldsymbol{C}_9 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_{12} & \end{matrix} \tag{14}$$

因此，由这个分段方可得 4! = 24 个基本的 15 阶完美幻方，而且是对称的.

3. 以π_1, π_2为行，列序构作分段方，可得幻和组分类如下:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{B}_{13} & \boldsymbol{B}_{10} & \boldsymbol{C}_{10} & \text{同行、同列之方同类如前.} \\ \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{14} & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_8 & \boldsymbol{C}_5 & \boldsymbol{B}_5 & \\ \boldsymbol{B}_6 & \boldsymbol{B}_9 & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_{15} & \boldsymbol{A}_1 & \\ \boldsymbol{C}_9 & \boldsymbol{C}_6 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_{12} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{C}_{15} & \end{matrix} \tag{15}$$

故可得 4! + 3×4×3×2 = 4×4! = 96 个基本的 15 阶完美幻方，但不是对称的.

4. 满足可幻条件(1)，对称性条件(3)的排列π. π作成 3×5 列式应满足

$$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & \text{各列和} \quad 24 \\ i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & \text{中心对称} \\ i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & \end{matrix} \tag{16}$$

如

$$\pi_3 = (1,4,2,5,3,10,9,8,7,6,13,11.14,12,15) \tag{17}$$

满足

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & \text{各列和} \quad 24 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & a + a' = 16 \\ 13 & 11 & 14 & 12 & 15 & \end{matrix}$$

以π_3为行、列序构作分段方，可得幻和组. 其分类如下

$$\begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_7 & \boldsymbol{B}_{13} & \boldsymbol{B}_{10} & \boldsymbol{C}_{10} & \text{同行，同列之方} \\ \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{14} & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_8 & \boldsymbol{B}_5 & \boldsymbol{C}_5 & \text{同类如前.} \\ \boldsymbol{B}_6 & \boldsymbol{B}_9 & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{C}_0 & \boldsymbol{B}_0 & \\ \boldsymbol{C}_9 & \boldsymbol{C}_6 & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_{12} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{D}_0 & \end{matrix} \tag{18}$$

这里只有两类幻和组，因而不能作出 15 阶完美幻方. 容易看出，在分段方的行、列序中，只要有一个如π_3的排列参与，都不可能得到 15 阶完美幻方. 因此，只有由 1, 2 型排列确定的可幻排列作为分段方的行、列序才能产生 15 阶完美幻方，其各种可能的产生数为:

序型	1	2	其他
1	252	96	0
2	96	24	0
其他	0	0	0

(19)

二、15 阶完美幻方举例

$$\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,225\}\qquad \Sigma_{15}=1695,\quad 15^2=225,\ a+a'=226.$$

例 1　π_1=(1,3,8,2,4,10,12,5,7,14,13,9,11,15,6)为行、列序作分段方：

1	3	8	2	4	10	12	5	7	14	13	9	11	15	6
31	33	38	32	34	40	42	35	37	44	43	39	41	45	36
106	108	113	107	109	115	117	110	112	119	118	114	116	120	111
16	18	23	17	19	25	27	20	22	29	28	24	26	30	21
46	48	53	47	49	55	57	50	52	59	58	54	56	60	51
136	138	143	137	139	145	147	140	142	149	148	144	146	150	141
166	168	173	167	169	175	177	170	172	179	178	174	176	180	171
61	63	68	62	64	70	72	65	67	74	73	69	71	75	66
91	93	98	92	94	100	102	95	97	104	103	99	101	105	96
196	198	203	197	199	205	207	200	202	209	208	204	206	210	201
181	185	188	182	184	190	192	185	187	194	193	189	191	195	186
121	123	128	122	124	130	132	125	127	134	133	129	131	135	126
151	153	158	152	154	160	162	155	157	164	163	159	161	165	156
211	213	218	212	214	220	222	215	217	224	223	219	221	225	216
76	78	83	77	79	85	87	80	82	89	88	84	86	90	81

(20)

对之执行行 Z、列 Z 变换，可得幻和组. 这里列出各列行和方的第一线及其和如下表：

B_1:	1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	Σ
B_4:	1	34	112	26	48	145	179	75	98	207	193	126	152	215	84	
B_7:	1	35	111	27	60	145	176	64	99	179	193	128	164	213	82	
B_{13}:	1	45	114	29	50	145	167	63	96	206	193	127	162	214	83	1695
B_{10}:	1	43	115	16	58	145	166	73	100	196	193	130	151	223	85	
C_{10}:	1	183	143	2	184	145	12	185	142	14	193	144	11	195	141	
B_{11}:	1	39	110	17	51	148	177	68	105	209	190	123	161	217	79	
B_{14}:	1	36	120	26	54	148	179	67	95	207	190	124	152	218	78	
B_2:	1	38	109	27	52	148	176	66	93	197	190	125	164	219	90	
B_8:	1	37	108	29	53	148	167	69	94	206	190	135	162	216	80	1695
B_5:	1	40	118	16	55	148	166	70	103	196	190	133	151	220	88	
C_5:	1	138	188	2	139	148	12	140	187	14	190	189	11	150	186	
B_6:	1	42	116	17	59	136	177	71	92	209	181	132	161	212	89	
B_9:	1	44	107	26	57	136	179	62	101	207	181	134	152	221	87	
B_{12}:	1	41	119	27	47	136	176	74	102	197	181	131	164	222	77	1695
B_3:	1	32	117	29	56	136	167	72	104	206	181	122	162	224	86	
B_{15}:	1	147	191	2	149	136	12	146	182	14	181	192	11	137	194	
A_1:	1	31	103	16	46	136	166	61	91	196	181	121	151	211	76	1590
C_9:	1	22	30	17	155	10	177	158	168	209	13	174	161	199	201	
C_6:	1	20	23	26	157	10	179	165	169	207	13	171	152	198	204	
C_3:	1	18	24	27	154	10	176	156	170	197	13	173	164	202	210	1695
C_{12}:	1	19	21	29	153	10	167	159	172	206	13	180	162	200	203	
C_{15}:	1	178	160	16	208	10	166	163	25	196	13	175	151	28	205	
A_0:	1	3	8	2	4	10	12	5	7	14	13	9	11	15	6	120

(21)

这些幻和组分类如下表:

B_1	B_4	B_7	B_{13}	B_{10}	C_{10}	1 145 193
B_{11}	B_{14}	B_2	B_8	B_5	C_5	1 148 190
B_6	B_9	B_{12}	B_3	A_1	B_{15}	1 136 181
C_9	C_6	C_3	C_{12}	C_{15}	A_0	1 10 13
1	1	1	1	1	1	同行同列之方为同类方.
17	26	27	29	16	2	
177	179	176	167	166	12	
209	207	197	206	196	14	
161	152	164	162	151	11	

(22)

同行、同列之方至少有三个相同元素, 因而是同类方. 同类方不能同时出现在同一个方阵中. 因此由上列各方可组合出:

$$4! + 4\times4\times3\times2 + 2\times4\times3\times2 + 1\times4\times3 + 2\times2\times4\times3 = 10\times4! + 4\times3 = 252 \tag{23}$$

个互不同构的基本 15 阶完美幻方.

用循环排列建立循环排列表. 并以列和方或行和方, 例如,将 $\boldsymbol{B}_1$ 填入循环排列表可得表(24). 或者先将 $\boldsymbol{B}_1$ 变成行线组, 再对之依次执行行 Z 变换, 然后再进行π_1 的循环排列执行列重排可得到相应的 15 阶完美幻方.

列	行	π_1	π_7	π_3	π_6
B_1		Ⅰ Ⅱ	Ⅰ Ⅱ	Ⅰ Ⅱ	Ⅰ Ⅱ
1	A_0	B_2 A_1	B_3 B_{14}	B_5 B_{12}	B_9 B_8
2	B_2	B_9 A_0	C_{15} B_3	B_{15} C_6	C_{12} A_1
3	B_9	C_{12} B_2	C_5 C_{15}	C_3 B_8	B_5 A_0
4	C_{12}	B_5 B_9	B_{12} C_5	B_{14} A_1	B_{15} B_2
5	B_5	B_{15} C_{12}	C_6 B_{12}	B_3 A_0	C_3 B_9
6	B_{15}	C_3 B_5	B_8 C_6	C_{15} B_2	B_{14} C_{12}
7	C_3	B_{14} B_{15}	A_1 B_8	C_5 B_9	B_3 B_5
8	B_{14}	B_3 C_3	A_0 A_1	B_{12} C_{12}	C_{15} B_{15}
9	B_3	C_{15} B_{14}	B_2 A_0	C_6 B_5	C_5 C_3
10	C_{15}	C_5 B_3	B_9 B_2	B_8 B_{15}	B_{12} B_{14}
11	C_5	B_{12} C_{15}	C_{12} B_9	A_1 C_3	C_6 B_3
12	B_{12}	C_6 C_5	B_5 C_{12}	A_0 B_{14}	B_8 C_{15}
13	C_6	B_8 B_{12}	B_{15} B_5	B_2 B_3	A_1 C_5
14	B_8	A_1 C_6	C_3 B_{15}	B_9 C_{15}	A_0 B_{12}
15	A_1	A_0 B_8	B_{14} C_3	C_{12} C_5	B_2 C_6

(24)

由表 (24) 知，对 $\boldsymbol{B}_1$ 可产生 39 个 15 阶完美幻方．再由分类表知由 $\boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_{13}, \boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_{14}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_8$ 分别均可产生 39 个 15 阶完美幻方；但由 $\boldsymbol{B}_6, \boldsymbol{B}_9, \boldsymbol{B}_{12}, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_{10}, \boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{C}_{10}, \boldsymbol{C}_5, \boldsymbol{C}_9, \boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_{12}$ 作列线组，则各可产生 48 个 15 阶完美幻方；以 $\boldsymbol{B}_{15}, \boldsymbol{C}_{15}$ 作列线组则各可产生 60 个 15 阶完美幻方．因此，由满足条件(1), (2)的 15 级排列可产生：

$$39\times 8 + 48\times 12 + 60\times 2 = 252 \tag{25}$$

个 15 阶完美幻方．这与组合计算结果(23)是一致的．

下面是以 $\boldsymbol{B}_1$ 为行线组的，共计 39 个 15 阶完美幻方．

1	3	8	2	4	10	12	5	7	14	13	9	11	15	6	$\boldsymbol{B}_1$
33	38	32	34	40	42	35	37	44	43	39	41	45	36	31	
113	107	109	115	117	110	112	119	118	114	116	120	111	106	108	
17	19	25	27	20	22	29	28	24	26	30	21	16	18	23	
49	55	57	50	52	59	58	54	56	60	51	46	48	53	47	
145	147	140	142	149	148	144	146	150	141	136	138	143	137	139	
177	170	172	179	178	174	176	180	171	166	168	173	167	169	175	
65	67	74	73	69	71	75	66	61	63	68	62	64	70	72	
97	104	103	99	101	105	96	91	93	98	92	94	100	102	95	
209	208	204	206	210	201	196	198	203	197	199	205	207	200	202	
193	189	191	195	186	181	185	188	182	184	190	192	185	187	194	
129	131	135	126	121	123	128	122	124	130	132	125	127	134	133	
161	165	156	151	153	158	152	154	160	162	155	157	164	163	159	
225	216	211	213	218	212	214	220	222	215	217	224	223	219	221	
81	76	78	83	77	79	85	87	80	82	89	88	84	86	90	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	$\boldsymbol{B}_1$ 转置
3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	
8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	
4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	
5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	
7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	
15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	
6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	(1)①
52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	
93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	
90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	
38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	$\boldsymbol{B}_1$
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	$\boldsymbol{B}_2$
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	$\boldsymbol{C}_{15}$
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	$\boldsymbol{B}_3$
125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	
219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	(1)②
93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	
38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	
219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	
109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	B_1
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	B_2
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	B_{15}
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	C_6
66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	
125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	(2)①
69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	
80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	
108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	
216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	B_1
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	B_8
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	C_3
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	B_{15}
94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	
53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	(2)②
80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	
216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	
53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	
135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	B_1
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	B_8
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	B_9
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	C_{15}
37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	
94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	(3)①
78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	
218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	
54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	
124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	B_1
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	B_{14}
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	B_3
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	C_3
36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	
95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	(3)②
67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	
78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	
120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	
218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	B_1
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	B_{14}
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	B_{12}
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	C_{12}
95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	
54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	(3)③
124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	
67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	
36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	
78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	B_1
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	B_{14}
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	C_{15}
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	B_{15}
54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	
120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	(4)①
103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	
40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	
220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	
118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	B_1
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	B_5
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	B_{15}
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	C_{12}
70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	
133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	(4)②
40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	
118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	
133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	
55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	B_1
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	B_5
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	B_{12}
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	C_6
88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	
70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	(4)③
55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	
103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	
88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	
40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	B_1
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	B_5
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	C_3
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	B_9
133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	
220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	(5)①
140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	
186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	
188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	
150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	B_1
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	C_5
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	B_{12}
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	C_{15}
187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	
139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	(5)②
186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	
150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	
139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	
189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	B_1
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	C_5
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	C_{12}
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	B_9
138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	
187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	(5)③
189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	
140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	
190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	
138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	
186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	B_1
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	C_5
148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	
187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	B_9
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	C_{12}
139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	
188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	(6)①
32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	
117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	
122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	
56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	B_1
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	B_3
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	C_{15}
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	B_{14}
86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	
72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	(6)②
56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	
104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	
86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	
32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	B_1
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	B_3
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	C_6
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	B_5
122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	
224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	(6)③
104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	
32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	
224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	
117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	B_1
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	B_3
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	C_5
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	C_3
72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	
122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	(7)①
57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	
101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	
87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	
44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	B_1
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	B_9
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	C_{12}
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	B_2
134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	
221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	(7)②
101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	
44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	
221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	
107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	B_1
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	B_9
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	C_5
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	C_{15}
62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	
134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	(7)③
44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	
107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	
134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	
57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	B_1
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	B_9
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	C_3
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	B_8
87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	
62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	(8)①
74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	
77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	
119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	
222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	B_1
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	B_{12}
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	C_6
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	C_5
102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	
47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	(8)②
77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	
222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	
47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	
131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	B_1
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	B_{12}
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	B_5
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	C_{12}
41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	
102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	(8)③
131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	
74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	
41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	
77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	$\boldsymbol{B}_1$
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	$\boldsymbol{B}_{12}$
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	$\boldsymbol{B}_8$
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	$\boldsymbol{C}_{15}$
47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	
119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	(9)①
191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	
149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	
146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	
182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	$\boldsymbol{B}_1$
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	$\boldsymbol{B}_{15}$
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	$\boldsymbol{C}_3$
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	$\boldsymbol{B}_5$
137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	
194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	(9)②
149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	
182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	
194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	
147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	$\boldsymbol{B}_1$
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	$\boldsymbol{B}_{15}$
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	$\boldsymbol{B}_8$
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	$\boldsymbol{C}_6$
192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	
137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	(9)③
182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	
147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	
137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	
191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	$\boldsymbol{B}_1$
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	$\boldsymbol{B}_{15}$
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	$\boldsymbol{C}_{15}$
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	$\boldsymbol{B}_2$
146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	
192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	(9)④
147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	
14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	
191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	
136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	13	39	116	30	51	
2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	
192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	
149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	B_1
11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	B_{15}
181	123	158	212	79	10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	
137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	B_{14}
12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	C_{12}
194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	
146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	(10)①
156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	
210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	
154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	
24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	B_1
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	C_3
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	B_{14}
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	B_{15}
18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	
202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	(10)②
24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	
170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	
18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	
156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	B_1
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	C_3
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	C_5
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	B_9
154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	
173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
24	56	150	171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	(10)③
170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	
197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	
156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	204	191	135	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
27	50	142	179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	
173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	
210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	B_1
164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	207	185	127	C_3
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
18	53	137	169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	B_3
176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	B_5
202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	
154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	198	188	122	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	(11)①
204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	
20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	
198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	
171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	B_1
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	C_6
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	B_8
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	B_{12}
169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	
23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	(11)②
20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	
171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	
23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	
165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	B_1
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	C_6
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	B_{15}
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	B_5
157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	
169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
20	52	149	178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	(11)③
171	61	93	203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	
207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	167	64	100	
165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	208	189	131	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
26	60	141	166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	
169	70	102	200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	
204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	172	74	103	B_1
152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	196	185	128	C_6
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
23	47	139	175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	B_2
179	73	99	206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	B_3
198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	180	66	91	
157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	205	192	125	
1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	

208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	(12)①
25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	
178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	
28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	
160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	B_1
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	C_{15}
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	C_5
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	B_3
163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	
175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	(12)②
178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	
160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	
175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	
208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	B_1
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	C_{15}
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	B_9
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	B_2
205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	
163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	
1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	(12)③
160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	
208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	
163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	
25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	B_1
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	C_{15}
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	B_8
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	B_{15}
28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	
205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	
1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	203	182	124	(12)④
208	189	131	165	216	76	3	38	107	19	55	147	170	67	104	
166	63	98	197	184	130	162	215	82	14	43	114	26	60	141	
25	57	140	172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	206	195	126	
205	192	125	157	224	88	9	41	120	21	46	138	173	62	94	
178	69	101	210	186	121	153	218	77	4	40	117	20	52	149	B_1
16	48	143	167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	C_{15}
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	200	187	134	B_{12}
196	185	128	152	214	85	12	35	112	29	58	144	176	75	96	B_{14}
175	72	95	202	194	133	159	221	90	6	31	108	23	47	139	
28	54	146	180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	
1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	(13)①
172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	
153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	
180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	
203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	B_1
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	C_{12}
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	B_5
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	B_9
200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	
159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	(13)②
153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	
203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	
159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	
19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	$\boldsymbol{B}_1$
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	$\boldsymbol{C}_{12}$
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	$\boldsymbol{B}_{12}$
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	$\boldsymbol{C}_5$
21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	
200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	

1	33	113	17	49	145	177	65	97	209	193	129	161	225	81	
203	182	124	160	222	80	7	44	118	24	56	150	171	61	93	(13)③
19	55	147	170	67	104	208	189	131	165	216	76	3	38	107	
162	215	82	14	43	114	26	60	141	166	63	98	197	184	130	
172	74	103	204	191	135	156	211	78	8	32	109	25	57	140	
13	39	116	30	51	136	168	68	92	199	190	132	155	217	89	
206	195	126	151	213	83	2	34	115	27	50	142	179	73	99	
21	46	138	173	62	94	205	192	125	157	224	88	9	41	120	
153	218	77	4	40	117	20	52	149	178	69	101	210	186	121	$\boldsymbol{B}_1$
167	64	100	207	185	127	164	223	84	11	45	111	16	48	143	$\boldsymbol{C}_{12}$
10	42	110	22	59	148	174	71	105	201	181	123	158	212	79	
200	187	134	163	219	86	15	36	106	18	53	137	169	70	102	$\boldsymbol{B}_{15}$
29	58	144	176	75	96	196	185	128	152	214	85	12	35	112	$\boldsymbol{B}_2$
159	221	90	6	31	108	23	47	139	175	72	95	202	194	133	
180	66	91	198	188	122	154	220	87	5	37	119	28	54	146	

当行、列线组都是 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_{13}$; $\boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_{14}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_8$ 之一时，产生 2 个 15 阶完美幻方；

当行、列线组只有一组属于 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_{13}$ 或 $\boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_{14}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_8$ 之一时，产生 3 个 15 阶完美幻方，其中有一组含 4 个 15 阶完美幻方；

当行、列线组都是 $\boldsymbol{B}_{10}, \boldsymbol{C}_5$ 或 $\boldsymbol{B}_5, \boldsymbol{C}_{10}$ 或 $\boldsymbol{C}_{15}, \boldsymbol{B}_{15}$ 时，产生 4 个 15 阶完美幻方.

例 2　2 型　对称型：以对称排列为分段方的行、列序：

$$\text{行序}\quad \pi_1=(1,2,3,8,13,14,15,4,6,9,11,5,7,10,12)$$

$$\text{列序}\quad \pi_2=(1,12,10,11,2,3,9,8,7,13,14,5,6,4,15) \tag{26}$$

1	2	3	8	13	14	15	4	6	9	11	5	7	10	12	序
1	16	31	106	181	196	211	46	76	121	151	61	91	136	166	1
12	27	42	117	192	207	222	57	87	132	162	72	102	147	177	12
10	25	40	115	190	205	220	55	85	130	160	70	100	145	175	10
11	26	41	116	191	206	221	56	86	131	161	71	101	146	176	11
2	17	32	107	182	197	212	47	77	122	152	62	92	137	167	2
3	18	33	108	183	198	213	48	78	123	153	63	93	138	168	3
9	24	39	114	189	204	219	54	84	129	159	69	99	144	174	9
8	23	38	113	188	203	218	53	83	128	158	68	98	143	173	8
7	22	37	112	187	202	217	52	82	127	157	67	97	142	172	7
13	28	43	118	193	208	223	58	88	133	163	73	103	148	178	13
14	29	44	119	194	209	224	59	89	134	164	74	104	149	179	14
5	20	35	110	185	200	215	50	80	125	155	65	95	140	170	5
6	21	36	111	186	201	216	51	81	126	156	66	96	141	171	6
4	19	34	109	184	199	214	49	79	124	154	64	94	139	169	4
15	30	45	120	195	210	225	60	90	135	165	75	105	150	180	15

各列和方第 1 线

B_1	1	27	40	116	182	198	219	53	82	133	164	65	96	139	180	1695
B_4	1	17	37	111	192	198	223	49	85	129	164	75	101	143	170	
B_7	1	23	45	114	184	198	216	47	80	131	164	70	103	147	172	
B_{13}	1	19	35	118	188	198	221	57	90	126	164	67	99	137	175	
B_{10}	1	29	33	106	194	198	211	59	78	121	164	63	91	149	168	1665
B_{11}	1	20	38	116	195	209	219	55	79	133	153	72	96	142	167	1695
B_{14}	1	30	34	111	185	209	223	52	83	129	153	62	101	145	177	
B_2	1	25	32	114	187	209	216	60	87	131	153	68	103	140	169	
B_8	1	22	42	118	190	209	221	50	77	126	153	64	99	150	173	
B_5	1	18	44	106	183	209	211	48	89	121	153	74	91	138	179	1665
B_6	1	24	36	116	193	196	219	51	86	133	151	69	96	146	178	1695
B_9	1	28	41	111	189	196	223	56	81	129	151	73	101	141	174	
B_{12}	1	21	43	114	191	196	216	58	84	131	151	66	103	144	176	
B_3	1	26	39	118	186	196	221	54	88	126	151	71	99	148	171	
B_{15}	1	11	9	13	6	196	206	204	208	201	151	161	159	163	156	1845
C_6	1	112	135	116	122	3	222	219	215	133	14	98	96	109	100	1695
C_9	1	115	132	111	125	3	223	212	225	129	14	94	101	113	97	
C_3	1	117	127	114	124	3	216	220	218	131	14	92	103	110	105	
C_{12}	1	120	128	118	130	3	221	217	214	126	14	95	99	107	102	
C_{15}	1	119	134	106	123	3	211	213	224	121	14	93	91	104	108	1665

B_1	B_4	B_7	B_{13}	B_{10}	C_{10}	1	198	164
B_{11}	B_{14}	B_2	B_8	B_5	C_5	1	209	153
B_6	B_9	B_{12}	B_3	A_1	B_{15}	1	196	151
C_6	C_9	C_3	C_{12}	C_{15}	A_0	1	3	14

1	1	1	1	1	1
116	111	114	118	106	9
219	223	216	221	211	11
133	129	131	126	121	13
96	101	103	99	91	6

同行同列方为同类方，
不同行不同列各取一方，　　(27)
可组成一个 15 阶完美幻方.

各幻和方中心线之平方和

B_7	4	20	43	113	183	206	222	60	81	134	157	69	92	145	166	254815
B_8	12	26	33	113	193	200	214	46	85	122	159	67	104	141	180	254815
								1695		254815		43095375				
B_4	14	73	52	113	174	153	212	41	145	132	196	30	94	81	185	48695
B_{11}	2	63	54	113	172	163	224	35	141	124	210	16	102	52	161	260935
B_1	2	18	39	113	187	208	224	50	81	124	165	61	102	145	176	260815
B_{14}	14	28	37	113	189	198	212	56	85	132	151	75	94	141	170	248815
B_2	4	24	45	113	181	202	222	58	85	134	161	65	92	141	168	253495
B_{13}	12	22	31	113	195	204	214	48	81	122	155	71	104	145	178	256135
B_3	4	27	32	113	194	199	222	47	83	134	154	72	92	143	179	257967
B_9	14	17	34	113	192	209	212	49	83	132	164	62	94	143	177	257967
B_6	2	29	42	113	184	197	224	57	83	124	152	74	102	143	169	251727
B_{12}	12	19	44	113	182	207	214	59	83	122	162	64	104	143	167	251727
C_3	5	104	133	217	113	9	93	122	221	115	12	91	135	214	111	258835
C_{12}	4	105	121	219	113	11	92	123	222	115	7	103	134	215	111	259795
C_6	2	99	131	213	113	15	102	124	211	115	13	95	127	224	111	56675
C_9	14	97	132	223	113	3	101	125	212	115	1	94	129	225	111	291955

可见只有以 B_7, B_8 为对角线组可得 3 次特优的 15 阶完美幻方.

构作特优的 15 阶完美幻方的方法:

1. 确定分段方的行列序;
2. 计算幻和方 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_8, \boldsymbol{B}_{13}, \boldsymbol{B}_{14}$ 之中心线平方和, 对相同者计算 3 次方;
3. 通过循环或轮回, 将具有相等 3 次方的列和方对分别作为方阵的行、列线组. 并分别置于上边线、左边线上;
4. 作行的循环变换, 并检查对角线是否为幻和分组. 若是, 执行第 5 步;
5. 作拓扑变换得特优的完美幻方.

166	1	16	31	106	181	196	211	46	76	121	151	61	91	136	行给出 $\boldsymbol{B}_7$
222	57	87	132	162	72	102	147	177	12	27	42	117	192	207	
145	175	10	25	40	115	190	205	220	55	85	130	160	70	100	
206	221	56	86	131	161	71	101	146	176	11	26	41	116	191	
92	137	167	2	17	32	107	182	197	212	47	77	122	152	62	
183	198	213	48	78	123	153	63	93	138	168	3	18	33	108	
69	99	144	174	9	24	39	114	189	204	219	54	84	129	159	
113	188	203	218	53	83	128	158	68	98	143	173	8	23	38	
157	67	97	142	172	7	22	37	112	187	202	217	52	82	127	
43	118	193	208	223	58	88	133	163	73	103	148	178	13	28	
134	164	74	104	149	179	14	29	44	119	194	209	224	59	89	
20	35	110	185	200	215	50	80	125	155	65	95	140	170	5	
81	126	156	66	96	141	171	6	21	36	111	186	201	216	51	
4	19	34	109	184	199	214	49	79	124	154	64	94	139	169	
60	90	135	165	75	105	150	180	15	30	45	120	195	210	225	

157	**43**	**134**	**20**	**81**	**4**	**60**	**166**	**222**	**145**	**206**	**92**	**183**	**69**	**113**	
118	164	35	126	19	90	1	57	175	221	137	198	99	188	**67**	将 $\boldsymbol{B}_7$ 转置为列
74	110	156	34	135	16	87	10	56	167	213	144	203	97	**193**	
185	66	109	165	31	132	25	86	2	48	174	218	142	208	**104**	
96	184	75	106	162	40	131	17	78	9	53	172	223	149	**200**	行再给出 $\boldsymbol{B}_8$
199	105	181	72	115	161	32	123	24	83	7	58	179	215	**141**	
150	196	102	190	71	107	153	39	128	22	88	14	50	171	**214**	
211	147	205	101	182	63	114	158	37	133	29	80	6	49	**180**	
177	220	146	197	93	189	68	112	163	44	125	21	79	15	**46**	
55	176	212	138	204	98	187	73	119	155	36	124	30	76	**12**	
11	47	168	219	143	202	103	194	65	111	154	45	121	27	**85**	
77	3	54	173	217	148	209	95	186	64	120	151	42	130	**26**	
18	84	8	52	178	224	140	201	94	195	61	117	160	41	**122**	
129	23	82	13	59	170	216	139	210	91	192	70	116	152	**33**	
38	127	28	89	5	51	169	225	136	207	100	191	62	108	**159**	

157	**43**	**134**	**20**	**81**	**4**	**60**	**166**	**222**	**145**	**206**	**92**	**183**	**69**	**113**	
74	110	156	34	135	16	87	10	56	167	213	144	203	97	**193**	行重排
96	184	75	106	162	40	131	17	78	9	53	172	223	149	**200**	
150	196	102	190	71	107	153	39	128	22	88	14	50	171	**214**	检查得
177	220	146	197	93	189	68	112	163	44	125	21	79	15	**46**	对角线为
11	47	168	219	143	202	103	194	65	111	154	45	121	27	**85**	$\boldsymbol{B}_6$ $\boldsymbol{C}_9$
18	84	8	52	178	224	140	201	94	195	61	117	160	41	**122**	
38	127	28	89	5	51	169	225	136	207	100	191	62	108	**159**	
118	164	35	126	19	90	1	57	175	221	137	198	99	188	**67**	
185	66	109	165	31	132	25	86	2	48	174	218	142	208	**104**	
199	105	181	72	115	161	32	123	24	83	7	58	179	215	**141**	
211	147	205	101	182	63	114	158	37	133	29	80	6	49	**180**	
55	176	212	138	204	98	187	73	119	155	36	124	30	76	**12**	
77	3	54	173	217	148	209	95	186	64	120	151	42	130	**26**	
129	23	82	13	59	170	216	139	210	91	192	70	116	152	**33**	

157	23	54	138	182	161	25	57	136	195	154	21	50	149	**193**	作拓扑变换
110	**134**	13	217	98	114	123	2	221	100	117	121	15	**214**	96	得①
75	34	**81**	170	209	73	37	83	174	198	62	41	**85**	177	196	行 列
190	162	16	**60**	139	186	155	29	58	142	188	**159**	18	47	146	B_6 C_9
93	107	131	10	**222**	91	120	124	6	215	**104**	118	127	8	219	
202	68	39	78	167	**206**	70	42	76	**180**	199	66	35	89	178	I II
140	194	163	22	53	144	**183**	152	**26**	55	147	181	165	19	51	B_7 B_8
225	94	111	125	14	223	97	**113**	129	3	212	101	115	132	1	
175	207	61	45	79	171	**200**	74	**43**	82	173	204	**63**	32	86	
48	137	191	160	27	**46**	150	184	156	**20**	59	148	187	158	24	
7	218	99	108	**122**	11	220	102	106	135	**4**	216	95	119	133	1695
80	179	208	**67**	38	84	168	197	71	40	87	**166**	210	64	36	254815
30	49	**141**	185	164	28	52	143	189	153	17	56	**145**	192	151	43095375
130	**12**	211	105	109	126	5	224	103	112	128	9	213	**92**	116	
33	77	176	205	72	31	90	169	201	65	44	88	172	203	**69**	

157	147	28	190	59	161	140	17	186	48	154	144	30	188	**46**	
220	**134**	101	5	107	216	123	94	9	120	218	121	97	**12**	118	②
35	197	**81**	63	169	39	210	83	61	172	42	208	**85**	74	176	C_6 B_9
138	19	189	**60**	158	136	22	192	58	160	149	**26**	185	47	156	
135	98	1	112	**222**	133	100	14	116	215	**122**	96	3	109	219	B_7 B_8
202	87	73	175	44	**206**	80	62	171	**33**	199	84	75	173	31	
25	194	56	155	137	21	**183**	49	**159**	150	23	181	52	162	148	
95	2	111	213	124	99	15	**113**	211	127	102	13	115	224	131	
78	64	174	45	203	76	**67**	177	**43**	205	89	71	170	32	201	
195	53	151	142	27	**193**	55	164	**146**	**20**	182	51	153	139	24	
7	117	223	130	**104**	11	110	212	126	93	**4**	114	225	128	91	1695
70	179	41	**200**	77	66	168	34	204	90	68	**166**	37	207	88	254815
50	152	**141**	18	184	54	165	143	16	187	57	163	**145**	29	191	43095375
108	**214**	129	105	8	106	217	132	103	10	19	221	125	**92**	6	
180	38	196	82	72	178	40	209	86	65	167	36	198	79	**69**	

例 3　　行序　　$\pi_3 = (1,2,5,13,6,10,3,11,14,15,9,4,8,12,7)$

列序　　$\pi_4 = (1,2,4,13,9,10,8,6,7,3,12,14,15,11,5)$　　(28)

③、④、⑤、⑥各方之主对角线：

1　26　43　52　74　81　94　113　132　145　152　174　183　200　225

15　20　33　54　32　85　102　113　124　141　164　172　193　206　211

1695　254815　43095375

145	109	80	59	187	130	64	215	29	202	10	154	95	44	**172**	③
98	**43**	166	150	108	83	58	181	135	63	218	28	196	**15**	153	
201	9	**152**	101	42	171	144	107	86	57	186	129	**62**	221	27	
67	220	19	**200**	14	157	100	34	170	149	112	**85**	49	185	134	
48	188	133	61	**225**	18	203	13	151	105	**33**	173	148	106	90	
147	111	84	47	191	**132**	66	219	17	**206**	12	156	99	32	176	
104	37	175	139	110	89	**52**	190	**124**	65	224	22	205	4	155	1695
210	3	158	103	31	180	138	**113**	88	46	195	123	68	223	16	254815
71	222	21	202	2	161	**102**	36	**174**	137	116	87	51	189	122	43095375
50	194	127	70	214	**20**	209	7	160	**94**	35	179	142	115	79	
136	120	78	53	**193**	121	75	213	23	208	**1**	165	93	38	178	
92	41	177	**141**	114	77	56	192	126	69	212	**26**	207	6	159	
199	5	**164**	97	40	169	140	119	82	55	184	125	**74**	217	25	
73	**211**	30	198	8	163	91	45	168	143	118	76	60	**183**	128	
54	182	131	72	216	24	197	11	162	96	39	167	146	117	**81**	

94	14	25	65	187	79	149	40	155	202	214	134	55	110	**172**	④
61	**183**	88	150	38	151	198	223	135	53	106	168	103	**15**	23	
146	36	**152**	207	219	131	51	107	177	97	11	21	**62**	192	84	
209	220	105	**52**	109	179	100	3	22	64	194	**85**	140	137	124	
48	118	180	98	**1**	18	73	195	83	136	**33**	163	210	218	121	
96	2	27	69	191	**81**	137	42	159	**206**	216	122	57	114	176	
70	185	82	139	44	160	**200**	217	**124**	59	115	170	97	4	29	1695
148	45	158	196	213	133	60	**113**	166	93	13	30	68	181	78	254815
197	222	129	56	111	167	**102**	9	**26**	66	182	87	144	41	156	43095375
50	112	169	104	10	**20**	67	184	89	**145**	35	157	199	224	130	
105	8	16	63	**193**	90	143	31	153	208	**225**	128	46	108	178	
72	189	86	**141**	32	162	204	221	126	47	117	**174**	101	6	17	
142	34	**164**	205	215	127	49	119	175	95	7	19	**74**	190	80	
203	**211**	123	58	120	173	91	3	28	75	188	76	138	**43**	165	
54	116	171	92	12	24	71	186	77	147	39	161	201	212	**132**	

52	63	207	104	136	56	65	210	92	139	58	69	205	98	**141**	⑤
194	**1**	221	35	120	182	4	223	39	115	188	6	217	**33**	117	
125	30	**152**	169	88	129	25	158	171	82	123	27	**164**	166	86	
64	208	99	**145**	53	66	202	93	147	59	61	**206**	95	150	47	
10	218	36	112	**183**	12	224	31	116	187	**15**	212	34	118	189	
22	153	177	89	121	**26**	155	180	77	**124**	28	159	175	83	126	
209	91	146	50	75	197	**94**	148	**54**	70	203	96	142	48	72	1695
215	45	107	184	13	219	40	**113**	186	7	213	42	119	181	11	254815
154	178	84	130	23	156	**172**	78	**132**	29	151	176	80	135	17	43095375
100	143	51	67	198	**102**	149	46	71	**200**	105	137	49	73	204	
37	108	192	14	**211**	41	110	195	2	214	**43**	114	190	8	216	
179	76	131	**20**	165	167	79	133	24	160	173	**81**	127	18	162	
140	60	**62**	199	103	144	55	68	201	97	138	57	**74**	196	101	
109	**193**	9	120	38	111	187	3	222	44	106	191	5	**225**	32	
85	128	21	157	168	87	134	16	161	170	90	122	19	163	**174**	

200	53	101	70	136	204	59	103	72	139	198	47	97	75	**141**	⑥
112	**225**	186	35	8	116	220	181	39	14	118	222	184	**33**	2	
19	78	**152**	127	180	21	80	158	131	175	16	84	**164**	133	177	
149	218	57	**94**	63	137	202	60	96	65	143	**206**	55	91	69	
10	106	219	194	**43**	12	109	213	182	37	**15**	111	215	188	41	
170	23	86	160	121	**174**	29	88	162	**124**	168	17	82	165	126	
67	150	201	50	98	71	**145**	196	**54**	104	73	147	199	48	92	1695
34	3	107	217	195	36	5	**113**	221	190	31	9	119	223	192	254815
134	178	27	79	153	122	**172**	50	**81**	155	128	176	25	76	159	43095375
100	61	144	209	58	**102**	64	138	197	**52**	105	66	140	203	56	
187	38	11	115	**211**	189	44	13	117	214	**183**	32	7	120	216	
157	135	171	**20**	83	161	130	166	24	89	163	**132**	169	18	77	
49	93	**62**	142	210	51	95	68	146	205	46	99	**74**	148	207	
224	**193**	42	4	108	212	187	45	6	110	218	191	40	**1**	114	
85	151	129	179	28	87	154	123	167	22	90	156	125	173	**26**	

99	222	152	141	191	174	197	114	27	57	36	81	71	2	**131**	⑦
73	**3**	135	105	218	151	136	193	168	198	120	23	53	**31**	88	
49	37	**89**	67	5	130	104	214	157	140	194	170	**205**	115	19	
47	39	87	**72**	6	126	101	212	161	144	192	**167**	201	116	24	
196	118	18	48	**45**	83	68	1	133	103	**213**	165	150	188	166	
149	184	172	200	119	**20**	55	40	79	**64**	7	134	97	215	160	
146	182	176	204	117	17	**51**	41	**84**	62	9	132	102	216	156	
98	211	163	148	183	180	210	**113**	16	46	43	78	63	15	128	1695
70	10	124	94	217	164	**142**	185	**175**	209	109	22	50	44	80	254875
66	11	129	92	219	**162**	147	186	171	**206**	107	26	54	42	77	43115715
60	38	76	61	**13**	123	93	225	158	143	**181**	178	208	108	30	
202	110	25	**59**	34	82	65	14	125	100	220	**154**	139	187	179	
207	111	**21**	56	32	86	69	12	122	96	221	159	**137**	189	177	
138	**195**	173	203	106	28	58	33	90	75	8	121	91	**223**	153	
95	224	155	145	190	169	199	112	29	52	35	85	74	4	**127**	

206	6	177	62	191	77	144	32	156	57	219	24	96	117	**131**	⑧
48	**223**	16	105	108	133	203	15	168	61	188	90	148	**31**	158	
74	185	**89**	139	40	155	50	214	25	97	112	124	**205**	14	172	
147	39	159	**51**	222	26	101	111	132	197	11	**167**	69	182	81	
196	8	180	73	**181**	83	138	43	151	60	**213**	28	98	120	123	
52	217	19	100	119	**127**	209	5	179	**64**	190	80	140	34	160	
92	116	122	204	2	171	**72**	189	**84**	141	42	161	56	216	27	1695
150	33	163	53	225	18	91	**113**	135	208	1	173	63	193	76	254875
199	10	170	65	184	85	**142**	37	**154**	55	224	22	104	110	134	43115715
66	192	86	146	36	**162**	47	221	17	**99**	107	126	207	9	174	
203	106	128	198	**13**	166	75	183	88	143	**45**	153	46	218	30	
145	44	157	**59**	215	29	94	115	125	200	4	**175**	67	187	79	
54	212	**21**	102	114	129	201	12	176	71	186	87	**137**	41	152	
68	**195**	78	136	38	165	58	211	23	93	118	121	210	**3**	178	
95	109	130	202	7	169	70	194	82	149	35	164	49	220	**20**	

44	199	145	123	54	35	203	146	135	46	36	207	137	127	**58**	⑨
130	**48**	39	209	139	131	60	31	200	143	122	52	43	**201**	147	
204	149	**124**	55	33	196	140	128	56	45	208	141	**132**	47	37	
49	40	198	**144**	134	53	41	210	136	125	57	**32**	202	148	126	
138	129	59	34	**205**	150	121	50	38	206	**142**	133	51	42	197	
14	214	160	108	69	**5**	218	161	120	**61**	6	222	152	112	73	
115	63	9	224	154	116	**75**	1	**215**	158	107	67	13	216	162	1695
219	179	109	70	3	211	155	**113**	71	15	223	156	117	62	7	254815
64	10	213	159	119	68	**11**	225	**151**	110	72	2	217	163	111	43095375
153	114	74	4	220	**165**	106	65	8	**221**	157	118	66	12	212	
29	184	175	93	**84**	20	188	176	105	76	**21**	192	167	97	88	
100	78	24	**194**	169	101	90	16	185	173	92	**82**	28	186	177	
189	179	**94**	85	18	181	170	98	86	30	193	171	**102**	77	22	
79	**25**	183	174	104	83	26	195	166	95	87	17	187	**178**	96	
168	99	89	19	190	180	91	80	23	191	172	103	81	27	**182**	

21	192	167	97	88	20	188	176	105	76	29	184	175	93	**84**	⑩
92	**82**	28	186	177	101	90	16	185	173	100	78	24	**194**	169	
193	171	**102**	77	22	181	170	98	86	30	189	179	**94**	85	18	
87	17	187	**178**	96	83	26	195	166	95	79	**25**	183	174	104	
172	103	81	27	**182**	180	91	80	23	191	**168**	99	89	19	190	
6	222	152	112	73	**5**	218	161	120	**61**	14	214	150	108	69	
107	67	13	216	162	116	**75**	1	**215**	158	115	63	9	224	154	1695
223	156	117	62	7	211	155	**113**	71	15	219	179	109	70	3	254815
72	2	217	163	111	68	**11**	225	**151**	110	64	10	213	159	119	43095375
157	118	66	12	212	**165**	106	65	8	**221**	153	114	74	4	220	
36	207	137	127	**58**	35	203	146	135	46	**44**	199	145	123	54	
122	52	43	**201**	147	131	60	31	200	143	130	**48**	39	209	139	
208	141	**132**	47	37	196	140	128	56	45	204	149	**124**	55	33	
57	**32**	202	148	126	53	41	210	136	125	49	40	198	**144**	134	
142	133	51	42	197	150	121	50	38	206	138	129	59	34	**205**	

⑨、⑩之间有关系：

⑩ ＝(11,12,13,14,15,6,7,8,9,10,1,2,3,4,5)·

⑨·(11,12,13,14,15,6,7,8,9,10,1,2,3,4,5)

在⑨、⑩中每个 5 阶方是一个 5 阶完美幻方，其幻和为 $\Sigma_5 = 565$.

每个 10 阶方是一个 10 阶完美幻方，其幻和为 $\Sigma_{10} = 1130$.

三、一般的 n 阶 3 因数完美幻方

对 $n = 33,39,63,\cdots$ 等满足可幻条件(1),(2)的 n 级排列举例：

$n = 33 = 3\times 11$　　$1+2+\cdots+33 = 33\times 17 = 3\times 187 = 11\times 51$

$33^2 = 1089$　　$\Sigma_{33} = 17985$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
17	22	16	21	15	20	14	19	13	18	12	→
33	27	32	26	31	25	30	24	29	23	28	

1	27	16	4	31	20	30	19	9	18	12	列和	51
17	2	32	21	5	25	14	8	29	23	11	行和	187
33	22	3	26	15	6	7	24	13	10	18		

$$\to \pi = (1,2,3,4,5,6,30,8,13,18,11,33,27,32,26,31,25,7,19,29,10,12,17,22,16,21,15,20,14,24,9,23,28) \tag{29}$$

$n = 39 = 3\times 13$　　$1+2+\cdots+39 = 39\times 20 = 3\times 260 = 13\times 60$,

$39^2 = 1521$,　　$\Sigma_{39} = 29679$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20	26	19	25	18	24	17	23	16	22	15	21	14
39	32	38	31	37	30	36	29	35	28	34	27	23

1	32	19	4	37	24	36	29	16	22	15	12	13	列和	60
20	2	38	25	5	30	17	8	35	28	11	27	14	行和	260

39 26 3 31 18 6 7 23 9 10 34 21 33

$\to\ \pi=(1,2,3,4,5,6,36,8,9,22,11,21,13,20,26,19,25,18,24,17,23,16,28,34,$
$12,14,39,32,38,31,37,30,7,29,35,10,15,27,33)$ (30)

$n=63=9\times7=3\times21,\ 1+2+\cdots+63=63\times32=3\times672=21\times96$

$63^2=3969,\qquad \Sigma_{63}=125055.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
32	42	31	41	30	40	29	39	28	38	27	37	26	36	25	35	24	34	23	33	22
63	52	62	51	61	50	60	49	59	48	58	47	57	46	56	45	55	44	54	43	53

1	52	31	4	61	6	60	39	28	48	27	12	57	36	15	45	24	18	54	33	21
32	2	62	41	5	50	29	8	59	38	11	47	26	14	56	35	17	44	23	20	53
63	42	3	51	30	40	7	49	9	10	58	37	13	46	25	16	55	34	19	43	22

列和: 96,　　行和: 672.

$\to\ \pi=(1,2,3,4,5,40,60,8,9,48,11,37,57,14,25,45,17,34,54,20,22,$
$32,42,31,41,30,6,29,49,28,38,58,12,26,46,15,35,55,18,23,43,21$
$63,52,62,51,61,50,7,39,59,10,27,47,13,36,56,16,24,44,19,33,53)$ (31)

分别以这些排列为分段方的列、行序构作相应阶的分段方. 再给出列、行和方, 将可进一步给出相应阶数的完美幻方. 由于篇幅过大, 这里只对如下 21 级排列给出其相应 21 阶完美幻方的详细讨论.

例 1　$n=21=3\times7$　　$\Sigma_{21}=4641.$

1	6	9	10	14	18	19	行和:77
2	5	7	11	15	17	20	对称
3	4	8	12	13	16	21	

(32)

分段方 A:

1	2	3	6	5	4	9	7	8	10	11	12	14	15	13	18	17	16	19	20	21
22	23	24	27	26	25	30	28	29	31	32	33	35	36	34	39	38	37	40	41	42
43	44	45	48	47	46	51	49	50	52	53	54	56	57	55	60	59	58	61	62	63
106	107	108	111	110	109	114	112	113	115	116	117	119	120	118	123	122	121	124	125	126
85	86	87	90	89	88	93	91	92	94	95	96	98	99	97	102	101	100	103	104	105
64	65	66	69	68	67	72	70	71	73	74	75	77	78	79	81	80	79	82	83	84
169	170	171	174	173	172	177	175	176	178	179	180	182	183	181	186	185	184	187	188	189
127	128	129	132	131	130	135	133	134	136	137	138	140	141	139	144	143	142	145	146	147
148	149	150	153	152	151	156	154	155	157	158	159	161	162	160	165	164	163	166	167	168
190	191	192	195	194	193	198	196	197	199	200	201	203	204	202	207	206	205	208	209	210
211	212	213	216	215	214	219	217	218	220	221	222	224	225	223	228	227	226	229	230	231
232	233	234	237	236	235	240	238	239	241	242	243	245	246	244	249	248	247	250	251	252
274	275	276	279	278	277	282	280	281	283	284	285	287	288	286	291	290	289	292	293	294
295	296	297	300	299	298	303	301	302	304	305	306	308	309	307	312	311	310	313	314	315
253	254	255	258	257	256	261	259	260	262	263	264	266	267	265	270	269	268	271	272	273
358	359	360	363	362	361	366	364	365	367	368	369	371	372	370	375	374	373	376	377	378
337	338	339	342	341	340	345	343	344	346	347	348	350	351	349	354	353	352	355	356	357
316	317	318	321	320	319	324	322	323	325	326	327	329	330	328	333	332	331	334	335	336
379	380	381	384	383	382	387	385	386	388	389	390	392	393	391	396	395	394	397	398	399
400	401	402	405	404	403	408	406	407	409	410	411	413	414	412	417	416	415	418	419	420
421	422	423	426	425	424	429	427	428	430	431	432	434	435	433	438	437	436	439	440	441

对 $\boldsymbol{A}$ 执行行(列)Z 变换，可得列和方、行和方如下(各方只给出其方的第 1 线):

$\boldsymbol{B}_1$: 1, 23, 45, 111, 89, 67, 177, 133, 155, 199, 221, 243, 287, 309, 265, 375, 353, 331, 397, 419, 441;　4641
$\boldsymbol{B}_{16}$:1, 38, 54, 114, 86, 79, 182, 133, 150, 208, 225, 239, 279, 314, 265, 367, 341, 336, 396, 410, 424;　4641
$\boldsymbol{B}_{10}$:1, 32, 63, 115, 104, 71, 187, 133, 163, 198, 227, 235, 291, 299, 265, 363, 351, 318, 392, 401, 432;　4641
$\boldsymbol{B}_4$: 1, 26, 50, 119, 101, 84, 174, 133, 159, 207, 230, 234, 282, 305, 265, 376, 338, 319, 388, 414, 436;　4641
$\boldsymbol{B}_{19}$:1, 41, 58, 123, 99, 75, 178, 133, 151, 195, 212, 252, 292, 311, 265, 371, 347, 323, 387, 404, 423;　4641
$\boldsymbol{B}_{13}$:1, 36, 46, 124, 95, 66, 186, 133, 168, 203, 215, 247, 283, 296, 265, 366, 356, 327, 384, 416, 428;　4641
$\boldsymbol{B}_7$: 1, 28, 55, 106, 91, 76, 169, 133, 160, 190, 217, 244, 274, 301, 265, 358, 343, 328, 379, 406, 433;　4557
$\boldsymbol{C}_7$: 1 128, 255, 6, 131, 256, 9, 133, 260, 10, 137, 264, 14, 141, 265, 18, 143, 268, 19, 146, 273;　2877
$\boldsymbol{B}_8$: 1, 29, 59, 111, 96, 83, 177, 139, 149, 199, 226, 236, 287, 315, 259, 375, 339, 326, 397, 403, 435;　4641
$\boldsymbol{B}_2$: 1, 24, 47, 114, 92, 74, 182, 139, 164, 208, 231, 233, 279, 298, 259, 367, 348, 330, 396, 415, 440;　4641
$\boldsymbol{B}_{17}$:1, 37, 57, 115, 88, 65, 187, 139, 158, 198, 213, 251, 291, 306, 259, 363, 357, 332, 392, 407, 425;　4641
$\boldsymbol{B}_{11}$:1, 33, 44, 119, 87, 78, 174, 139, 152, 207, 214, 248, 282, 310, 259, 376, 344, 335, 388, 420, 431;　4641
$\boldsymbol{B}_5$: 1, 25, 53, 123, 105, 68, 178, 139, 167, 195, 218, 246, 292, 297, 259, 371, 352, 317, 387, 411, 437;　4641
$\boldsymbol{B}_{20}$:1, 42, 62, 124, 100, 80, 186, 139, 162, 203, 222, 242, 283, 302, 259, 366, 340, 320, 384, 402, 422;　4641
$\boldsymbol{B}_{14}$:1, 34, 49, 106, 97, 70, 169, 139, 154, 190, 223, 238, 274, 307, 259, 358, 349, 322, 379, 412, 427;　4557
$\boldsymbol{C}_{14}$:1, 254, 129, 6 , 257, 130, 9 , 139, 18, 269 , 142, 19, 272, 147, 259, 134, 10, 263, 138, 14, 267;　2877
$\boldsymbol{B}_{15}$:1, 39, 52, 111, 103, 77, 177, 127, 165, 199, 216, 250, 287, 303, 253, 375, 346, 321, 397, 413, 429;　4641
$\boldsymbol{B}_9$: 1, 31, 61, 114, 102, 69, 182, 127, 157, 208, 219, 249, 279, 308, 253, 367, 355, 324, 396, 405, 434;　4641
$\boldsymbol{B}_3$: 1,27, 51, 115, 98, 81, 187, 127, 153, 198, 220, 245, 291, 313, 253, 363, 345, 325, 392, 417, 439;　4641
$\boldsymbol{B}_{18}$:1, 40, 60, 119, 94, 72, 174, 127, 166, 207, 224, 241, 282, 300, 253, 376, 354, 329, 388, 408, 426;　4641
$\boldsymbol{B}_{12}$:1, 35, 48, 123, 93, 82, 178, 127, 161, 195, 228, 240, 292, 304, 253, 371, 342, 333, 387, 418, 430;　4641
$\boldsymbol{B}_6$: 1,30, 56, 124, 90, 73, 186, 127, 156, 203, 229, 237, 283, 312, 253, 366, 350, 334, 384, 409, 438;　4641
$\boldsymbol{B}_{21}$:1, 270, 136, 6, 271, 140, 9, 127, 18, 262, 132, 19, 266, 135, 253, 144, 10, 258, 145,14, 261;　4557
$\boldsymbol{C}_{15}$:1, 359, 192, 111, 383, 277, 177, 7, 365, 199, 116, 390, 287, 183, 13, 375, 206, 121, 397, 293, 189;　4641
$\boldsymbol{C}_{18}$:1, 380, 360, 279, 194, 172, 114, 7, 386, 367, 284, 201, 182, 120, 13, 396, 374, 289, 208, 188, 126;　4641
$\boldsymbol{C}_{12}$:1, 275, 108, 363, 173, 382, 198, 7, 281, 115, 368, 180, 392, 204, 13, 291, 122, 373, 187, 398, 210;　4641
$\boldsymbol{C}_9$: 1, 191, 381, 174, 362, 109, 282, 7, 197, 388, 179, 369, 119, 288, 13, 207, 395, 184, 376, 125, 294;　4641
$\boldsymbol{C}_3$: 1, 107, 171, 195, 278, 361, 387, 7, 113, 178, 200, 285, 371, 193, 13, 123, 185, 205, 292, 377, 399;　4641
$\boldsymbol{C}_6$: 1, 170, 276, 384, 110, 193, 366, 7, 176, 283, 389, 117, 203, 372, 13, 186, 290, 394, 124, 209, 378;　4641
$\boldsymbol{C}_{21}$:1, 175, 286, 379 , 112, 202, 358, 7, 181 ,274, 385, 118 , 190 , 364, 13, 169, 280, 391, 106, 196, 370;　2877
$\boldsymbol{A}_0$: 1, 2, 3, 6, 5, 4, 9, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 13, 18, 17, 16, 19, 20, 21;　231
$\boldsymbol{A}_1$: 1, 22, 43 , 106, 85, 64, 169, 127, 148, 190, 211, 232, 274, 295, 253, 358, 337, 316, 379, 400, 421.　4431

$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_8$	$\boldsymbol{B}_{15}$	$\boldsymbol{C}_{15}$	1	111	177	199	287	375	397
$\boldsymbol{B}_{16}$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_9$	$\boldsymbol{C}_{18}$	1	114	182	208	279	367	396
$\boldsymbol{B}_{10}$	$\boldsymbol{B}_{17}$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{C}_{12}$	1	115	187	198	291	363	392
$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{C}_9$	1	119	174	207	282	376	388
$\boldsymbol{B}_{19}$	$\boldsymbol{B}_5$	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{C}_3$	1	123	178	195	292	371	387
$\boldsymbol{B}_{13}$	$\boldsymbol{B}_{20}$	$\boldsymbol{B}_6$	$\boldsymbol{C}_6$	1	124	186	203	283	366	384
$\boldsymbol{B}_7$	$\boldsymbol{B}_{14}$	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{C}_{21}$	1	106	169	190	274	358	379
$\boldsymbol{C}_7$	$\boldsymbol{C}_{14}$	$\boldsymbol{B}_{21}$	$\boldsymbol{A}_0$	1	6	9	10	14	18	19
1	1	1	1							
133	179	127	7							
265	259	253	13							

(33)

$\boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_{14}, \boldsymbol{B}_{21}, \boldsymbol{C}_7, \boldsymbol{C}_{14}, \boldsymbol{C}_{21}, \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1$ 不是幻和组. 对各方，按第 1 线中具有相同元素情形进行分类如表(33). 同行、同列之方至少有三个相同元素，因而是同类的. 同类方不能同时出现在同一个方阵中.

① 行 B_{12} 列 B_1 ⅠC_6 ⅡB_2

1	48	93	178	161	228	292	253	342	387	430	35	123	82	127	195	240	304	371	333	418
23	110	70	137	204	248	314	359	320	406	11	57	101	188	149	215	280	263	351	395	440
45	88	176	159	223	289	273	339	382	428	33	118	89	147	192	235	302	369	328	415	21
111	72	136	203	249	313	358	321	408	10	56	102	187	148	216	282	262	350	396	439	22
89	175	158	225	290	272	338	381	427	32	120	80	146	191	236	301	368	330	416	20	44
67	134	201	244	310	378	318	403	8	54	97	184	168	213	277	260	348	391	436	42	108
177	157	224	291	271	337	384	429	31	119	81	145	190	237	303	367	329	417	19	43	90
133	200	246	311	377	317	404	7	53	99	185	167	212	278	259	347	393	437	41	107	68
155	222	286	268	357	381	424	29	117	76	142	210	234	298	365	327	412	16	63	87	172
199	245	312	376	316	405	9	52	98	186	166	211	279	261	346	392	438	40	106	69	135
221	288	269	356	380	425	28	116	78	143	209	233	299	364	326	414	17	62	86	173	154
243	307	373	336	402	4	50	96	181	163	231	276	256	344	390	433	37	126	66	130	197
287	270	355	379	426	30	115	77	144	208	232	300	366	325	413	18	61	85	174	156	220
309	374	335	401	5	49	95	183	164	230	275	257	343	389	435	38	125	65	131	196	292
265	352	399	423	25	113	75	139	205	252	297	361	323	411	13	58	105	171	151	218	285
375	334	400	6	51	94	182	165	229	274	258	345	388	434	39	124	64	132	198	241	308
353	398	422	26	112	74	141	206	251	296	362	322	410	15	59	104	170	152	217	284	267
331	420	3	46	92	180	160	226	294	255	340	386	432	34	121	84	129	193	239	306	370
397	421	27	114	73	140	207	230	295	363	324	409	14	60	103	169	153	219	283	216	354
419	2	47	91	179	162	227	293	254	341	385	431	36	122	83	128	194	238	305	372	332
441	24	109	71	138	202	247	315	360	319	407	12	55	100	189	150	214	281	264	349	394

② 行 B_{12} 列 B_1 ⅠB_{20} ⅡC_{18}

1	48	93	178	161	228	292	253	342	387	430	35	123	82	127	195	240	304	371	333	418
155	222	286	268	357	381	424	29	117	76	142	210	234	298	365	327	412	16	63	87	172
353	398	422	26	112	74	141	206	251	296	362	322	410	15	59	104	170	152	217	284	267
111	72	136	203	249	313	358	321	408	10	56	102	187	148	216	282	262	350	396	439	22
243	307	373	336	402	4	50	96	181	163	231	276	256	344	390	433	37	126	66	130	197
419	2	47	91	179	162	227	293	254	341	385	431	36	122	83	128	194	238	305	372	332
177	157	224	291	271	337	384	429	31	119	81	145	190	237	303	367	329	417	19	43	90
265	352	399	423	25	113	75	139	205	252	297	361	323	411	13	58	105	171	151	218	285
23	110	70	137	204	248	314	359	320	406	11	57	101	188	149	215	280	263	351	395	440
199	245	312	376	316	405	9	52	98	186	166	211	279	261	346	392	438	40	106	69	135
331	420	3	46	92	180	160	226	294	255	340	386	432	34	121	84	129	193	239	306	370
89	175	158	225	290	272	338	381	427	32	120	80	146	191	236	301	368	330	416	20	44
287	270	355	379	426	30	115	77	144	208	232	300	366	325	413	18	61	85	174	156	220
441	24	109	71	138	202	247	315	360	319	407	12	55	100	189	150	214	281	264	349	394
133	200	246	311	377	317	404	7	53	99	185	167	212	278	259	347	393	437	41	107	68
375	334	400	6	51	94	182	165	229	274	258	345	388	434	39	124	64	132	198	241	308
45	88	176	159	223	289	273	339	382	428	33	118	89	147	192	235	302	369	328	415	21
221	288	269	356	380	425	28	116	78	143	209	233	299	364	326	414	17	62	86	173	154
397	421	27	114	73	140	207	230	295	363	324	409	14	60	103	169	153	219	283	216	354
67	134	201	244	310	378	318	403	8	54	97	184	168	213	277	260	348	391	436	42	108
309	374	335	401	5	49	95	183	164	230	275	257	343	389	435	38	125	65	131	196	292

③ 行B_{12} 列B_{11} ⅠC_{18} ⅡB_{10}

1	48	93	178	161	228	292	253	342	387	430	35	123	82	127	195	240	304	371	333	418
87	172	155	222	286	268	357	381	424	29	117	76	142	210	234	298	365	327	412	16	63
152	217	284	267	353	398	422	26	112	74	141	206	251	296	362	322	410	15	59	104	170
282	262	350	396	439	22	111	72	136	203	249	313	358	321	408	10	56	102	187	148	216
344	390	433	37	126	66	130	197	243	307	373	336	402	4	50	96	181	163	231	276	256
431	36	122	83	128	194	238	305	372	332	419	2	47	91	179	162	227	293	254	341	385
119	81	145	190	237	303	367	329	417	19	43	90	177	157	224	291	271	337	384	429	31
139	205	252	297	361	323	411	13	58	105	171	151	218	285	265	352	399	423	25	113	75
248	314	359	320	406	11	57	101	188	149	215	280	263	351	395	440	23	110	70	137	204
376	316	405	9	52	98	186	166	211	279	261	346	392	438	40	106	69	135	199	245	312
420	3	46	92	180	160	226	294	255	340	386	432	34	121	84	129	193	239	306	370	331
44	89	175	158	225	290	272	338	381	427	32	120	80	146	191	236	301	368	330	416	20
174	156	220	287	270	355	379	426	30	115	77	144	208	232	300	366	325	413	18	61	85
214	281	264	349	394	441	24	109	71	138	202	247	315	360	319	407	12	55	100	189	150
259	347	393	437	41	107	68	133	200	246	311	377	317	404	7	53	99	185	167	212	278
388	434	39	124	64	132	198	241	308	375	334	400	6	51	94	182	165	229	274	258	345
33	118	89	147	192	235	302	369	328	415	21	45	88	176	159	223	289	273	339	382	428
78	143	209	233	299	364	326	414	17	62	86	173	154	221	288	269	356	380	425	28	116
207	230	295	363	324	409	14	60	103	169	153	219	283	216	354	397	421	27	114	73	140
310	378	318	403	8	54	97	184	168	213	277	260	348	391	436	42	108	67	134	201	244
335	401	5	49	95	183	164	230	275	257	343	389	435	38	125	65	131	196	292	309	374

①、②、③是以B_{12}为行线组，并对之依次进行行轮回或执行Z变换而给出的21阶完美幻方.

④ 行B_{17} 列B_1 ⅠB_{18} ⅡC_6

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
23	72	201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394
45	175	224	268	380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418
111	134	246	376	402	49	182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440
89	157	286	356	426	113	141	250	360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21
67	200	312	336	5	94	160	293	342	428	120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22
177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167	279	344	435	124	129	238	371	415	44
133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325	13	104	153	281	351	439	108
155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84	194	304	328	20	90
199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263	396	42	68
221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43	172
243	374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135
287	352	422	114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154
309	334	3	91	161	289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197
265	398	27	71	204	313	318	7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220
375	420	47	178	223	272	384	27	78	208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242
353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258	386	36	82	192	301	329	16	86	156	285
331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55	188	216	260	393	40	66	196	308
397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236	367	412	62	174	218	267
419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438	126	131	241	370
441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151	284	354

⑤ 行 B_{17} 列 B_1 Ⅰ C_9 Ⅱ B_6

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84	194	304	328	20	90
353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258	386	36	82	192	301	329	16	86	156	285
111	134	246	376	402	49	182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440
243	374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135
419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438	126	131	241	370
177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167	279	344	435	124	129	238	371	415	44
265	398	27	71	204	313	318	7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220
23	72	201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394
199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263	396	42	68
331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55	188	216	260	393	40	66	196	308
89	157	286	356	426	113	141	250	360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21
287	352	422	114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154
441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151	284	354
133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325	13	104	153	281	351	439	108
375	420	47	178	223	272	384	27	78	208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242
45	175	224	268	380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418
221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43	172
397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236	367	412	62	174	218	267
67	200	312	336	5	94	160	293	342	428	120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22
309	334	3	91	161	289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197

④、⑤、⑥、⑦、⑧、⑨是以 B_{12} 为行线组，并对之依次进行行轮回或执行 Z 变换而给出的 21 阶完美幻方.

⑥ 行 B_{17} 列 B_1 Ⅰ $C_{18}C_{21}B_{18}$ Ⅱ $B_{21}B_{12}C_6$

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
243	374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135
23	72	201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394
287	352	422	114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154
45	175	224	268	380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418
309	334	3	91	161	289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197
111	134	246	376	402	49	182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440
265	398	27	71	204	313	318	7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220
89	157	286	356	426	113	141	250	360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21
375	420	47	178	223	272	384	27	78	208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242
67	200	312	336	5	94	160	293	342	428	120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22
353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258	386	36	82	192	301	329	16	86	156	285
177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167	279	344	435	124	129	238	371	415	44
331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55	188	216	260	393	40	66	196	308
133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325	13	104	153	281	351	439	108
397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236	367	412	62	174	218	267
155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84	194	304	328	20	90
419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438	126	131	241	370
199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263	396	42	68
441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151	284	354
221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43	172

⑦ 行 $\boldsymbol{B}_{17}$ 列 $\boldsymbol{C}_{18}$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{19}$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_{18}$

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394	23	72
380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418	45	175	224	268
182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440	111	134	246	376	402	49
360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21	89	157	286	356	426	113	141	250
120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22	67	200	312	336	5	94	160	293	342	428
279	344	435	124	129	238	371	415	44	177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167
13	104	153	281	351	439	108	133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325
194	304	328	20	90	155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84
396	42	68	199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263
172	221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43
374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135	243
114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154	287	352	422
289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197	309	334	3	91	161
7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220	265	398	27	71	204	313	318
208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242	375	420	47	178	223	272	384	27	78
386	36	82	192	301	329	16	86	156	285	353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258
188	216	260	393	40	66	196	308	331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55
367	412	62	174	218	267	397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236
126	131	241	370	419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438
284	354	441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151

原排列的循环排列为:

$$
\begin{aligned}
&\pi_1=(1,2,3,6,5,4,9,7,8,10,11,12,14,15,13,18,17,16,19,20,21);\\
&\pi_2=(1,3,5,9,8,11,14,13,17,19,21,2,6,4,7,10,12,15,18,16,30);\\
&\pi_4=(1,5,8,14,17,21,6,7,12,18,20,3,9,11,13,19,2,4,10,15,16);\\
&\pi_7=(1,8,17,6,12,20,9,13,2,10,16,5,14,21,7,18,3,11,19,4,15);\\
&\pi_{16}=(1,17,12,9,2,16,14,7,3,19,15,8,6,20,13,10,5,21,18,11,4);\\
&\pi_{11}=(1,12,2,14,3,15,6,13,2,18,4,17,9,16,7,19,8,20,10,21,11).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

⑧ 行 $\boldsymbol{B}_{17}$ 列 $\boldsymbol{C}_{18}$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{12}$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_{4}$

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
194	304	328	20	90	155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84
386	36	82	192	301	329	16	86	156	285	353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258
182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440	111	134	246	376	402	49
374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135	243
126	131	241	370	419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438
279	344	435	124	129	238	371	415	44	177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167
7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220	265	398	27	71	204	313	318
201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394	23	72
396	42	68	199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263
188	216	260	393	40	66	196	308	331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55
360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21	89	157	286	356	426	113	141	250
114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154	287	352	422
284	354	441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151
13	104	153	281	351	439	108	133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325
208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242	375	420	47	178	223	272	384	27	78
380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418	45	175	224	268
172	221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43
367	412	62	174	218	267	397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236
120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22	67	200	312	336	5	94	160	293	342	428
289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197	309	334	3	91	161

⑨ 行 $\boldsymbol{B}_{17}$ 列 $\boldsymbol{C}_{18}$ Ⅰ $\boldsymbol{B}_{19}$ Ⅱ $\boldsymbol{B}_{18}$

1	88	158	291	357	425	115	139	251	363	407	57	187	213	259	392	37	65	198	306	332
201	311	316	4	95	165	294	341	430	118	146	237	365	414	61	171	217	266	394	23	72
380	30	75	206	295	319	11	102	168	278	346	433	125	132	239	372	418	45	175	224	268
182	226	254	387	33	80	190	298	326	18	105	152	283	349	440	111	134	246	376	402	49
360	406	56	184	212	261	390	38	64	193	305	333	21	89	157	286	356	426	113	141	250
120	145	234	364	413	58	170	219	264	395	22	67	200	312	336	5	94	160	293	342	428
279	344	435	124	129	238	371	415	44	177	222	269	379	25	74	207	315	320	10	97	167
13	104	153	281	351	439	108	133	245	373	401	51	180	227	253	382	32	81	210	299	325
94	304	328	20	90	155	288	355	423	112	140	247	359	408	54	185	211	256	389	39	84
396	42	68	199	307	335	6	92	162	292	339	427	119	142	233	366	411	59	169	214	263
172	221	270	399	26	73	202	314	321	8	99	166	276	343	434	121	128	240	369	416	43
374	400	46	179	228	273	383	31	76	209	300	323	15	107	150	280	350	436	107	135	243
114	138	246	358	403	53	186	231	257	388	34	83	195	302	330	19	87	154	287	352	422
289	338	429	117	143	232	361	410	60	189	215	262	391	41	69	197	309	334	3	91	161
7	98	163	275	345	432	122	127	235	368	417	63	173	220	265	398	27	71	204	313	318
208	297	322	14	100	149	282	348	437	106	130	242	375	420	47	178	223	272	384	27	78
386	36	82	192	301	329	16	86	156	285	353	441	109	137	249	378	404	52	181	270	258
188	216	260	393	40	66	196	308	331	2	93	159	290	337	424	116	144	252	362	409	55
367	412	62	174	218	267	397	24	70	203	310	381	9	96	164	274	340	431	123	147	236
126	131	241	370	419	48	176	225	271	381	28	77	205	296	324	12	101	148	277	347	438
284	354	441	110	136	244	377	405	50	183	229	255	385	35	89	191	303	327	17	85	151

连续执行列 Z 变换，依次可得方: $\boldsymbol{A}_{0}$, $\boldsymbol{B}_{2}$, $\boldsymbol{B}_{12}$, $\boldsymbol{C}_{6}$, $\boldsymbol{B}_{17}$, $\boldsymbol{B}_{18}$, $\boldsymbol{C}_{21}$, $\boldsymbol{C}_{14}$, $\boldsymbol{B}_{9}$, $\boldsymbol{C}_{3}$, $\boldsymbol{B}_{20}$, $\boldsymbol{B}_{3}$, $\boldsymbol{C}_{9}$, $\boldsymbol{B}_{14}$, $\boldsymbol{B}_{21}$, $\boldsymbol{C}_{18}$, $\boldsymbol{B}_{5}$, $\boldsymbol{B}_{6}$, $\boldsymbol{C}_{12}$, $\boldsymbol{B}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{1}$. 对这些方再按原排列的循环排列进行列重排，可得由分段方 $\boldsymbol{A}$ 给出的全部 21 阶完美幻方.

列	行	π_{1}		π_{2}		π_{4}		π_{7}		π_{16}		π_{11}	
$\boldsymbol{B}_{1}$		Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
1	A_{0}	B_{2}	A_{1}	B_{3}	B_{20}	B_{5}	B_{18}	B_{9}	B_{14}	B_{17}	B_{6}	B_{12}	B_{11}
2	$\boldsymbol{B}_{2}$	B_{12}	A_{0}	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{3}$	B_{6}	C_{21}	C_{3}	B_{21}	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{C}_{12}$	C_{6}	A_{1}
3	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{C}_{6}$	$\boldsymbol{B}_{2}$	B_{14}	C_{6}	C_{12}	C_{14}	$\boldsymbol{B}_{20}$	$\boldsymbol{C}_{18}$	C_{21}	B_{11}	B_{17}	A_{0}
4	$\boldsymbol{C}_{6}$	$\boldsymbol{B}_{17}$	$\boldsymbol{B}_{12}$	B_{21}	B_{14}	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{B}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{3}$	$\boldsymbol{B}_{5}$	C_{14}	A_{1}	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{B}_{2}$
5	$\boldsymbol{B}_{17}$	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{C}_{6}$	C_{18}	B_{21}	A_{1}	C_{3}	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{6}$	B_{9}	A_{0}	C_{21}	B_{12}
6	$\boldsymbol{B}_{18}$	C_{21}	B_{17}	$\boldsymbol{B}_{3}$	$\boldsymbol{C}_{18}$	A_{0}	B_{20}	B_{14}	C_{12}	$\boldsymbol{C}_{3}$	$\boldsymbol{B}_{2}$	C_{14}	C_{6}
7	C_{21}	C_{14}	B_{18}	B_{6}	B_{5}	B_{2}	B_{3}	B_{21}	B_{11}	B_{20}	B_{12}	B_{9}	B_{17}
8	C_{14}	B_{9}	C_{21}	C_{12}	B_{6}	B_{12}	C_{9}	C_{18}	A_{1}	B_{3}	C_{6}	C_{3}	B_{18}
9	$\boldsymbol{B}_{9}$	C_{3}	C_{14}	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{C}_{12}$	C_{6}	B_{14}	B_{5}	A_{0}	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{17}$	B_{20}	C_{21}
10	$\boldsymbol{C}_{3}$	$\boldsymbol{B}_{20}$	$\boldsymbol{B}_{9}$	A_{1}	B_{11}	B_{17}	B_{21}	$\boldsymbol{B}_{6}$	$\boldsymbol{B}_{2}$	B_{14}	B_{18}	B_{3}	C_{14}
11	$\boldsymbol{B}_{20}$	$\boldsymbol{B}_{3}$	$\boldsymbol{C}_{3}$	A_{0}	A_{1}	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{C}_{18}$	$\boldsymbol{C}_{12}$	$\boldsymbol{B}_{12}$	B_{21}	C_{21}	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{9}$
12	$\boldsymbol{B}_{3}$	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{20}$	B_{2}	A_{0}	C_{21}	B_{5}	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{C}_{6}$	C_{18}	C_{14}	B_{14}	C_{3}
13	$\boldsymbol{C}_{9}$	B_{14}	B_{3}	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{B}_{2}$	C_{14}	B_{6}	A_{1}	B_{17}	$\boldsymbol{B}_{5}$	$\boldsymbol{B}_{9}$	B_{21}	B_{20}
14	B_{14}	B_{21}	C_{9}	C_{6}	B_{12}	B_{9}	C_{12}	A_{0}	B_{18}	B_{6}	C_{9}	C_{18}	B_{3}
15	B_{21}	C_{18}	B_{14}	B_{17}	C_{6}	C_{3}	B_{11}	B_{2}	C_{21}	C_{12}	B_{20}	B_{5}	C_{9}
16	$\boldsymbol{C}_{18}$	B_{5}	B_{21}	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{B}_{17}$	B_{20}	A_{1}	B_{12}	C_{14}	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{B}_{3}$	B_{6}	B_{14}
17	$\boldsymbol{B}_{5}$	$\boldsymbol{B}_{6}$	$\boldsymbol{C}_{18}$	C_{21}	B_{18}	B_{3}	A_{0}	$\boldsymbol{C}_{6}$	$\boldsymbol{B}_{9}$	A_{1}	C_{9}	C_{12}	B_{21}
18	$\boldsymbol{B}_{6}$	$\boldsymbol{C}_{12}$	$\boldsymbol{B}_{5}$	C_{14}	C_{21}	$\boldsymbol{C}_{9}$	$\boldsymbol{B}_{2}$	$\boldsymbol{B}_{17}$	$\boldsymbol{C}_{3}$	A_{0}	B_{14}	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{C}_{18}$
19	$\boldsymbol{C}_{12}$	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{B}_{6}$	B_{9}	C_{14}	B_{14}	B_{12}	$\boldsymbol{B}_{18}$	$\boldsymbol{B}_{20}$	B_{2}	B_{21}	A_{1}	B_{5}
20	$\boldsymbol{B}_{11}$	A_{1}	C_{12}	$\boldsymbol{C}_{3}$	$\boldsymbol{B}_{9}$	B_{21}	C_{6}	C_{21}	B_{3}	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{C}_{18}$	A_{0}	B_{6}
21	A_{1}	A_{0}	B_{11}	B_{20}	C_{3}	C_{18}	B_{17}	C_{14}	C_{9}	C_{6}	B_{5}	B_{2}	C_{12}

(35)

由上表以 $\boldsymbol{B}_1$ 为列线组可得 36 个 21 阶完美幻方(列、行、Ⅰ、Ⅱ均为黑体者). 再由幻和组分类表, 知对每一个幻和组都可以得到 36 个 21 阶完美幻方. 因此, 对每一个满足可幻条件 2 和对称性条件的排列所得到的分段方 $\boldsymbol{A}$ 都可构造出

$$36\times6\times4/4=216 \tag{36}$$

个对称的 21 阶完美幻方.

第9章　4阶完美幻方和偶阶对顶互补型完美幻方

现在讨论偶阶完美幻方的制作方法，首先是4阶完美幻方的制作.

一、4阶完美幻方

$n=4$,　$\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,16\}$,　$\varphi(4)=2$,　$\Sigma_4=34$.

以4级自然排列π=(1,2,3,4)为行序、列序作4阶分段方. 执行行、列Z变换得:

A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

B_1

1	2	3	4
6	7	8	5
11	12	9	10
16	13	14	15

列和　34

B_2

1	2	3	4
7	8	5	6
9	10	11	12
15	16	13	14
32	36	32	36

(1)

B_3

1	2	3	4
8	5	6	7
11	12	9	10
14	15	16	13

列和　34

C_2

1	10	3	12	26
5	14	7	16	42
9	2	11	4	26
13	6	15	8	42

其中B_1, B_3是列和方，幻和组；而B_2, C_2不是幻和组. 所以，只有两个幻和组，不能以此给出4阶完美幻方. 由于 $1+2+3+4=10=2\times5$，可作2×2等列阵，并得4级排列.

	1	2
	4	3
列和	5	5

$\rightarrow\pi=(1,2,4,3)$.以之为行、列序作分段方，及行、列Z变换得:

A				C_2			
1	2	4	3	1	14	4	15
5	6	8	7	5	10	8	11
13	14	16	15	13	2	16	3
9	10	12	11	9	6	12	7

行和　34

(2)

B_1				B_2				B_3			
1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3
6	8	7	5	8	7	5	6	7	5	6	8
16	15	13	14	13	14	16	15	16	15	13	14
11	9	10	12	12	11	9	10	10	12	11	9

列和　34

B_1, B_3, B_2, C_2 都是列、行和方，但它们分为三类，其中 B_1, B_3 是同类. 因为，例如它们的第一列有两个相同元. 在偶阶方阵中:

任一行线与任一列线有且只有一个交点，即一个共同元;

任一第 I 对角线与任一第 II 对角线或有两个共同元，或无共同元.

因此，B_1, B_3 只能做完美幻方的第 I , II 对角线组.而 B_2, C_2 可做行、列线组. 从而有 4 阶完美幻方:

A_1

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

列	行	I	II
B_2	C_2	B_1	B_3

(3)

在 A_1 中，加一条水平中线和一条垂直中线，可将 A_1 方分成 4 个 2 阶方:

A

P_1	P'_2
P_2	P'_1

$a \in P_i, a' \in P'_i \ (i = 1,2)$

$$a + a' = 17 \quad (4)$$

若方阵 A 满足(4)，即在对顶二方中，同位置二数相加总是常数 L = 17，则称 A 是对顶互补的. 对顶互补可推广到任意偶阶方阵，常数 L 称为互补常数.

可见 4 阶完美幻方 A_1 是对顶互补型的完美幻方(4). 现在，我们首先对 A_1 可能有的变换进行研究.

1. 逆序变换

这里对整方的行和列研究:

列逆序:

1	15	4	14
8	10	5	11
13	3	16	2
12	6	9	7

行逆序:

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

(5)

这种变换也可看成是 2, 4 列交换或 2, 4 行交换. 所得幻方与完美幻方(3)是相互同构的.

2. 对顶二方旋转并交换

这里"旋转"是旋转 180°. 在此种变换过程中，只有一对对顶二方变换，另一对顶二方保持不变. 例如,

保持(P_1, P'_1)不变，有:

A_2

1	14	7	12
8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6

保持(P_2, P'_2)不变，有:

6	9	4	15
3	16	5	10
13	2	11	8
12	7	14	1

(6)

这是两个同构的 4 阶完美幻方. 但与(3)是不同构的，记为 A_2. 对 A_2 先作列逆序，再作同样的变换可得:

A_3

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	6	5
14	7	9	4

(7)

3. 对子方的行或列的重排

即对(P_1, P'_1) 或(P_2, P'_2)作行或列的重排. 为保持对顶互补, 对顶方也作同样的行或列的重排. 如对(3)的 P_1 作行的重排, 所得如下:

8	11	4	15
1	14	5	10
13	2	9	6
12	7	16	3

(8)

可惜此方不是完美幻方. 再对之作 P_2 行的同样重排有:

8	11	5	10
1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3

(9)

这是与 A_1 同构的 4 阶完美幻方. 因此, 对子方的行或列的重排, 应对 P_1, P_2 同时进行, 而且还要保持顶互补性. 总之, 对偶阶对顶互补型完美幻方的变换必须在保持对顶互补的条件下进行. 对顶互补型完美幻方的组成小方本身, 不一定要求有完美性. 事实上, 2, 3 阶没有完美幻方. 但 4 阶, 4 阶以上则可以达到完美要求, 虽然不是一定要求的. 这里 A_1, A_2, A_3 都是互不同构的. 现在, 可以证明:

定理 1　只有 3 个基本的 4 阶完美幻方, 即 A_1, A_2, A_3.

证明　4 阶完美幻方, 由前面的做法知, 只能作出对顶互补型的. 数: 1,2,…,16 按互补配对为:

1　2　3　4　5　6　7　8
16　15　14　13　12　11　10　9　　列和　17　(10)

再按和为 9, 25 配对有:

1　2　3　4　　16　15　14　13
8　7　6　5　　9　10　11　12　(11)

在 P_1, P'_1 中, 先定 1, 8; 16, 9 对顶互补数:

P_1: 1 / 8　　P'_1: 16 / 9　(12)

由 2 阶方中 4 数之和都是 34 知, P_1 中另两位置只能是: 15, 10; 14, 11; 13, 12. 由此可定 P'_1 之另二数, 如:

P_1

1	15
8	10

P'_1

16	2
9	7

⟶

P_2

3	13
6	12

P'_2

14	4
11	5

(13)

从而得 4 阶完美幻方:

①

1	15	6	12
8	10	3	13
11	5	16	2
14	4	9	7

②

1	15	4	14
8	10	5	11
13	3	16	2
12	6	9	7

(14)

同样可得:

③

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

④

1	14	7	12
8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6

⑤

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

⑥

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

(15)

此6方中, ①、⑥; ②、③; ④、⑤分别是对应逆序的, 即是同构的. 因而, 互不同构的4阶完美幻方只有3个, 而且它们都是对顶互补的.

定理2 4阶完美幻方无平方性, 即无特优性.

证明 由 A_1, A_2, A_3 得所有的4阶完美幻方的对角线组成及其平方和如下:

I				平方和	II				平方和
1	11	16	6	414	1	10	16	7	406
14	5	3	12	374	14	8	3	9	350
4	10	13	7	334	4	11	13	6	342
15	8	2	9	372	15	5	2	12	398
8	5	9	12	314	6	7	11	10	306
15	14	2	3	434	13	16	4	1	442

(16)

没有平方和相等的第Ⅰ、第Ⅱ对角线. 因此, 不存在主对角线平方和相等的4阶完美幻方. 更高次的特优性也不存在.

由4阶完美幻方的构作方法知, 方中任意一个四方田字格都是一个4阶幻图. 在同构变换下可以有下列变化:

A　　B　　C

(17)

1977年, 美国发射的寻求外星文明的宇宙飞船旅行者1号、2号上, 除了有向宇宙人致意的问候信号外, 还带有一些图片. 这些图片中就有一张图是:

(18)

这就是4阶完美幻方:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

二、对顶互补型完美幻方的基本定理

设有偶阶 $n(=2r, r=2,3,\cdots)$方阵 $\boldsymbol{A}$, 若满足

$\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{Q'}$	$\boldsymbol{P'}$

$$a\in \boldsymbol{P}, a'\in \boldsymbol{P'}; b\in \boldsymbol{Q}, b'\in \boldsymbol{Q'}$$
$$a+a'=\mathrm{L}, \qquad b+b'=\mathrm{L}. \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P'}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q'}$ 是 r 阶方阵, $a,a'(b,b')$分别处于 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P'}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q'})$的对应相同位置. 常数 L 称为互补数, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是对顶互补的.

定理3 (对顶互补型完美幻方的必要条件)设 $\boldsymbol{A}$ 是由 r 阶方阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P'}$; $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q'}$ 组成的 $n(=2r)$阶对顶互补型的完美幻方. 则

$$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{P'}|=|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}| \tag{20}$$

这里$|\boldsymbol{A}|$表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素之和, 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的总值.

证明　由 $\boldsymbol{A}$ 的完美性, 有

$$|\boldsymbol{P}|+|\boldsymbol{Q}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|, \quad |\boldsymbol{P'}|+|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|,$$
$$|\boldsymbol{P}|+|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|, \quad |\boldsymbol{P'}|+|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|,$$
$$\longrightarrow \quad |\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P'}|, \quad |\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{Q'}|. \tag{21}$$

由对顶互补性又有

$$|\boldsymbol{P}|+|\boldsymbol{P'}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|, \quad |\boldsymbol{Q}|+|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|$$

因而

$$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P'}|=|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{Q'}|=\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|$$

由必要性条件, 立即可得结论.

定理4　设 $\boldsymbol{A}$ 是由连续自然数集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$组成的 n 阶对顶互补型完美幻方, 且 $n=2r$. 则 $2|r$, 即 $n=2^2k$ 是双2因数.

证明　此时, n 阶幻和为

$$\sum n=\frac{n(n^2+1)}{2}=r(n^2+1) \tag{22}$$

从而, $2|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}|+|\boldsymbol{Q}|=r\Sigma_n=r^2(n^2+1)$. n 是偶数, n^2+1 为奇数, 故 $2|r$. 即 $n=2^2k\ (k=1,2,\cdots)$.

定理4肯定了对于偶阶, 要在连续自然数集 F 上作出对顶互补型的完美幻方, 只能是双2因

数偶阶. 对单2因数偶阶 $n=2(2k+1),(k=1,2,\cdots)$, 在连续自然数集 $\mathbf{F}$ 上是不可能作出对顶互补型的完美幻方的. 要作, 只能在非连续自然数集上.

定理 5 设 $n=2(2k+1), (k=1,2,3,\cdots)$ 且 $\boldsymbol{A}$ 是对顶互补型完美幻方. 则

1. n 阶幻和 Σ_n 为偶数;
2. 互补数 L 是偶数.

证明 当 $\boldsymbol{A}$ 是非连续自然数组成的 n 阶对顶互补型完美幻方时, 其幻和

$$\Sigma_n=\frac{1}{2k+1}(|\boldsymbol{P}|+|\boldsymbol{P}'|)=\frac{1}{2k+1}(|\boldsymbol{Q}|+|\boldsymbol{Q}'|)$$
$$=\frac{(2k+1)^2\mathrm{L}}{2k+1}=(2k+1)\mathrm{L}$$

因而由必要性条件

$$2|P|=(2k+1)^2\mathrm{L}=(2k+1)\Sigma_n \tag{23}$$

所以, $2|\mathrm{L}, 2|\Sigma_n$.

定理 6 对于 $n=2(2k+1), (k=1,2,\cdots)$ 由互补数对

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n^2}{2}-1 & \frac{n^2}{2}; \\ n^2+1 & n^2 & n^2-1 & \cdots & \frac{n^2}{2}+3 & \frac{n^2}{2}+2 \end{matrix} \tag{24}$$

删去 $\frac{n^2}{2}+1$, 不能编制出 n 阶对顶互补型完美幻方.

证明 互补数 $\mathrm{L}=(n^2+1)+1=n^2+2=2[(2k+1)^2 2+1]$ 是偶数. 因而, 互补数对 a,a' 或同为偶数, 或同为奇数. 前者称为偶互补数对; 后者称为奇互补数对. 在上列互补数对中, 第 $1,3,\cdots,\frac{n^2}{2}-1$ 对是奇互补数对. 共有 $\frac{n^2}{4}=(2k+1)^2$ 个, 即奇数个奇互补数对, 其余为偶互补数对. 把这奇数个奇互补数对分配到 r 阶互补方 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$; $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}'$ 时, 必有一对互补方得奇数个奇互补数对, 例如 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$; 而另一对互补方 $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}'$ 中, 将有偶数个奇互补数对. 一个互补数对之二数 a, a' $(a+a'=\mathrm{L})$ 不可能处在同一个互补方中, 只能是若 $a\in\boldsymbol{P}$, 则 $a'\in\boldsymbol{P}'$ (或 $a\in\boldsymbol{Q}, a'\in\boldsymbol{Q}'$). 因此, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 之总值

$$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}'|=(2k+1)^2\frac{\mathrm{L}}{2}$$
$$=(2k+1)^2\frac{n^2+2}{2} \tag{25}$$
$$=(2k+1)^2[2(2k+1)^2+1]$$

为奇数; 但 $|\boldsymbol{Q}|,|\boldsymbol{Q}'|$ 之值必为偶数, 因为它们含有偶数个奇数和一些偶数. 故 $|\boldsymbol{P}|, |\boldsymbol{Q}|$ 不可能相等. 由定理 4 知不能编制 n 阶对顶互补的完美幻方.

定理 7 对于 $n=2(2k+1), (k=1,2,3,\cdots)$, 在互补数对

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \frac{n^2}{2}-1 & \frac{n^2}{2} & \frac{n^2}{2}+1; \\ n^2+3 & n^2+2 & n^2+1 & \cdots & \frac{n^2}{2}+5 & \frac{n^2}{2}+4 & \frac{n^2}{2}+3, \end{matrix} \tag{26}$$

中，删去$\frac{n^2}{2}+2$和：

1. 一个奇互补数对，余下数对不能偏制出对顶互补型的 n 阶完美幻方；

2. 一个偶互补数对，余下数对可以编制出对顶互补型的 n 阶完美幻方.

证明　此时，$L=n^2+4$. 因此，方 P, Q 之总值

$$
\begin{aligned}
|P|=|Q| &= (2k+1)^2\frac{L}{2} \\
&= (2k+1)^2\frac{n^2+4}{2} \\
&= 2(2k+1)^2[(2k+1)^2+1]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

为偶数. 而上列互补数对中共有$\frac{n^2}{4}+1=(2k+1)^2+1$个，其中有偶数个奇互补数对. 若

1. 删去一个奇互补数对，余下奇数个奇互补数对. 因此必有一对互补方获奇数个奇互补数对. 从而其对应方的总值，各为奇数. 与上述矛盾.

2. 删去一个偶互补数对，余下偶数个奇互补数对. 此时，仍可分配使 P, P', Q, Q' 的总值都是偶数. 从而仍有可能作出对顶互补的 n 阶完美幻方.

据定理 6、定理 7，欲用对顶互补法构作单 2 因数阶完美幻方，其互扑数对之互补数 L 可以增大，但 L 必须是偶数. 而且,其奇互扑数对之个数也必须是偶数. 这是构作对顶互补型完美幻方的必要条件. 在第 11 章，我们将给出很多的 6 阶、10 阶对顶互补型完美幻方.

定理 8　(性质定理)设 $n(=2r, r=2,3,4,\cdots)$，有 n 阶对顶互补型完美幻方 A.

$$
A=\begin{array}{|c|c|}\hline P & Q \\ \hline Q' & P' \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{l} a\in P,\quad a'\in P';\quad b\in Q,\quad b'\in Q' \\ a+a'=L,\quad b+b'=L.\end{array}
\tag{28}
$$

其中设各 r 方的第 i 行、第 j 列元，如：

$$
P=\begin{array}{|ccccc|}\hline & & a_{1j} & & \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ir} \\ & & \vdots & & \\ & & a_{rj} & & \\ \hline\end{array}
\tag{29}
$$

P', Q, Q' 同样类似表示. 则

1. $P, Q; P', Q'$ 的对应列元素和相等：

$$
\sum_i a_{ij}=\sum_i b_{ij},\ \sum_i a'_{ij}=\sum_i b'_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,r
\tag{30}
$$

2. $P, Q'; Q, P'$的对应行元素和相等：

$$
\sum_j a_{ij}=\sum_j b'_{ij},\ \sum_i b_{ij}=\sum_i a'_{ij}\qquad j=1,2,\cdots,r
\tag{31}
$$

证明　由 A 之幻方性

$$\sum_j a_{ij} + \sum_j b_{ij} = \sum_j b'_{ij} + \sum_j a'_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\sum_i a_{ij} + \sum_i b'_{ij} = \sum_i b_{ij} + \sum_i a'_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

由对顶互补性又有

$$\sum_j a_{ij} + \sum_j a'_{ij} = \sum_j b_{ij} + \sum_j b'_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\sum_i a_{ij} + \sum_i a'_{ij} = \sum_i b_{ij} + \sum_i b'_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

上下两式相减立得

$$\sum_i a_{ij} = \sum_i b_{ij}, \quad \sum_i b'_{ij} = \sum_i a'_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\sum_j a_{ij} = \sum_j b'_{ij}, \quad \sum_j b_{ij} = \sum_j a'_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

由此定理，对顶互补型的 $n(=2r)$阶完美幻方有如下变换：

1. 对顶二互补方可以相互交换.
2. 对顶二互补方中等值二行或二列可以对应交换. 所得完美幻方与原完美幻方不一定同构.

第10章　双2因数偶阶完美幻方

对于双2因数偶数 $n=2^2k,(k=1,2,3,\cdots)$，可以在连续的自然数集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 上，建立起 n 阶完美幻方. 例如, $n=4,8,12,16,20,\cdots$. 由于

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=2k(2^2k+1)=2\cdot k(2^2k+1)=k\cdot 2(2^2k+1) \tag{1}$$

因而, n 级排列 $\pi=(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_{2k},i_{2k+1},\cdots,i_n)$, $i_j\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, $j=1,2,3,\cdots,n$. 满足条件:

$$\begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{2k} \\ i_{2k+1} & i_{2k+2} & i_{2k+3} & \cdots & i_{4k} \\ \hline \Sigma & & 4k+1 & & \end{array} \tag{2}$$

令 $i_1=1$, 则 $i_{2k+1}=n=2^2k$. 满足条件(2)的 n 级排列, 称为可幻排列. 条件(2)成立,(1)中其他等值也能得到. 若再加上条件

$$\sum_{j=1}^{2k} i_j=\sum_{j=1}^{2k} i_{2k+j} \tag{3}$$

则所得可幻排列将会更有意义.

一、8阶完美幻方

$n=8=2^3$. 因为 $\varphi(8)=4$, 有 $\lambda(8)=\dfrac{3!2^3}{4}=12$ 个8 级可幻排列.

它们是:

1 2 3 4	1 7 4 3	1 4 2 3	1 4 3 2	1 3 2 4	1 6 4 2
8 7 6 5	8 2 5 6	8 5 7 6	8 5 6 7	8 6 7 5	8 3 5 7
1 2 3 5	1 2 5 3	1 5 2 3	1 5 3 2	1 3 2 5	1 3 5 2
8 7 6 4	8 7 4 6	8 4 7 6	8 4 6 7	8 6 7 4	8 6 4 7

(4)

拉成8级排列为:

$$\begin{array}{ll} (1,2,3,4,8,7,6,5) & (1,2,3,5,8,7,6,4) \\ (1,7,4,3,8,2,5,6) & (1,2,5,3,8,7,4,6) \\ (1,4,2,3,8,5,7,6) & (1,5,2,3,8,4,7,6) \\ (1,4,3,2,8,5,6,7) & (1,5,3,2,8,4,6,7) \\ (1,3,2,4,8,6,7,5) & (1,3,2,5,8,6,7,4) \\ (1,6,4,2,8,3,5,7) & (1,3,5,2,8,6,4,7) \end{array} \tag{5}$$

对 8 级可幻排列而言，条件(3)导致排列的前后两部分中 2, 3 与 7, 6 交换. 例如,

$$(1,2,3,4,8,7,6,5) \rightarrow (1,7,6,4,8,2,3,5) \tag{6}$$

在这些 8 级可幻排列下，完美幻方的构成要件为:

$$\mathbf{F} = \{1,2,3,\cdots,64\}, \quad \Sigma_8 = 260, \quad a + a' = 65, \tag{7}$$

例 1　取可幻排列π=(1,2,3,4,8,7,6,5)为行，列序构作分段方，并作列，行和方如下:

A (8)

1	2	3	4	8	7	6	5
9	10	11	12	16	15	14	13
17	18	19	20	24	23	22	21
25	26	27	28	32	31	30	29
57	58	59	60	64	63	62	61
49	50	51	52	56	55	54	53
41	42	43	44	48	47	46	45
33	34	35	36	40	39	38	37

B₁

1	2	3	4	8	7	6	5
10	11	12	16	15	14	13	9
19	20	24	23	22	21	17	18
28	32	31	30	29	25	26	27
64	63	62	61	57	58	59	60
55	54	53	49	50	51	52	56
46	45	41	42	43	44	48	47
37	33	34	35	36	40	39	38

B₇　列和 260

1	2	3	4	8	7	6	5
13	9	10	11	12	16	15	14
22	21	17	18	19	20	24	23
31	30	29	25	26	27	28	32
64	63	62	61	57	58	59	60
52	56	55	54	53	49	50	51
43	44	48	47	46	45	41	42
34	35	36	40	39	38	37	33

B₅

1	2	3	4	8	7	6	5
15	14	13	9	10	11	12	16
19	20	24	23	22	21	17	18
29	25	26	27	28	32	31	30
64	63	62	61	57	58	59	60
50	51	52	56	55	54	53	49
46	45	41	42	43	44	48	47
36	40	39	38	37	33	34	35

B₃　列和 260

1	2	3	4	8	7	6	5
12	16	15	14	13	9	10	11
22	21	17	18	19	20	24	23
26	27	28	32	31	30	29	25
64	63	62	61	57	58	59	60
53	49	50	51	52	56	55	54
43	44	48	47	46	45	41	42
39	38	37	33	34	35	36	40

B₂

1	2	3	4	8	7	6	5
11	12	16	15	14	13	9	10
24	23	22	21	17	18	19	20
30	29	25	26	27	28	32	31
57	58	59	60	64	63	62	61
51	52	56	55	54	53	49	50
48	47	46	45	41	42	43	44
38	37	33	34	35	36	40	39

B₆　列和 260

1	2	3	4	8	7	6	5
14	13	9	10	11	12	16	15
24	23	22	21	17	18	19	20
27	28	32	31	30	29	25	26
57	58	59	60	64	63	62	61
54	53	49	50	51	52	56	55
48	47	46	45	41	42	43	44
35	36	40	39	38	37	33	34

C₂

1	18	59	44	8	23	62	45
9	26	51	36	16	31	54	37
17	58	43	4	24	63	46	5
25	50	35	12	32	55	38	13
57	42	3	20	64	47	6	21
49	34	11	28	56	39	14	29
41	2	19	60	48	7	22	61
33	10	27	52	40	15	30	53

C₆　行和 260

1	42	59	20	8	47	62	21
9	34	51	28	16	39	54	29
17	2	43	60	24	7	46	61
25	10	35	52	32	15	38	53
57	18	3	44	64	23	6	45
49	26	11	36	56	31	14	37
41	58	19	4	48	63	22	5
33	50	27	12	40	55	30	13

B₄　列和 260

1	2	3	4	8	7	6	5
16	15	14	13	9	10	11	12
17	18	19	20	24	23	22	21
32	31	30	29	25	26	27	28
57	58	59	60	64	63	62	61
56	55	54	53	49	50	51	52
41	42	43	44	48	47	46	45
40	39	38	37	33	34	35	36

C₄　行和 260

1	58	3	60	8	63	6	61
9	50	11	52	16	55	14	53
17	42	19	44	24	47	22	45
25	34	27	36	32	39	30	37
57	2	59	4	64	7	62	5
49	10	51	12	56	15	54	13
41	18	43	20	48	23	46	21
33	26	35	28	40	31	38	29

以各方之第一列(或第一行)为代表: 和

									和
B_1	1	10	19	28	64	55	46	37	260
B_5	1	15	19	29	64	50	46	36	260
B_3	1	12	22	26	64	53	43	39	260
B_7	1	13	22	31	64	52	43	34	260
B_2	1	11	24	30	57	51	48	38	260
B_6	1	14	24	27	57	54	48	35	260
B_4	1	16	17	32	57	56	41	40	260
A_1	1	9	17	25	57	49	41	33	232
C_2	1	18	59	44	8	23	62	45	260
C_6	1	42	59	20	8	47	62	21	260
C_4	1	58	3	60	8	63	6	61	260
A_0	1	2	3	4	8	7	6	5	36

(9)

A_1, A_0 是分段方 A 的列线组和行线组, 它们不提供幻和组. 其余各方都是列和方或行和方, 分别提供一个 8 阶幻和组. 由第一线的分布可将它们分类如下:

第 1 线		相同元			
B_1	B_5	1	19	64	46
B_3	B_7	1	22	64	43
B_2	B_6	1	24	57	48
B_4	A_1	1	17	57	41
C_2	C_6	1	59	8	62
C_4	A_0	1	3	8	6

(10)

同大类各方不能同时作为一个方阵的行、列组; 同小类之方不能同时出现在一个方阵中. 选取任一列(行)和方, 执行行(列)Z 变换, 可得 8 阶完美幻方. π只有两个循环排列:

$$\pi_1 =(1\ 2\ 3\ 4\ 8\ 7\ 6\ 5);\quad \pi_3 =(1\ 4\ 6\ 2\ 8\ 5\ 3\ 7) \tag{11}$$

下面给出一些 8 阶完美幻方. 例如, 从 B_1, B_6, B_4 出发可得:

① B_1 ↓

1	20	62	42	8	21	59	47
10	32	53	35	15	25	52	38
19	63	41	4	22	58	48	5
28	54	34	16	29	51	39	9
64	45	3	23	57	44	6	18
55	33	12	30	50	40	13	27
46	2	24	61	43	7	17	60
37	11	31	49	36	14	26	56

② B_6 ↓

1	23	59	45	8	18	62	44
14	28	49	39	11	29	56	34
24	58	46	4	17	63	43	5
27	53	40	10	30	52	33	15
57	47	3	21	64	42	6	20
54	36	9	31	51	37	16	26
48	2	22	60	41	7	19	61
35	13	32	50	38	12	25	55

③ B_4 ↓

1	18	59	44	8	23	62	45
16	31	54	37	9	26	51	36
17	58	43	4	24	63	46	5
32	55	38	13	25	50	35	12
57	42	3	20	64	47	6	21
56	39	14	29	49	34	11	28
41	2	19	60	48	7	22	61
40	15	30	53	33	10	27	52

④

1	32	41	16	57	40	17	56
10	63	34	23	50	7	26	47
19	54	3	30	43	14	59	38
28	45	12	61	36	21	52	5
64	33	24	49	8	25	48	9
55	2	31	42	15	58	39	18
46	11	62	35	22	51	6	27
37	20	53	4	29	44	13	60

⑤

1	28	46	10	64	37	19	55
14	58	40	21	51	7	25	44
24	53	3	31	41	12	62	34
27	47	9	60	38	18	56	5
57	36	22	50	8	29	43	15
54	2	32	45	11	63	33	20
48	13	59	39	17	52	6	26
35	23	49	4	30	42	16	61

⑥

1	31	43	13	64	34	22	52
16	58	38	20	49	7	27	45
17	55	3	29	48	10	62	36
32	42	14	60	33	23	51	5
57	39	19	53	8	26	46	12
56	2	30	44	9	63	35	21
41	15	59	37	24	50	6	28
40	18	54	4	25	47	11	61

⑦

1	63	3	61	8	58	6	60
10	54	12	49	15	51	13	56
19	45	24	42	22	44	17	47
28	33	31	35	29	40	26	38
64	2	62	4	57	7	59	5
55	11	53	16	50	14	52	9
46	20	41	23	43	21	48	18
37	32	34	30	36	25	39	27

⑧

1	58	3	60	8	63	6	61
14	53	9	50	11	52	16	55
24	47	22	45	17	42	19	44
27	36	32	39	30	37	25	34
57	2	59	4	64	7	62	5
54	13	49	10	51	12	56	15
48	23	46	21	41	18	43	20
35	28	40	31	38	29	33	26

⑨

1	58	3	60	8	63	6	61
16	55	14	53	9	50	11	52
17	42	19	44	24	47	22	45
32	39	30	37	25	34	27	36
57	2	59	4	64	7	62	5
56	15	54	13	49	10	51	12
41	18	43	20	48	23	46	21
40	31	38	29	33	26	35	28

⑩

1	54	24	35	57	14	48	27
10	45	31	4	50	21	39	60
19	33	62	16	43	25	6	56
28	2	53	23	36	58	13	47
64	11	41	30	8	51	17	38
55	20	34	61	15	44	26	5
46	32	3	49	22	40	59	9
37	63	12	42	29	7	52	18

⑪

1	53	22	39	64	12	43	26
14	47	32	4	51	18	33	61
24	36	59	10	41	20	6	55
27	2	49	21	38	63	16	44
57	13	46	31	8	52	19	34
54	23	40	60	11	42	25	5
48	28	3	50	17	37	62	15
35	58	9	45	30	7	56	20

⑫

1	55	19	37	64	10	46	28
16	42	30	4	49	23	35	61
17	39	59	13	48	26	6	52
32	2	54	20	33	63	11	45
57	15	43	29	8	50	22	36
56	18	38	60	9	47	27	5
41	31	3	53	24	34	62	12
40	58	14	44	25	7	51	21

⑬

1	23	59	45	8	18	62	44
10	30	52	33	15	27	53	40
19	61	48	2	22	60	41	7
28	49	39	11	29	56	34	14
64	42	6	20	57	47	3	21
55	35	13	32	50	38	12	25
46	4	17	63	43	5	24	58
37	16	26	54	36	9	31	51

⑭

1	47	59	21	8	42	62	20
14	36	49	31	11	37	56	26
24	2	46	60	17	7	43	61
27	13	40	50	30	12	33	55
57	23	3	45	64	18	6	44
54	28	9	39	51	29	16	34
48	58	22	4	41	63	19	5
35	53	32	10	38	52	25	15

⑮

1	42	59	20	8	47	62	21
16	39	54	29	9	34	51	28
17	2	43	60	24	7	46	61
32	15	38	53	25	10	35	52
57	18	3	44	64	23	6	45
56	31	14	37	49	26	11	36
41	58	19	4	48	63	22	5
40	55	30	13	33	50	27	12

⑯

1	30	48	11	57	38	24	51
10	61	39	20	50	5	31	44
19	49	6	32	43	9	62	40
28	42	13	63	36	18	53	7
64	35	17	54	8	27	41	14
55	4	26	45	15	60	34	21
46	16	59	33	22	56	3	25
37	23	52	2	29	47	12	58

⑰

1	31	43	13	64	34	22	52
14	60	33	23	51	5	32	42
24	50	6	28	41	15	59	37
27	45	16	58	38	20	49	7
57	39	19	53	8	26	46	12
54	4	25	47	11	61	40	18
48	10	62	36	17	55	3	29
35	21	56	2	30	44	9	63

⑱

1	20	62	42	8	21	59	47
16	29	51	39	9	28	54	34
17	60	46	2	24	61	43	7
32	53	35	15	25	52	38	10
57	44	6	18	64	45	3	23
56	37	11	31	49	36	14	26
41	4	22	58	48	5	19	63
40	13	27	55	33	12	30	50

上列 18 方都是 8 阶完美幻方. 各方所用幻和组如下:

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱
列	B_1	B_6	B_4	B_1	B_6	B_4	B_1	B_6	B_4	B_1	B_6	B_4	B_1	B_6	B_4	B_1	B_6	B_4
行	C_6	C_2	C_2	B_4	B_7	B_7	C_4	C_4	C_4	B_6	B_3	B_1	C_2	C_6	C_6	B_2	B_7	C_6
Ⅰ	B_4	B_1	B_7	C_4	C_4	C_4	B_6	B_3	B_1	C_2	C_6	C_6	B_2	B_5	B_3	C_4	C_4	B_5
Ⅱ	B_2	B_7	B_5	C_6	C_2	C_2	B_4	B_1	B_7	C_4	C_4	C_4	B_4	B_3	B_1	C_2	C_6	B_7

(12)

在这 14 方中④与⑫, ⑤ 与⑩是相互同构的. 因此只有 11 个基本的 8 阶完美幻方. 其中②、③、⑧、⑨、⑭、⑮、⑱是对顶互补型的. 上列各方还可按π_3 进行列或行的重排.

给定一个分段方, 由之产生的幻和组: B_1, B_5, B_3, B_7 分别可产生6个基本的8阶完美幻方; B_2, B_6, B_4 或 C_2, C_6, C_4 分别可产生 10 个基本的 8 阶完美幻方. 因此, 由一个分段可得

$$(4\times6+6\times10)\div4=42 \tag{13}$$

个基本的 8 阶完美幻方. 再由 12 个可幻排列总共可得

$$12^2\times42=6048 \tag{14}$$

个基本的 8 阶完美幻方. 对 B_1, B_7, B_3, B_5 分别计算各列 2 次和, 3 次和并构作以之为对角线组的完美幻方, 可得 3 次特优的 8 阶完美幻方.

								2 次和	3 次和									2 次和	3 次和
1	10	19	28	64	55	46	37	11852	B_1	1	13	22	31	64	52	43	34	11420	564200
2	11	20	32	63	54	45	33	11548		2	9	21	30	63	56	44	35	11692	B_7
3	12	24	31	62	53	41	34	11180	540800	3	10	17	29	62	55	48	36	11708	
4	16	23	30	61	49	42	35	10812		4	11	18	25	61	54	47	40	11532	
8	15	22	29	57	50	43	36	10508		8	12	19	26	57	53	46	39	10940	517400
7	14	21	25	58	51	44	40	10812		7	16	20	27	58	49	45	38	10668	
6	13	17	26	59	52	48	39	11180	540800	6	15	24	28	59	50	41	37	10652	
5	9	18	27	60	56	47	38	11548		5	14	23	32	60	51	42	33	10828	

1	15	19	29	64	50	46	36	11436	B_5	1	12	22	26	64	53	43	39	11580	B_3
2	14	20	25	63	51	45	40	11420	564200	2	16	21	27	63	49	44	38	11180	540800
3	13	24	26	62	52	41	39	11180	540800	3	15	17	28	62	50	48	37	11324	
4	9	23	27	61	56	42	38	11420	564200	4	14	18	32	61	51	47	33	11180	540800
8	10	22	28	57	55	43	37	10924		8	13	19	31	57	52	46	34	11780	
7	11	21	32	58	54	44	33	10940	517400	7	9	20	30	58	56	45	35	11180	540800
6	12	17	31	59	53	48	34	11180	540800	6	10	24	29	59	55	41	36	11036	
5	16	18	30	60	49	47	35	10940	517400	5	11	23	25	60	54	42	40	11180	

以 $B_1, B_3; B_3, B_5$ 为对角线组(⑦,⑮,⑭等)可得如下 3 次特优的 8 阶完美幻方:

① 列 B_2 行 C_2							ⅠB_5ⅡB_3	②		C_6					$B_5 B_3$	③		C_4					$B_1 B_3$
39	11	29	56	34	14	28	49	39	54	29	9	34	51	28	16	53	11	55	9	52	14	50	16
5	24	58	46	4	17	63	43	5	41	58	19	4	48	63	22	42	24	45	19	47	17	44	22
10	30	52	33	15	27	53	40	10	35	52	32	15	38	53	25	36	30	34	32	37	27	39	25
20	57	47	3	21	64	42	6	20	8	47	62	21	1	42	59	7	57	4	62	2	64	5	59
31	51	37	16	26	54	36	9	31	14	37	49	26	11	36	56	13	51	15	49	12	54	10	56
61	48	2	22	60	41	7	19	61	17	2	43	60	24	7	46	18	48	21	43	23	41	20	46
50	38	12	25	55	35	13	32	50	27	12	40	55	30	13	33	28	38	26	40	29	35	31	33
44	1	23	59	45	8	18	62	44	64	23	6	45	57	18	3	63	1	60	6	58	8	61	3
④ 列 B_6 行 C_2							$B_5 B_3$	⑤		C_6					$B_5 B_3$	⑥		C_4					$B_1 B_3$
3	20	64	47	6	21	57	42	26	14	36	49	31	11	37	56	53	14	55	16	52	11	50	9
9	26	51	36	16	31	54	37	61	24	2	46	60	17	7	43	47	24	44	19	42	17	45	22
22	61	41	2	19	60	48	7	55	27	13	40	50	30	12	33	36	27	34	25	37	30	39	32
32	55	38	13	25	50	35	12	44	57	23	3	45	64	18	6	2	57	5	62	7	64	4	59
59	44	8	23	62	45	1	18	34	54	28	9	39	51	29	16	13	54	15	56	12	51	10	49
49	34	11	28	56	39	14	29	5	48	58	22	4	41	63	19	23	48	20	43	18	41	21	46
46	5	17	58	43	4	24	63	15	35	53	32	10	38	52	25	28	35	26	33	29	38	31	40
40	15	30	53	33	10	27	52	20	1	47	59	21	8	42	62	58	1	91	6	63	8	60	3
⑦ 列 B_4 行 C_2							$B_1 B_3$	⑧		C_6					$B_1 B_3$	⑨		C_4					$B_5 B_3$
12	38	50	32	13	35	55	25	53	38	15	32	52	35	10	25	26	38	28	33	31	35	29	40
21	3	47	57	20	6	42	64	44	3	18	57	45	6	23	64	63	3	61	8	58	6	60	1
28	14	34	56	29	11	39	49	37	14	31	56	36	11	26	49	50	14	52	9	55	11	53	16
61	19	7	41	60	22	2	48	4	19	58	41	5	22	63	48	47	19	45	24	42	22	44	17
52	30	10	40	53	27	15	33	13	30	55	40	12	27	50	33	34	30	36	25	39	27	37	32
45	59	23	1	44	62	18	8	20	59	42	1	21	62	47	8	7	59	5	64	2	62	4	57
36	54	26	16	37	51	31	9	29	54	39	16	28	51	34	9	10	54	12	49	15	51	13	56
5	43	63	17	4	46	58	24	60	43	2	17	61	46	7	24	23	43	21	48	18	46	20	41

上列 9 方的主对角线都有: 260 11180 540800

57	42	3	20	64	47	6	21	⑩B_4 C_2	57	44	6	18	64	45	3	23	⑪B_4 C_6
56	39	14	29	49	34	11	28		32	53	35	15	25	52	38	10	
41	2	19	60	48	7	22	61	B_7 B_5	17	60	46	2	24	61	43	7	B_7 B_5
40	15	30	53	33	10	27	52		16	29	51	39	9	28	54	34	
1	18	59	44	8	23	62	45		1	20	62	42	8	21	59	47	260
16	31	54	37	9	26	51	36		40	13	27	55	33	12	30	50	10940
17	58	43	4	24	63	46	5		41	4	22	58	48	5	19	63	517400
32	55	38	13	25	50	35	12		56	37	11	31	49	36	14	26	
1	18	59	44	8	23	62	45	⑫B_4 C_2	1	20	62	42	8	21	59	47	⑬B_4 C_6
16	31	54	37	9	26	51	36		40	13	27	55	33	12	30	50	
17	58	43	4	24	63	46	5	B_7 B_5	41	4	22	58	48	5	19	63	B_7 B_5
32	55	38	13	25	50	35	12		56	37	11	31	49	36	14	26	260
57	42	3	20	64	47	6	21		57	44	6	18	64	45	3	23	11420
56	39	14	29	49	34	11	28		32	53	35	15	25	52	38	10	564200
41	2	19	60	48	7	22	61		17	60	46	2	24	61	43	7	
40	15	30	53	33	10	27	52		16	29	51	39	9	28	54	34	

例 2 分别以可幻排列(1,3,2,4,8,6,7,5), (1,3,2,5,8,6,7,4)为行、列序给出 8 阶分段方:

A_1																			A_2
	1	1	3	2	4	8	6	7	5	1	1	3	2	5	8	6	7	4	
	3	17	19	18	20	24	22	23	21	3	17	19	18	21	24	22	23	20	
	2	9	11	10	12	16	14	15	13	2	9	11	10	13	16	14	15	12	
	5	33	35	34	36	40	38	39	37	4	25	27	26	29	32	30	31	28	
	8	57	59	58	60	64	62	63	61	8	57	59	58	61	64	62	63	60	
	6	41	43	42	44	48	46	47	45	6	41	43	42	45	48	46	47	44	
	7	49	51	50	52	56	54	55	53	7	49	51	50	53	56	54	55	52	
	4	25	27	26	28	32	30	31	29	5	33	35	34	37	40	38	39	36	

1	19	10	36	64	46	55	29	11836	A_1B_1	1	19	10	29	64	46	55	36	11836	A_2B_1
3	18	12	40	62	47	53	25	11564		3	18	13	32	62	47	52	33	10372	559520
2	20	16	38	63	45	49	27	11228		2	21	16	30	63	44	49	35	11132	
4	24	14	39	61	41	51	26	10988	522080	5	24	14	31	60	41	51	34	10796	
8	22	15	37	57	43	50	28	10524		8	22	15	28	57	43	50	37	10524	
6	23	13	33	59	42	52	32	10796		6	23	12	25	59	42	53	40	10988	522080
7	21	9	35	58	44	56	30	11132		7	20	9	27	58	45	56	38	11228	
5	17	11	34	60	48	54	31	11372	559520	4	17	11	26	61	48	54	39	11564	
1	22	10	37	64	43	55	28	11708	B_5	1	22	10	28	64	43	55	37	11708	
3	23	12	33	62	42	53	32	11212	543920	3	23	13	25	62	42	52	40	11244	B_5
2	21	16	35	63	44	49	30	11132		2	20	16	27	63	45	49	38	11228	
4	17	14	34	61	48	51	31	11244		5	17	14	26	60	48	51	39	11212	
8	19	15	36	57	46	50	29	10652		8	19	15	29	57	46	50	36	10652	
6	18	13	40	59	47	52	25	11148	537680	6	18	12	32	59	47	53	33	11116	
7	20	9	38	58	45	56	27	11228		7	21	9	30	58	44	56	35	11132	
5	24	11	39	60	41	54	26	11116		4	24	11	31	61	41	54	34	11148	
1	20	15	35	64	45	50	30	11372	559520	1	21	15	27	64	44	50	38	11372	559520
3	24	13	34	62	41	52	31	11100	B_3	3	24	12	26	62	41	53	39	11260	B_3
2	22	9	36	63	43	56	29	11660		2	22	9	29	63	43	56	36	11660	
4	23	11	40	61	42	54	25	11292		5	23	11	32	60	42	54	33	11068	
8	21	10	38	57	44	55	27	10988	522080	8	20	10	30	57	45	55	35	10988	522080
6	17	12	39	59	48	53	26	11260		6	17	13	31	59	48	52	34	11100	
7	19	16	37	58	46	49	28	10700		7	19	16	28	58	46	49	37	10700	
5	18	14	33	60	47	51	32	11068		4	18	14	25	61	47	51	40	10292	
1	21	15	38	64	44	50	27	11372	559520	1	20	15	30	64	45	50	35	11372	559520
3	17	13	39	62	48	52	26	11516	B_7	3	17	12	31	62	48	53	34	11516	B_7
2	19	9	37	63	46	56	28	11820		2	19	9	28	63	46	56	37	11820	
4	18	11	33	61	47	54	32	11420		5	18	11	25	60	47	54	40	11420	
8	20	10	35	57	45	55	30	10988	522080	8	21	10	27	57	44	55	38	10988	522080
6	24	12	34	59	41	53	31	10844		6	24	13	26	59	41	52	39	10844	
7	22	16	36	58	43	49	29	10540		7	22	16	29	58	43	49	36	10540	
5	23	14	40	60	42	51	25	10940		4	23	14	32	61	42	51	33	10940	

可见, 给定两个 8 阶可幻排列, 分别作为行、列序所得的分段方 A_1, A_2 所导出的 $B_1, B_5; B_3, B_7$ 的各次和分别有对应相等的结果. 特别地, 各方的第一、四列的组成对应完全相同. 这结果显然可以推广到一般的双偶数阶.

1	18	16	39	57	42	56	31	11212	533936	A_1	1	11	58	52	8	14	63	53	A_1
3	20	14	37	59	44	54	29	11148	533840	B_2	17	35	42	28	24	38	47	29	C_2
2	24	15	33	58	48	55	25	11212	540848		9	59	50	4	16	62	55	5	
4	22	13	35	60	46	53	27	11148	537680		33	43	26	20	40	46	31	21	
8	23	9	34	64	47	49	26	11212	553904		57	51	2	12	64	54	7	13	
6	21	11	36	62	45	51	28	11148	541520		41	27	18	36	48	30	23	37	
7	17	10	40	63	41	50	32	11212	546992		49	3	10	60	56	6	15	61	
5	19	12	38	61	43	52	30	11148	537680		25	19	34	44	32	22	39	45	

1	23	16	34	57	47	56	26	11212	537776		1	51	58	12	8	54	63	13	13228
3	21	14	36	59	45	54	28	11148	534608	B_6	17	27	42	36	24	30	47	37	9132
2	17	15	40	58	41	55	32	11212	535472		9	3	50	60	16	6	55	61	C_6
4	19	13	38	60	43	53	30	11148	535376		33	19	26	44	40	22	31	45	9132
8	18	9	39	64	42	49	31	11212	550064		57	11	2	52	64	14	7	53	13228
6	20	11	37	62	44	51	29	11148	540752		41	35	18	28	48	38	23	29	
7	24	10	33	63	48	50	25	11212	552368		49	59	10	4	56	62	15	5	
5	22	12	35	61	46	52	27	11148	539984		25	43	34	20	32	46	39	21	
1	24	9	40	57	48	49	32	11236			1	59	2	60	8	62	7	61	
3	22	11	38	59	46	51	30	11156	B_4		17	43	18	44	24	46	23	45	C_4
2	23	10	39	58	47	50	31	11188			9	51	10	52	16	54	15	53	
4	21	12	37	60	45	52	29	11140			33	27	34	28	40	30	39	29	
8	17	16	33	64	41	56	25	11236			57	3	58	4	64	6	63	5	
6	19	14	35	62	43	54	27	11156			41	19	42	20	48	22	47	21	
7	18	15	34	63	42	55	26	11188			49	11	50	12	56	14	55	13	
5	20	13	36	61	44	53	28	11140			25	35	26	36	32	38	31	37	
1	17	16	40	57	41	56	32	B_0			1	3	58	60	8	6	63	61	C_0
3	19	14	38	59	43	54	30				17	19	42	44	24	22	47	45	
2	18	15	39	58	42	55	31				9	11	50	52	16	14	55	53	
4	20	13	37	60	44	53	29				33	35	26	28	40	38	31	29	
8	24	9	33	64	48	49	25				57	59	2	4	64	62	7	5	
6	22	11	35	62	46	51	27				41	43	18	20	48	46	23	21	
7	23	10	34	63	47	50	26				49	51	10	12	56	54	15	13	
5	21	12	36	61	45	52	28				25	27	34	36	32	30	39	37	
1	24	16	33	57	48	56	25	B_8			1	59	58	4	8	62	63	5	C_8
3	22	14	35	59	46	54	27				17	43	42	20	24	46	47	21	
2	23	15	34	58	47	55	26				9	51	50	12	16	54	55	13	
4	21	13	36	60	45	53	28				33	27	26	36	40	30	31	37	
8	17	9	40	64	41	49	32				57	3	2	60	64	6	7	61	
6	19	11	38	62	43	51	30				41	19	18	44	48	22	23	45	
7	18	10	39	63	42	50	31				49	11	10	52	56	14	15	53	
5	20	12	37	61	44	52	29				25	35	34	28	32	38	39	29	

再由计算可证实：只有以列和方 $B_1, B_5; B_3, B_7$ 为对角线组才能给出具有特优性的完美幻方，所得如下：

行 C_2 列 B_4 ⅠB_3ⅡB_1

38	47	29	17	35	42	28	24
3	10	60	56	6	15	61	49
46	31	21	33	43	26	20	40
11	58	52	8	14	63	53	1
30	23	37	41	27	18	36	48
59	50	4	16	62	55	5	9
22	39	45	25	19	34	44	32
51	2	12	64	54	7	13	57

行 C_2 列 B_8 ⅠB_3ⅡB_1

38	47	29	17	35	42	28	24
62	55	5	9	59	50	4	16
19	34	44	32	22	39	45	25
11	58	52	8	14	63	53	1
30	23	37	41	27	18	36	48
6	15	61	49	3	10	60	56
43	26	20	40	46	31	21	33
51	2	12	64	54	7	13	57

行 C_2 列 B_6 ⅠB_7ⅡB_1

20	40	46	31	21	33	43	26
62	55	5	9	59	50	4	16
29	17	35	42	28	24	38	47
11	58	52	8	14	63	53	1
44	32	22	39	45	25	19	34
6	15	61	49	3	10	60	56
37	41	27	18	36	48	30	23
51	2	12	64	54	7	13	57

行 C_2 列 B_0 ⅠB_3ⅡB_1

27	18	36	48	30	23	37	41
62	55	5	9	59	50	4	16
46	31	21	33	43	26	20	40
11	58	52	8	14	63	53	1
35	42	28	24	38	47	29	17
6	15	61	49	3	10	60	56
22	39	45	25	19	34	44	32
51	2	12	64	54	7	13	57

行 C_2 列 B_2 ⅠB_7ⅡB_1

45	25	19	34	44	32	22	39
62	55	5	9	59	50	4	16
36	48	30	23	37	41	27	18
11	58	52	8	14	63	53	1
21	33	43	26	20	40	46	31
6	15	61	49	3	10	60	56
28	24	38	47	29	17	35	42
51	2	12	64	54	7	13	57

C_6 B_4 ⅠB_3ⅡB_1

44	40	22	31	45	33	19	26
53	57	11	2	52	64	14	7
28	48	38	23	29	41	35	18
5	49	59	10	4	56	62	15
20	32	46	39	21	25	43	34
13	1	51	58	12	8	54	63
36	24	30	47	37	17	27	42
61	9	3	50	60	16	6	55

C_6B_0 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

44	40	22	31	45	33	19	26
53	57	11	2	52	64	14	7
37	17	27	42	36	24	30	47
60	16	6	55	61	9	3	50
20	32	46	39	21	25	43	34
13	1	51	58	12	8	54	63
29	41	35	18	28	48	38	23
4	56	62	15	5	49	59	10

C_4B_2 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

55	13	49	11	50	12	56	14
33	27	34	28	40	30	39	29
2	60	8	62	7	61	1	59
48	22	47	21	41	19	42	20
15	53	9	51	10	52	16	54
25	35	26	36	32	38	31	37
58	4	64	6	63	5	57	3
24	46	23	45	17	43	18	44

C_0B_2 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

55	53	9	11	50	52	16	14
25	27	34	36	32	30	39	37
58	60	8	6	63	61	1	3
48	46	23	21	41	43	18	20
15	13	49	51	10	12	56	54
33	35	26	28	40	38	31	29
2	4	64	62	7	5	57	59
24	22	47	45	17	19	42	44

C_6B_8 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

21	25	43	34	20	32	46	39
53	57	11	2	52	64	14	7
28	48	38	23	29	41	35	18
60	16	6	55	61	9	3	50
45	33	19	26	44	40	22	31
13	1	51	58	12	8	54	63
36	24	30	47	37	17	27	42
4	56	62	15	5	49	59	10

C_4B_6 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

55	13	49	11	50	12	56	14
32	38	31	37	25	35	26	36
2	60	8	62	7	61	1	59
17	43	18	44	24	46	23	45
15	53	9	51	10	52	16	54
40	30	39	29	33	27	34	28
58	4	64	6	63	5	57	3
41	19	42	20	48	22	47	21

C_0B_6 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

55	53	9	11	50	52	16	14
40	38	31	29	33	35	26	28
58	60	8	6	63	61	1	3
17	19	42	44	24	22	47	45
15	13	49	51	10	12	56	54
32	30	39	37	25	27	34	36
2	4	64	62	7	5	57	59
41	43	18	20	48	46	23	21

C_6B_2 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

35	18	28	48	38	23	29	41
53	57	11	2	52	64	14	7
22	31	45	33	19	26	44	40
60	16	6	55	61	9	3	50
27	42	36	24	30	47	37	17
13	1	51	58	12	8	54	63
46	39	21	25	43	34	20	32
4	56	62	15	5	49	59	10

C_4B_4 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

10	52	16	54	15	53	9	51
23	45	17	43	18	44	24	46
2	60	8	62	7	61	1	59
31	37	25	35	26	36	32	38
50	12	56	14	55	13	49	11
47	21	41	19	42	20	48	22
58	4	64	6	63	5	57	3
39	29	33	27	34	28	40	30

C_0B_4 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

10	12	56	54	15	13	49	51
47	45	17	19	42	44	24	22
58	60	8	6	63	61	1	3
31	29	33	35	26	28	40	38
50	52	16	14	55	53	9	11
23	21	41	43	18	20	48	46
2	4	64	62	7	5	57	59
39	37	25	27	34	36	32	30

C_6B_6 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

30	47	37	17	27	42	36	24
53	57	11	2	52	64	14	7
43	34	20	32	46	39	21	25
60	16	6	55	61	9	3	50
38	23	29	41	35	18	28	48
13	1	51	58	12	8	54	63
19	26	44	40	22	31	45	33
4	56	62	15	5	49	59	10

C_4B_0 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

55	13	49	11	50	12	56	14
42	20	48	22	47	21	41	19
2	60	8	62	7	61	1	59
31	37	25	35	26	36	32	38
15	53	9	51	10	52	16	54
18	44	24	46	23	45	17	43
58	4	64	6	63	5	57	3
39	29	33	27	34	28	40	30

C_0B_0 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

55	53	9	11	50	52	16	14
18	20	48	46	23	21	41	43
58	60	8	6	63	61	1	3
31	29	33	35	26	28	40	38
15	13	49	51	10	12	56	54
42	44	24	22	47	45	17	19
2	4	64	62	7	5	57	59
39	37	25	27	34	36	32	30

C_8B_2 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

57	3	2	60	64	6	7	61
18	44	48	22	23	45	41	19
16	54	55	13	9	51	50	12
31	37	33	27	26	36	40	30
1	59	58	4	8	62	63	5
42	20	24	46	47	21	17	43
56	14	15	53	49	11	10	52
39	29	25	35	34	28	32	38

C_4B_8 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

55	13	49	11	50	12	56	14
23	45	17	43	18	44	24	46
2	60	8	62	7	61	1	59
34	28	40	30	39	29	33	27
15	53	9	51	10	52	16	54
47	21	41	19	42	20	48	22
58	4	64	6	63	5	57	3
26	36	32	38	31	37	25	35

C_0B_8 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

55	53	9	11	50	52	16	14
47	45	17	19	42	44	24	22
58	60	8	6	63	61	1	3
34	36	32	30	39	37	25	27
15	13	49	51	10	12	56	54
23	21	41	43	18	20	48	46
2	4	64	62	7	5	57	59
26	28	40	38	31	29	33	35

C_8B_6 $\mathrm{I}B_3\mathrm{II}B_1$

57	3	2	60	64	6	7	61
47	21	17	43	42	20	24	46
16	54	55	13	9	51	50	12
34	28	32	38	39	29	25	35
1	59	58	4	8	62	63	5
23	45	41	19	18	44	48	22
56	14	15	53	49	11	10	52
26	36	40	30	31	37	33	27

C_8B_4 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

57	3	2	60	64	6	7	61
40	30	31	37	33	27	26	36
49	11	10	52	56	14	15	53
48	22	23	45	41	19	18	44
1	59	58	4	8	62	63	5
32	38	39	29	25	35	34	28
9	51	50	12	16	54	55	13
24	46	47	21	17	43	42	20

C_8B_0 $\mathrm{I}B_7\mathrm{II}B_1$

57	3	2	60	64	6	7	61
40	30	31	37	33	27	26	36
16	54	55	13	9	51	50	12
17	43	42	20	24	46	47	21
1	59	58	4	8	62	63	5
32	38	39	29	25	35	34	28
56	14	15	53	49	11	10	52
41	19	18	44	48	22	23	45

C_8B_8			ⅠB_7ⅡB_1				
57	3	2	60	64	6	7	61
25	35	34	28	32	38	39	29
16	54	55	13	9	51	50	12
48	22	23	45	41	19	18	44
1	59	58	4	8	62	63	5
33	27	26	36	40	30	31	37
56	14	15	53	49	11	10	52
24	46	47	21	17	43	42	20

左列对 A_1 共得 25 方，且各含有 2 个 3 次特优的 8 阶完美幻方. 因此，这里已给出 25×2 = 50 个 3 次特优的 8 阶完美幻方. 对 A_2 可类似同样得到 25 方.

各方有两条 3 次特优对角线:

1 次和	260	260
2 次和	10988	11372
3 次和	522080	559520

例 3　以满足条件(3)的排列(1,4,7,6,8,5,2,3)为行、列序作分段方:

A

1	4	7	6	8	5	2	3	18+18
25	28	31	30	32	29	26	27	114+114
49	52	55	54	56	53	50	51	210+210
41	44	47	46	48	45	42	43	178+178
57	60	63	62	64	61	58	59	242+242
33	36	39	38	40	37	34	35	146+146
9	12	15	14	16	13	10	11	50+50
17	20	23	22	24	21	18	19	82+82
116	128	140	136	×2				520+
	144	132	120	124 ×2				520

(15)

这样的排列为行、列序作分段方可均分为 4 个小 4 阶方. 使得同行两部分，同列上下两部分分别是相等的，且各小 4 阶方中所有元素之总和也是相等.

1	28	55	46	64	37	10	19	11852	B_1
4	31	54	48	61	34	11	17	11484	
7	30	56	45	58	35	9	20	11180	
6	32	53	42	59	33	12	23	10876	
8	29	50	43	57	36	15	22	10508	
5	26	51	41	60	39	14	24	10876	
2	27	49	44	63	38	16	21	11180	
3	25	52	47	62	40	13	18	11484	

1	30	50	44	64	35	15	21	11324	B_3
4	32	51	47	61	33	14	18	11180	540800
7	29	49	46	58	36	16	19	10684	
6	26	52	48	59	39	13	17	11180	540800
8	27	55	45	57	38	10	20	11036	
5	25	54	42	60	40	11	23	11180	540800
2	28	56	43	63	37	9	22	11676	
3	31	53	41	62	34	12	24	11180	540800

1	29	55	43	64	36	10	22	11692	B_5
4	26	54	41	61	39	11	24	11228	
7	27	56	44	58	38	9	21	11180	
6	25	53	47	59	40	12	18	11228	
8	28	50	46	57	37	15	19	10668	
5	31	51	48	60	34	14	17	11132	
2	30	49	45	63	35	16	20	11180	
3	32	52	42	62	33	13	23	11132	

1	27	50	45	64	38	15	20	11420	B_7
4	25	51	42	61	40	14	23	11052	
7	28	49	43	58	37	16	22	10556	
6	31	52	41	59	34	13	24	10764	
8	30	55	44	57	35	10	21	10940	
5	32	54	47	60	33	11	18	11308	
2	29	56	46	63	36	9	19	11804	
3	26	53	48	62	39	12	17	11596	

各行的 1 次和 260、2 次和 11180、3 次和 540800, 4 次和不等. 因此，可得 3 次特优的 8 阶完美幻方. 其余各列、行和方的 2 次和以上不必计算.

行 C_2 列 B_4			ⅠB_3ⅡB_1				
4	55	62	16	5	50	59	9
37	18	27	41	36	23	30	48
52	63	14	8	53	58	11	1
21	26	43	33	20	31	46	40
60	15	6	56	61	10	3	49
29	42	35	17	28	47	38	24
12	7	54	64	13	2	51	57
45	34	19	25	44	39	22	32

C_6B_4		B_3B_1					
51	1	12	63	54	8	13	58
46	32	21	34	43	25	20	39
59	49	4	15	62	56	5	10
38	48	29	18	35	41	28	23
11	57	52	7	14	64	53	2
22	40	45	26	19	33	44	31
3	9	60	55	6	16	61	50
30	24	37	42	27	17	36	47

C_6B_4		B_3B_1					
51	1	12	63	54	8	13	58
46	32	21	34	43	25	20	39
59	49	4	15	62	56	5	10
38	48	29	18	35	41	28	23
11	57	52	7	14	64	53	2
22	40	45	26	19	33	44	31
3	9	60	55	6	16	61	50
30	24	37	42	27	17	36	47

行 C_2 列 B_0 Ⅰ B_3 Ⅱ B_1

61	10	3	49	60	15	6	56
37	18	27	41	36	23	30	48
52	63	14	8	53	58	11	1
44	39	22	32	45	34	19	25
5	50	59	9	4	55	62	16
29	42	35	17	28	47	38	24
12	7	54	64	13	2	51	57
20	31	46	40	21	26	43	33

$C_6 B_0$ B_3B_1

51	1	12	63	54	8	13	58
19	33	44	31	22	40	45	26
6	16	61	50	3	9	60	55
38	48	29	18	35	41	28	23
11	57	52	7	14	64	53	2
43	25	20	39	46	32	21	34
62	56	5	10	59	49	4	15
30	24	37	42	27	17	36	47

$C_6 B_4$ B_3B_1

11	57	52	7	14	64	53	2
22	40	45	26	19	33	44	31
3	9	60	55	6	16	61	50
30	24	37	42	27	17	36	47
51	1	12	63	54	8	13	58
46	32	21	34	43	25	20	39
59	49	4	15	62	56	5	10
38	48	29	18	35	41	28	23

行 C_2 列 B_8 Ⅰ B_3 Ⅱ B_1

61	10	3	49	60	15	6	56
28	47	38	24	29	42	35	17
52	63	14	8	53	58	11	1
21	26	43	33	20	31	46	40
5	50	59	9	4	55	62	16
36	23	30	48	37	18	27	41
12	7	54	64	13	2	51	57
45	34	19	25	44	39	22	32

$C_6 B_8$ B_3B_1

51	1	12	63	54	8	13	58
46	32	21	34	43	25	20	39
6	16	61	50	3	9	60	55
27	17	36	47	30	24	37	42
11	57	52	7	14	64	53	2
22	40	45	26	19	33	44	31
62	56	5	10	59	49	4	15
35	41	28	23	38	48	29	18

$C_6 B_4$ B_3B_1

34	43	25	20	39	46	32	21
15	62	56	5	10	59	49	4
18	35	41	28	23	38	48	29
7	14	64	53	2	11	57	52
26	19	33	44	31	22	40	45
55	6	16	61	50	3	9	60
42	27	17	36	47	30	24	37
63	54	8	13	58	51	1	12

行 C_2 列 B_2 Ⅰ B_3 Ⅱ B_5

61	10	3	49	60	15	6	56
22	32	45	34	19	25	44	39
52	63	14	8	53	58	11	1
35	17	28	47	38	24	29	42
5	50	59	9	4	55	62	16
46	40	21	26	43	33	20	31
12	7	54	64	13	2	51	57
27	41	36	23	30	48	37	18

$C_6 B_2$ B_3B_5

51	1	12	63	54	8	13	58
29	18	35	41	28	23	38	48
6	16	61	50	3	9	60	55
20	39	46	32	21	34	43	25
11	57	52	7	14	64	53	2
37	42	27	17	36	47	30	24
62	56	5	10	59	49	4	15
44	31	22	40	45	26	19	33

$C_6 B_4$ B_3B_1

26	19	33	44	31	22	40	45
55	6	16	61	50	3	9	60
42	27	17	36	47	30	24	37
63	54	8	13	58	51	1	12
34	43	25	20	39	46	32	21
15	62	56	5	10	59	49	4
18	35	41	28	23	38	48	29
7	14	64	53	2	11	57	52

行 C_2 列 B_6 Ⅰ B_3 Ⅱ B_5

61	10	3	49	60	15	6	56
43	33	20	31	46	40	21	26
52	63	14	8	53	58	11	1
30	48	37	18	27	41	36	23
5	50	59	9	4	55	62	16
19	25	44	39	22	32	45	34
12	7	54	64	13	2	51	57
38	24	29	42	35	17	28	47

$C_6 B_6$ B_3B_5

51	1	12	63	54	8	13	58
36	47	30	24	37	42	27	17
6	16	61	50	3	9	60	55
45	26	19	33	44	31	22	40
11	57	52	7	14	64	53	2
28	23	38	48	29	18	35	41
62	56	5	10	59	49	4	15
21	34	43	25	20	39	46	32

左列给出25方，但每方中应含有 8 个 3 次特优的 8 阶完美幻方. 如本列上面所给出的 4 方，在每方的各行左移 4 列又各给 1 方. 因此，总共给出 $25×8=200$ 个 3 次特优的 8 阶完美幻方.

$C_4 B_2 B_3B_1$

18	43	17	44	23	46	24	45
57	4	63	6	64	5	58	3
31	38	32	37	26	35	25	36
16	53	10	51	9	52	15	54
42	19	41	20	47	22	48	21
1	60	7	62	8	61	2	59
39	30	40	29	34	27	33	28
56	13	50	11	49	12	55	14

$C_0 B_2$ $B_3 B_1$

23	22	48	45	18	19	41	44
64	61	2	3	57	60	7	6
34	35	25	28	39	38	32	29
49	52	15	14	56	53	10	11
47	46	24	21	42	43	17	20
8	5	58	59	1	4	63	62
26	27	33	36	31	30	40	37
9	12	55	54	16	13	50	51

行 C_8 列 B_6 Ⅰ B_3 Ⅱ B_1

33	28	31	38	40	29	26	35
10	51	49	12	15	54	56	13
48	21	18	43	41	20	23	46
63	6	8	61	58	3	1	60
25	36	39	30	32	37	34	27
50	11	9	52	55	14	16	53
24	45	42	19	17	44	47	22
7	62	64	5	2	59	57	4

$C_4 B_6$ B_3B_1

47	22	48	21	42	19	41	20
57	4	63	6	64	5	58	3
34	27	33	28	39	30	40	29
16	53	10	51	9	52	15	54
23	46	24	45	18	43	17	44
1	60	7	62	8	61	2	59
26	35	25	36	31	38	32	37
56	13	50	11	49	12	55	14

$C_0 B_6$ $B_3 B_1$

18	19	41	44	23	22	48	45
64	61	2	3	57	60	7	6
39	38	32	29	34	35	25	28
49	52	15	14	56	53	10	11
42	43	17	20	47	46	24	21
8	5	58	59	1	4	63	62
31	30	40	37	26	27	33	36
9	12	55	54	16	13	50	51

行 C_8 列 B_2 Ⅰ B_3 Ⅱ B_1

32	37	34	27	25	36	39	30
10	51	49	12	15	54	56	13
17	44	47	22	24	45	42	19
63	6	8	61	58	3	1	60
40	29	26	35	33	28	31	38
50	11	9	52	55	14	16	53
41	20	23	46	48	21	18	43
7	62	64	5	2	59	57	4

$C_4B_4 \quad B_3B_5$

32	37	26	35	25	36	31	38
57	4	63	6	64	5	58	3
24	45	18	43	17	44	23	46
49	12	55	14	56	13	50	11
40	29	34	27	33	28	39	30
1	60	7	62	8	61	2	59
48	21	42	19	41	20	47	22
9	52	15	54	16	53	10	51

$C_0B_4 \quad B_3B_5$

33	36	31	30	40	37	26	27
64	61	2	3	57	60	7	6
17	20	47	46	24	21	42	43
16	13	50	51	9	12	55	54
25	28	39	38	32	29	34	35
8	5	58	59	1	4	63	62
41	44	23	22	48	45	18	19
56	53	10	11	49	52	15	14

列 $B_4 \quad \mathrm{I}\,B_3\,\mathrm{II}\,B_5$

18	43	41	20	23	46	48	21
55	14	16	53	50	11	9	52
26	35	33	28	31	38	40	29
63	6	8	61	58	3	1	60
42	19	17	44	47	22	24	45
15	54	56	13	10	51	49	12
34	27	25	36	39	30	32	37
7	62	64	5	2	59	57	4

$C_4B_0 \quad B_3B_5$

33	28	39	30	40	29	34	27
57	4	63	6	64	5	58	3
24	45	18	43	17	44	23	46
16	53	10	51	9	52	15	54
25	36	31	38	32	37	26	35
1	60	7	62	8	61	2	59
48	21	42	19	41	20	47	22
56	13	50	11	49	12	55	14

$C_0B_0 \quad B_3B_5$

32	29	34	35	25	28	39	38
64	61	2	3	57	60	7	6
17	20	47	46	24	21	42	43
40	37	26	27	33	36	31	30
49	52	15	14	56	53	10	11
8	5	58	59	1	4	63	62
41	44	23	22	48	45	18	19
9	12	55	54	16	13	50	51

列 $B_8 \quad \mathrm{I}\,B_3\,\mathrm{II}\,B_5$

47	22	24	45	42	19	17	44
10	51	49	12	15	54	56	13
26	35	33	28	31	38	40	29
63	6	8	61	58	3	1	60
23	46	48	21	18	43	41	20
50	11	9	52	55	14	16	53
34	27	25	36	39	30	32	37
7	62	64	5	2	59	57	4

$C_4B_8 \quad B_3B_5$

32	37	26	35	25	36	31	38
57	4	63	6	64	5	58	3
41	20	47	22	48	21	42	19
16	53	10	51	9	52	15	54
40	29	34	27	33	28	39	30
1	60	7	62	8	61	2	59
17	44	23	46	24	45	18	43
56	13	50	11	49	12	55	14

$C_0B_8 \quad B_3B_5$

33	36	31	30	40	37	26	27
64	61	2	3	57	60	7	6
48	45	18	19	41	44	23	22
49	52	15	14	56	53	10	11
25	28	39	38	32	29	34	35
8	5	58	59	1	4	63	62
24	21	42	43	17	20	47	46
9	12	55	54	16	13	50	51

列 $B_0 \quad \mathrm{I}\,B_3\,\mathrm{II}\,B_5$

18	43	41	20	23	46	48	21
10	51	49	12	15	54	56	13
39	30	32	37	34	27	25	36
63	6	8	61	58	3	1	60
42	19	17	44	47	22	24	45
50	11	9	52	55	14	16	53
31	38	40	29	26	35	33	28
7	62	64	5	2	59	57	4

二、12 阶完美幻方

$$n = 12 = 2^2 3, \quad \mathbf{F} = \{1,2,3,\dots,144\}, \quad \varphi(12) = 4,$$

$$\Sigma_{12} = 870, \qquad a + a' = 145. \tag{16}$$

例 1　以可幻排列π=(1,2,3,4,5,6,12,11,10,9,8,7)为行、列序给出 12 阶分段方 A 如下:

A

1	2	3	4	5	6	12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18	24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30	36	35	34	33	32	31
37	38	39	40	41	42	48	47	46	45	44	43
49	50	51	52	53	54	60	59	58	57	56	55
61	62	63	64	65	66	72	71	70	69	68	67
133	134	135	136	137	138	144	143	142	141	140	139
121	122	123	124	125	126	132	131	130	129	128	127
109	110	111	112	113	114	120	119	118	117	116	115
97	98	99	100	101	102	108	107	106	105	104	103
85	86	87	88	89	90	96	95	94	93	92	91
73	74	75	76	77	78	84	83	82	81	80	79

对 A 执行行、列 Z 变换得列和方或行和方. 下面只给出各方的第一线为代表:

B_1	1	14	27	40	53	66	144	131	118	105	92	79	870
B_5	1	18	32	40	58	62	144	127	113	105	87	83	870
B_9	1	21	36	40	49	69	144	124	109	105	96	76	870
C_9	1	98	135	40	5	102	144	47	10	105	140	43	870
B_7	1	23	27	45	53	67	144	122	118	100	92	78	870
B_{11}	1	19	32	45	58	71	144	126	113	100	87	74	870
B_3	1	16	36	45	49	64	144	129	109	100	96	81	870
C_3	1	38	135	45	5	42	144	107	10	100	140	103	870

B_{10}	1	20	34	48	53	63	133	128	118	108	89	75	870
B_2	1	15	29	48	58	68	133	123	113	108	94	80	870
B_6	1	24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	84	870
B_{12}	1	104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	39	870
C_{10}	1	86	111	136	53	30	12	95	118	141	56	31	870
C_2	1	91	116	136	58	35	12	90	113	141	51	26	870
C_{12}	1	93	120	136	49	33	12	88	109	141	60	28	870
C_6	1	134	3	136	5	138	12	143	10	141	8	139	870
B_8	1	22	29	37	58	65	133	130	113	97	94	77	856
B_4	1	17	34	37	53	70	133	125	118	97	89	82	856
A_1	1	13	25	37	49	61	133	121	109	97	85	73	804
B_0	1	41	42	37	5	46	133	101	10	97	137	106	856
C_4	1	50	111	4	53	114	12	59	118	9	56	115	702
C_8	1	55	116	4	58	119	12	54	113	9	51	110	702
C_0	1	52	120	4	49	112	12	57	109	9	60	117	702
A_0	1	2	3	4	5	6	12	11	10	9	8	7	78

(17)

总共有 16 个列和方、行和方，另有 8 个不是列和方. 因此可提供 16 种幻和分组，这些幻和组可如下分类:

B_1 B_5 B_9 C_9	B_7 B_{11} B_3 C_3	B_{10} B_2 B_6 B_{12}	C_{10} C_2 C_{12} C_6	B_4 B_8 A_1 B_0	C_4 C_8 C_0 A_0	1 53 118 1 58 113 1 49 109 1 5 10
1 40 144 105	1 45 144 100	1 48 133 108	1 136 12 141	1 37 133 97	1 4 12 9	各列和方 第 1 线中 之相同元

(18)

同行、同列是同类方. 第 1, 2 列; 第 3, 5 列; 第 4, 6 列又分别是大同类中的小同类. 大同类不能对角线, 小同类可以分别各作一条对角线组.

下面是分别由 B_2, B_6, B_{12} 所得到的 12 阶完美幻方:

①

1	30	56	136	118	86	12	31	53	141	111	95
15	47	61	126	104	76	22	38	72	127	101	81
29	57	135	119	85	6	32	52	142	110	96	7
48	67	125	105	75	23	37	66	128	100	82	14
58	134	120	91	5	33	51	143	109	90	8	28
68	124	106	74	24	43	65	129	99	83	13	42
133	114	92	4	34	50	144	115	89	9	27	59
123	107	73	18	44	64	130	98	84	19	41	69
113	93	3	35	49	138	116	88	10	26	60	139
108	79	17	45	63	131	97	78	20	40	70	122
94	2	36	55	137	117	87	11	25	54	140	112
80	16	46	62	132	103	77	21	39	71	121	102

②

1	86	111	136	53	30	12	95	118	141	56	31
15	76	101	126	72	47	22	81	104	127	61	38
29	6	96	119	142	57	32	7	85	110	135	52
48	23	82	105	128	67	37	14	75	100	125	66
58	33	8	91	109	134	51	28	5	90	120	143
68	43	13	74	99	124	65	42	24	83	106	129
133	50	27	4	89	114	144	59	34	9	92	115
123	64	41	18	84	107	130	69	44	19	73	98
113	138	60	35	10	93	116	139	49	26	3	88
108	131	70	45	20	79	97	122	63	40	17	78
94	117	140	55	25	2	87	112	137	54	36	11
80	103	121	62	39	16	77	102	132	71	46	21

③

1	134	3	136	5	138	12	143	10	141	8	139
15	124	17	126	24	131	22	129	20	127	13	122
29	114	36	119	34	117	32	115	25	110	27	112
48	107	46	105	44	103	37	98	39	100	41	102
58	93	56	91	49	86	51	88	53	90	60	95
68	79	61	74	63	76	65	78	72	83	70	81
133	2	135	4	137	6	144	11	142	9	140	7
123	16	125	18	132	23	130	21	128	19	121	14
113	30	120	35	118	33	116	31	109	26	111	28
108	47	106	45	104	43	97	38	99	40	101	42
94	57	92	55	85	50	87	52	89	54	96	59
80	67	73	62	75	64	77	66	84	71	82	69

④

1	138	8	136	10	134	12	139	5	141	3	143
15	131	13	126	20	124	22	122	24	127	17	129
29	117	27	119	25	114	32	112	34	110	36	115
48	103	41	105	39	107	37	102	44	100	46	98
58	86	60	91	53	93	51	95	49	90	56	88
68	76	70	74	72	79	65	81	63	83	61	78
133	6	140	4	142	2	144	7	137	9	135	11
123	23	121	18	128	16	130	14	132	19	125	21
113	33	111	35	109	30	116	28	118	26	120	31
108	43	101	45	99	47	97	42	104	40	106	38
94	50	96	55	89	57	87	59	85	54	92	52
80	64	82	62	84	67	77	69	75	71	73	66

⑤

1	93	120	136	49	33	12	88	109	141	60	28
15	79	106	126	63	43	22	78	99	127	70	42
29	2	92	119	137	50	32	11	89	110	140	59
48	16	73	105	132	64	37	21	84	100	121	69
58	30	3	91	118	138	51	31	10	90	111	139
68	47	17	74	104	131	65	8	20	83	101	122
133	57	36	4	85	117	144	52	25	9	96	112
123	67	46	18	75	103	130	66	39	19	82	102
113	134	56	35	5	86	116	143	53	26	8	95
108	124	61	45	24	76	97	129	72	40	13	81
94	114	135	55	34	6	87	115	142	54	27	5
80	107	125	62	44	23	77	98	128	71	41	14

⑥

1	33	60	136	109	93	12	28	49	141	120	88
15	43	70	126	99	79	22	42	63	127	106	78
29	50	140	119	89	2	32	59	137	110	92	11
48	64	121	105	84	16	37	69	132	100	73	21
58	138	111	91	10	30	51	139	118	90	3	31
68	131	101	74	20	47	65	122	104	83	17	38
133	117	96	4	25	57	144	112	85	9	36	52
123	103	82	18	39	67	130	102	75	19	46	66
113	86	8	35	53	134	116	95	5	26	56	143
108	76	13	45	72	124	97	81	24	40	61	129
74	6	27	55	42	114	87	5	34	54	135	115
80	23	41	62	128	107	77	14	44	71	125	98

⑦

1	134	3	136	5	138	12	143	10	141	8	139
24	131	22	129	20	127	13	122	15	124	17	126
25	110	27	112	29	114	36	119	34	117	32	115
48	107	46	105	44	103	37	98	39	100	41	102
49	86	51	88	53	90	60	95	58	93	56	91
72	83	70	81	68	79	61	74	63	76	65	78
133	2	135	4	137	6	144	11	142	9	140	7
132	23	130	21	128	19	121	14	123	16	125	18
109	26	111	28	113	30	120	35	118	33	116	31
108	47	106	45	104	43	97	38	99	40	101	42
85	50	87	52	89	54	96	59	94	57	92	55
84	71	82	69	80	67	73	62	75	64	77	66

⑧

1	138	8	136	10	134	12	139	5	141	3	143
24	127	17	129	15	131	13	126	20	124	22	122
25	114	32	112	34	110	36	115	29	117	27	119
48	103	41	105	39	107	37	102	44	100	46	98
49	90	56	88	58	86	60	91	53	93	51	95
72	79	65	81	63	83	61	78	68	76	70	74
133	6	140	4	142	2	144	7	137	9	135	11
132	19	125	21	123	23	121	18	128	16	130	14
109	30	116	28	118	26	120	31	113	33	111	35
108	43	101	45	99	47	97	42	104	40	109	38
85	54	92	52	94	50	96	55	89	57	87	59
84	67	77	69	75	71	73	66	80	64	82	62

⑨

1	93	120	136	49	33	12	88	109	141	60	28
104	131	65	38	20	83	101	122	68	47	17	74
142	54	27	7	94	114	135	55	34	6	87	115
48	16	73	105	132	64	37	21	84	100	121	69
5	86	116	143	53	26	8	95	113	134	56	35
99	127	70	42	15	79	106	126	63	43	22	78
133	57	36	4	85	117	144	52	25	9	96	112
44	23	77	98	128	71	41	14	80	107	125	62
10	90	111	139	58	30	3	91	118	138	51	31
108	124	61	45	24	76	97	129	72	40	13	81
137	50	32	11	89	110	140	59	29	2	92	119
39	19	82	102	123	67	46	18	75	103	130	66

⑩

1	33	60	136	109	93	12	28	49	141	120	88
104	83	17	38	68	131	101	74	20	47	65	122
142	114	87	7	34	54	135	115	94	6	27	55
48	64	121	105	84	16	37	69	132	100	73	21
5	26	56	143	113	86	8	35	53	134	116	95
99	79	22	42	63	127	106	78	15	43	70	126
133	117	96	4	25	57	144	112	85	9	36	52
44	71	125	98	80	23	41	62	128	107	77	14
10	30	51	139	118	90	3	31	58	138	111	91
108	76	13	45	72	124	97	81	24	40	61	129
137	140	92	11	29	50	140	119	89	2	32	59
39	46	130	102	75	19	46	66	123	103	82	18

⑪

1	90	116	136	58	26	12	91	113	141	51	35
99	131	61	42	20	76	106	122	72	43	17	81
137	57	27	11	85	114	140	52	34	2	96	115
48	19	77	105	123	71	37	18	80	100	130	62
10	86	120	139	53	33	3	95	109	138	56	28
104	124	70	38	24	79	101	129	63	47	13	78
133	54	32	4	94	110	144	55	29	9	87	119
39	23	73	102	128	64	46	14	84	103	125	69
5	93	111	143	49	30	8	88	118	134	60	31
108	127	65	45	15	83	97	126	68	40	22	74
142	50	36	7	89	117	135	59	25	6	92	112
44	16	82	98	132	67	41	21	75	107	121	66

⑫

1	26	51	136	113	90	12	35	58	141	116	91
99	76	17	42	72	131	106	81	20	43	61	122
137	114	96	11	34	57	140	115	85	2	27	52
48	71	130	105	80	19	37	62	123	100	77	18
10	33	56	139	109	86	3	28	53	138	120	95
104	79	13	38	63	124	101	78	24	47	70	129
133	110	87	4	29	54	144	119	94	9	32	55
39	64	125	102	84	23	46	69	128	103	73	14
5	30	60	143	118	93	8	31	49	134	111	88
108	83	22	45	68	127	97	74	15	40	65	126
142	117	92	7	25	50	135	112	89	6	36	59
44	67	121	98	21	16	41	66	132	107	82	21

⑬

1	86	111	136	53	30	12	95	118	141	56	31
99	124	65	42	24	83	106	129	68	43	13	74
137	54	36	11	94	117	140	55	25	2	87	112
48	23	82	105	128	67	37	14	75	100	129	66
10	93	116	139	49	26	3	88	113	138	60	35
104	127	61	38	15	76	101	126	72	47	22	81
133	50	27	4	89	114	144	59	34	9	92	115
39	16	77	102	132	71	46	21	80	103	121	62
5	90	120	143	58	33	8	91	109	134	51	28
108	131	70	45	20	79	97	122	63	40	17	78
142	57	32	7	85	110	135	52	29	6	96	119
44	19	73	98	123	64	41	18	84	127	130	69

⑭

1	30	56	136	118	86	12	31	53	141	111	95
99	83	13	42	68	124	106	74	24	43	65	129
137	117	87	11	25	54	140	112	94	2	36	55
48	67	129	105	75	23	37	66	128	100	82	14
10	26	60	139	113	93	3	35	49	138	116	88
104	76	22	38	72	127	101	81	15	47	61	126
133	114	92	4	34	50	144	115	89	9	27	59
39	71	121	102	80	16	46	62	132	103	77	21
5	33	51	143	109	90	8	28	58	134	120	91
108	79	17	45	63	131	97	78	20	40	70	122
142	110	96	7	29	57	135	119	85	6	32	52
44	64	130	98	84	19	41	69	123	127	73	18

各方所用幻和组:

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
列	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_6	B_6	B_{12}	B_{12}	B_{12}	B_{12}	B_{12}	B_{12}
行	C_{10}	C_{10}	C_6	C_6	C_{12}	C_{12}	C_6	C_6	C_{12}	C_{12}	C_2	C_2	C_{10}	C_{10}
Ⅰ	C_9	B_9	B_9	B_1	B_1	C_9	B_1	B_5	B_1	B_5	B_1	B_9	B_9	B_5
Ⅱ	B_3	C_3	B_7	B_3	C_3	B_7	B_{11}	B_7	B_{11}	B_7	B_2	B_7	B_{11}	B_3

(19)

容易看出, 这些方都是对顶互补型的 12 阶完美幻方. 从分类表可见, 幻方的对角线组应在其第 1,2 列中选取. 即若选取第 1,2 列幻和组作幻方的行、列线组, 将作不出完美幻方. 其中⑦、⑨还是 3 次特优完美幻方, 相关主对角线如下:

B_1	2	15	28	41	54	72	73	91	104	117	130	143	
	7	13	26	39	52	65	80	93	106	119	132	138	
B_{11}	5	16	27	38	49	67	78	96	107	118	129	140	
								870		86258			9615240
B_1	6	24	35	46	57	68	77	88	99	110	121	139	
	11	22	33	44	55	61	84	90	101	112	123	134	
B_{11}	8	21	34	47	60	66	79	85	98	111	124	137	
								870		813 62			8550360

(20)

所有的 12 级可幻排列, 可由二行式:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{matrix} \tag{21}$$

在保持 1, 12 不动的条件下其余 5 对数可以进行重排产生以及数对上下交换产生. 因此总共有 $5!2^5$ 种变换. 再排除同态性, 故有

$$5!2^5 \div \varphi(12) = 5!2^5 \div 4 = 960 \tag{22}$$

种可幻排列. 每一个分段方可产生 24 个 12 阶完美幻方. 因此, 用这种方法可得到

$$960^2 \times 24 = 22\,118\,400 \tag{23}$$

个基本的互不同构的 12 阶完美幻方.

例 2　现再取以下可幻排列作分段方 $\boldsymbol{A}$ 的行、列序. 并计算列和方 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_5; \boldsymbol{B}_7, \boldsymbol{B}_{11}$ 的次和:

$$(1,2,3,4,5,7,12,11,10,9,8,6) \tag{24}$$

A

1	2	3	4	5	7	12	11	10	9	8	6
13	14	15	16	17	19	24	23	22	21	20	18
25	26	27	28	29	31	36	35	34	33	32	30
37	38	39	40	41	43	48	47	46	45	44	42
49	50	51	52	53	55	60	59	58	57	56	54
61	62	63	64	65	67	72	71	70	69	68	66
133	134	135	136	137	139	144	143	142	141	140	138
121	122	123	124	125	127	132	131	130	129	128	126
109	110	111	112	113	115	120	119	118	117	116	114
97	98	99	100	101	103	108	107	106	105	104	102
85	86	87	88	89	91	96	95	94	93	92	90
73	74	75	76	77	79	84	83	82	81	80	78

1	14	27	40	53	67	144	131	118	105	92	78	87218	B_1
2	15	28	41	55	72	143	130	117	104	90	73	86186	
3	16	29	43	60	71	142	129	116	102	85	74	84962	
4	17	31	48	59	70	141	128	114	97	86	75	83642	
5	19	36	47	58	69	140	126	109	98	87	76	82322	8759160
7	24	35	46	57	68	138	121	110	99	88	77	81098	8492940
12	23	34	45	56	66	133	122	111	100	89	79	80402	
11	22	33	44	54	61	134	123	112	101	91	84	81434	
10	21	32	42	49	62	135	124	113	103	96	83	82658	
9	20	30	37	50	63	136	125	115	108	95	82	83978	
8	18	25	38	51	64	137	127	120	107	94	81	85298	9406440
6	13	26	39	52	65	139	132	119	106	93	80	86522	9672660

1	19	32	40	58	62	144	126	113	105	87	83	85058	B_5
2	24	30	41	57	63	143	121	115	104	88	82	83978	
3	23	25	43	56	64	142	122	120	102	89	81	84578	9249840
4	22	26	48	54	65	141	123	119	97	91	80	83882	9098460
5	21	27	47	49	67	140	124	118	98	96	78	84098	
7	20	28	46	50	72	138	125	117	99	95	73	83546	
12	18	29	45	51	71	133	127	116	100	94	74	82562	
11	13	31	44	52	70	134	132	114	101	93	75	83642	
10	14	36	42	53	69	135	131	109	103	92	76	83042	8915760
9	15	35	37	55	68	136	130	110	108	90	77	83738	9067140
8	16	34	38	60	66	137	129	111	107	85	79	83522	
6	17	33	39	59	61	139	128	112	106	86	84	84074	

1	23	27	45	53	66	144	122	118	100	92	79	84698	B_7
2	22	28	44	55	61	143	123	117	101	90	84	84578	9249840
3	21	29	42	60	62	142	124	116	103	85	83	84218	
4	20	31	37	59	63	141	125	114	108	86	82	84482	
5	18	36	38	58	64	140	127	109	107	87	81	83738	9067140
7	13	35	39	57	65	138	132	110	106	88	80	84386	
12	14	34	40	56	67	133	131	111	105	89	78		
11	15	33	41	54	72	134	130	112	104	91	73	83042	8915760
10	16	32	43	49	71	135	129	113	102	96	74		
9	17	30	48	50	70	136	128	115	97	95	75		
8	19	25	47	51	69	137	126	120	98	94	76	83882	9098460
6	24	26	46	52	68	139	121	119	99	93	77		

1	18	32	45	58	71	144	127	113	100	87	74	84458	B_{11}
2	13	30	44	57	70	143	132	115	101	88	75	85826	
3	14	25	42	56	69	142	131	120	103	89	76	86522	9672660
4	15	26	37	54	68	141	130	119	108	91	77	86642	
5	16	27	38	49	66	140	129	118	107	96	79	86282	
7	17	28	39	50	61	138	128	117	106	95	84	85298	9406440
12	19	29	40	51	62	133	126	116	105	94	83		
11	24	31	41	52	63	134	121	114	104	93	82		
10	23	36	43	53	64	135	122	109	102	92	81	81098	8492940
9	22	35	48	55	65	136	123	110	97	90	80		
8	21	34	47	60	67	137	124	111	98	85	78		
6	20	33	46	59	72	139	125	112	99	86	73	82322	8759160

分别以 $B_1, B_{11}; B_5, B_7$ 为对角线组，则各有 4 组 3 次特优的主对角线．其行、列线组分别为 B_6, C_6 和 E_1, E_2.

127	114	103	90	79	6	19	30	43	54	67	138	① ②
24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	84	1	B_6 C_6
131	110	107	86	83	2	23	26	47	50	71	134	B_1 B_{11}
22	27	46	51	70	135	130	111	106	87	82	3	
129	112	105	88	81	4	21	28	45	52	69	136	870
20	29	44	53	68	137	128	113	104	89	80	5	85298
126	115	102	91	78	7	18	31	42	55	66	139	9406440
13	36	37	60	61	144	121	120	97	96	73	12	
122	119	98	95	74	11	14	35	38	59	62	143	870
15	34	39	58	63	142	123	118	99	94	75	10	82322
124	117	100	93	76	9	16	33	40	57	64	141	8759160
17	32	41	56	65	140	125	116	101	92	77	8	

126	115	102	91	78	7	18	31	42	55	66	139	②
13	36	37	60	61	144	121	120	97	96	73	12	
122	119	98	95	74	11	14	35	38	59	62	143	
15	34	39	58	63	142	123	118	99	94	75	10	870
124	117	100	93	76	9	16	33	40	57	64	141	82322
17	32	41	56	65	140	125	116	101	92	77	8	8759160
127	114	103	90	79	6	19	30	43	54	67	138	
24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	84	1	
131	110	107	86	83	2	23	26	47	50	71	134	
22	27	46	51	70	135	130	111	106	87	82	3	
129	112	105	88	81	4	21	28	45	52	69	136	
20	29	44	53	68	137	128	113	104	89	80	5	

80	5	20	29	44	53	68	137	128	113	104	89	③ ④
66	139	126	115	102	91	78	7	18	31	42	55	
73	12	13	36	37	60	61	144	121	120	97	96	
62	143	122	119	98	95	74	11	14	35	38	59	870
75	10	15	34	39	58	63	142	123	118	99	94	86522
64	141	124	117	100	93	76	9	16	33	40	57	9672660
77	8	17	32	41	56	65	140	125	116	101	92	
67	138	127	114	103	90	79	6	19	30	43	54	870
84	1	24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	81098
71	134	131	110	107	86	83	2	23	26	47	50	8492940
82	3	22	27	46	51	70	135	130	111	106	87	
69	136	129	112	105	88	81	4	21	28	45	52	

77	8	17	32	41	56	65	140	125	116	101	92	④
67	138	127	114	103	90	79	6	19	30	43	54	
84	1	24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	
71	134	131	110	107	86	83	2	23	26	47	50	870
82	3	22	27	46	51	70	135	130	111	106	87	81098
69	136	129	112	105	88	81	4	21	28	45	52	8492940
80	5	20	29	44	53	68	137	128	113	104	89	
66	139	126	115	102	91	78	7	18	31	42	55	
73	12	13	36	37	60	61	144	121	120	97	96	
62	143	122	119	98	95	74	11	14	35	38	59	
75	10	15	34	39	58	63	142	123	118	99	94	
64	141	124	117	100	93	76	9	16	33	40	57	

48	49	72	133	132	109	108	85	84	1	24	25	⑤
102	91	78	7	18	31	42	55	66	139	126	115	
41	56	65	140	125	116	101	92	77	8	17	32	
105	88	81	4	21	28	45	52	69	136	129	112	$\boldsymbol{B}_6$ $\boldsymbol{C}_6$
39	58	63	142	123	118	99	94	75	10	15	34	$\boldsymbol{B}_1$ $\boldsymbol{B}_{11}$
107	86	83	2	23	26	47	50	71	134	131	110	
37	60	61	144	121	120	97	96	73	12	13	36	
103	90	79	6	19	30	43	54	67	138	127	114	
44	53	68	137	128	113	104	89	80	5	20	29	870
100	93	76	9	16	33	40	57	64	141	124	117	83882
46	51	70	135	130	111	106	87	82	3	22	27	9098460
98	95	74	11	14	35	38	59	62	143	122	119	

108	85	84	1	24	25	48	49	72	133	132	109	⑥
42	55	66	139	126	115	102	91	78	7	18	31	
101	92	77	8	17	32	41	56	65	140	125	116	
45	52	69	136	129	112	105	88	81	4	21	28	870
99	94	75	10	15	34	39	58	63	142	123	118	83738
47	50	71	134	131	110	107	86	83	2	23	26	9067140
97	96	73	12	13	36	37	60	61	144	121	120	
43	54	67	138	127	114	103	90	79	6	19	30	
104	89	80	5	20	29	44	53	68	137	128	113	
40	57	64	141	124	117	100	93	76	9	16	33	
106	87	82	3	22	27	46	51	70	135	130	111	
38	59	62	143	122	119	98	95	74	11	14	35	

122	119	98	95	74	11	14	35	38	59	62	143	⑦
24	25	48	49	72	133	132	109	108	85	84	1	
126	115	102	91	78	7	18	31	42	55	66	139	
17	32	41	56	65	140	125	116	101	92	77	8	870
129	112	105	88	81	4	21	28	45	52	69	136	84578
15	34	39	58	63	142	123	118	99	94	75	10	9249840
131	110	107	86	83	2	23	26	47	50	71	134	
13	36	37	60	61	144	121	120	97	96	73	12	
127	114	103	90	79	6	19	30	43	54	67	138	
20	29	44	53	68	137	128	113	104	89	80	5	
124	117	100	93	76	9	16	33	40	57	64	141	
22	27	46	51	70	135	130	111	106	87	82	3	

14	35	38	59	62	143	122	119	98	95	74	11	⑧
132	109	108	85	84	1	24	25	48	49	72	133	
18	31	42	55	66	139	126	115	102	91	78	7	
125	116	101	92	77	8	17	32	41	56	65	140	870
21	28	45	52	69	136	129	112	105	88	81	4	83042
123	118	99	94	75	10	15	34	39	58	63	142	8915760
23	26	47	50	71	134	131	110	107	86	83	2	
121	120	97	96	73	12	13	36	37	60	61	144	
19	30	43	54	67	138	127	114	103	90	79	6	
128	113	104	89	80	5	20	29	44	53	68	137	
16	33	40	57	64	141	124	117	100	93	76	9	
130	111	106	87	82	3	22	27	46	51	70	135	

39	1	104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	⑨
67	28	74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	
130	60	17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	
102	141	47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	$\boldsymbol{E}_1$ $\boldsymbol{E}_2$
75	109	68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	$\boldsymbol{B}_1$ $\boldsymbol{B}_{11}$
19	88	122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	
46	12	101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	
66	33	83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	870
123	49	20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	85298
103	136	38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	9406440
82	120	65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	
18	93	131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	

46	12	101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	⑩
66	33	83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	
123	49	20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	870
103	136	38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	82322
82	120	65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	8759160
18	93	131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	
39	1	104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	
67	28	74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	
130	60	17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	
102	141	47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	
75	109	68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	
19	88	122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	

14	90	129	59	19	88	122	54	21	95	127	52	⑪
41	3	97	140	46	12	101	135	37	8	106	144	
71	31	76	110	66	33	83	115	64	26	78	117	870
128	58	24	89	123	49	20	94	132	53	15	85	86522
98	138	45	11	103	136	38	6	105	143	43	4	9672660
77	111	61	32	82	120	65	27	73	116	70	36	
23	91	124	50	18	93	131	55	16	86	126	57	
44	10	108	137	39	1	104	142	48	5	99	133	
62	30	81	119	67	28	74	114	69	35	79	112	
125	51	13	92	130	60	17	87	121	56	22	96	
107	139	40	2	102	141	47	7	100	134	42	9	
80	118	72	29	75	109	68	34	84	113	63	25	

23	91	124	50	18	93	131	55	16	86	126	57	⑫
44	10	108	137	39	1	104	142	48	5	99	133	
62	30	81	119	67	28	74	114	69	35	79	112	870
125	51	13	92	130	60	17	87	121	56	22	96	81098
107	139	40	2	102	141	47	7	100	134	42	9	8492940
80	118	72	29	75	109	68	34	84	113	63	25	
14	90	129	59	19	88	122	54	21	95	127	52	
41	3	97	140	46	12	101	135	37	8	106	144	
71	31	76	110	66	33	83	115	64	26	78	117	
128	58	24	89	123	49	20	94	132	53	15	85	
98	138	45	11	103	136	38	6	105	143	43	4	
77	111	61	32	82	120	65	27	73	116	70	36	

47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	102	141	⑬
20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	123	49	
74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	67	28	
101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	46	12	E_1 E_2
131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	18	93	B_5 B_7
68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	75	109	
38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	103	136	870
17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	130	60	83882
83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	66	33	9098460
104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	39	1	
122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	19	88	
65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	82	120	

38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	103	136	⑭
17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	130	60	
83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	66	33	870
104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	39	1	83738
122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	19	88	9067140
65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	82	120	
47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	102	141	
20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	123	49	
74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	67	28	
101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	46	12	
131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	18	93	
68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	75	109	

123	49	20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	⑮
67	28	74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	
46	12	101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	870
18	93	131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	84578
75	109	68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	9249840
103	136	38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	
130	60	17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	
66	33	83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	
39	1	104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	
19	88	122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	
82	120	65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	
102	141	47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	

130	60	17	87	121	56	22	96	125	51	13	92	⑯
66	33	83	115	64	26	78	117	71	31	76	110	
39	1	104	142	48	5	99	133	44	10	108	137	870
19	88	122	54	21	95	127	52	14	90	129	59	83042
82	120	65	27	73	116	70	36	77	111	61	32	8915760
102	141	47	7	100	134	42	9	107	139	40	2	
123	49	20	94	132	53	15	85	128	58	24	89	
67	28	74	114	69	35	79	112	62	30	81	119	
46	12	101	135	37	8	106	144	41	3	97	140	
18	93	131	55	16	86	126	57	23	91	124	50	
75	109	68	34	84	113	63	25	80	118	72	29	
103	136	38	6	105	143	43	4	98	138	45	11	

三、阶数更高的双 2 因数阶完美幻方

n=16, 24, 28, 30,⋯ 都是阶数更高的双 2 因数. 同样可以用我们的方法进行构造. 当然, 对这些 n 也可以用完美幻方的乘积定理进行构造. 例如, 16 = 4×4, 28 = 4×7 等. 但 24 = 4×6, 30 = 5×6 因为不能在连续自然数集上建立6阶完美幻方, 因此所建高阶完美幻方也不是连续自然数集上的. 而本章所用方法是建立在连续自然数集上的, 即幻和是最小的. 下面直接给出一些 16, 24 阶完美幻方.

(1)$n=16$ $16^2=256$, $F=\{1,2,\cdots,256\}$, $\Sigma_{16}=2056$.

1 2 3 4 5 6 7 8 列和: 17

16 15 14 13 12 11 10 9

$$\longrightarrow (1,2,3,4,5,6,7,8,16,15,14,13,12,11,10,9) \tag{25}$$

以之为行列序构作分段方、列和方、行和方.

A

1	2	3	4	5	6	7	8	16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24	32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40	48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56	64	63	62	61	60	59	58	57
65	66	67	68	69	70	71	72	80	79	78	77	76	75	74	73
81	82	83	84	85	86	87	88	96	95	94	93	92	91	90	89
97	98	99	100	101	102	103	104	112	111	110	109	108	107	106	105
113	114	115	116	117	118	119	120	128	127	126	125	124	123	122	121
241	242	243	244	245	246	247	248	256	255	254	253	252	251	250	249
225	226	227	228	229	230	231	232	240	239	238	237	236	235	234	233
209	210	211	212	213	214	215	216	224	223	222	221	220	219	218	217
193	194	195	196	197	198	199	200	208	207	206	205	204	203	202	201
177	178	179	180	181	182	183	184	192	191	190	189	188	187	186	185
161	162	163	164	165	166	167	168	176	175	174	173	172	171	170	169
145	146	147	148	149	150	151	152	160	159	158	157	156	155	154	153
129	130	131	132	133	134	135	136	144	143	142	141	140	139	138	137

排列的循环排列如下:

λ_{12} (1,13,7,2,12,8,3,11,16,4,10,15,5,9,14,6) λ_5

λ_1 (1,2,3,4,5,6,7,8,16,15,14,13,12,11,10,9) λ_9

λ_3 (1,4,7,15,12,9,3,6,16,13,10,2,5,8,14,11) λ_{11}

λ_{14} (1,15,3,13,5,11,7,9,16,2,14,4,12,6,10,8) λ_7

各列行和方的第一线的组成如下:

B_1	1	18	35	52	69	86	103	120	256	239	222	205	188	171	154	137	2056
B_9	1	31	35	61	69	91	103	121	256	226	222	196	188	166	154	136	
B_5	1	22	46	57	69	95	106	116	256	235	211	200	188	162	151	141	
B_{13}	1	27	46	56	69	82	106	125	256	230	211	201	188	175	151	132	
B_{15}	1	25	42	59	76	93	110	127	256	232	215	198	181	164	147	130	2056
B_7	1	24	42	54	76	84	110	114	256	233	215	203	181	173	147	143	
B_{11}	1	29	39	50	76	88	99	123	256	228	218	207	181	168	158	134	
B_3	1	20	39	63	76	89	99	118	256	237	218	194	181	168	158	139	
B_2	1	19	37	55	80	94	108	122	241	227	213	199	192	174	156	138	2056
B_{10}	1	30	37	58	80	83	108	119	241	238	213	202	192	163	156	135	
B_6	1	23	44	51	80	90	101	126	241	231	220	195	192	170	149	142	
B_{14}	1	26	44	62	80	87	101	115	241	234	220	206	192	167	149	131	
B_4	1	21	48	60	65	85	112	124	241	229	224	204	177	165	160	140	2056
B_{12}	1	28	48	53	65	92	112	117	241	236	224	197	177	172	160	133	2056
B_8	1	32	33	64	65	96	97	128	241	240	209	208	177	176	145	144	2056
A_1	1	17	33	49	65	81	97	113	241	225	209	193	177	161	145	129	1936
C_2	1	40	71	102	245	212	179	146	16	41	74	107	252	221	190	159	2056
C_{10}	1	36	71	98	245	216	179	150	16	45	74	111	252	217	190	155	
C_6	1	38	67	104	245	210	183	148	16	43	78	105	252	223	186	157	
C_{14}	1	34	67	100	245	214	183	152	16	47	78	109	252	219	186	153	
C_4	1	68	243	178	5	72	247	182	16	77	254	191	12	73	250	187	2056
C_{12}	1	66	243	180	5	70	247	184	16	79	254	189	12	75	250	185	2056
C_8	1	242	3	244	5	246	7	248	16	255	14	253	12	251	10	249	2056
A_0	1	2	3	4	5	6	7	8	16	15	14	13	12	11	10	9	136

B_1 B_9 B_5 B_{13} B_3 B_{11} B_7 B_{15}			1 69 256 188 1 76 256 181
	B_2 B_{10} B_6 B_{14} B_4 B_{12} B_8 A_1		1 80 241 192 1 65 241 177
		C_2 C_{10} C_6 C_{14} C_4 C_{12} C_8 A_0	1 245 16 252 1 5 16 12

列、行和方的分类如上表. 容易看出同行之方, 不能作为不同线组在同一个完美幻方中同时出现. 第 1,2 行的各一方可作完美幻方的对角线组. 行、列线组只能取第 2,3 类之各一方组成. 因此, 为得到完美幻方的特优性, 进一步计算第 1,2 行之各方各线的 2 次和、3 次和… 通过仔细计算, 并按次和相同给以配对. 据此我们将给出部分特优的 16 阶完美幻方:

下列 ①～⑫方以 B_1, B_7 为对角线组. 在 B_1, B_7 中有 10 条线，其 1 次和、2 次和、3 次和都是: 2056 351576 67634176

B_1	5	22	39	56	80	95	110	125	252	235	218	201	177	162	147	132
B_1	12	27	42	57	65	82	99	116	245	230	215	200	192	175	158	141
B_7	2	32	41	55	75	85	109	115	255	225	216	202	182	172	148	142
B_7	4	30	34	64	73	87	107	117	253	227	223	193	184	170	150	140
B_7	6	28	36	62	66	96	105	119	251	229	221	195	191	161	152	138
B_7	8	26	38	60	68	94	98	128	249	231	219	197	189	163	159	129
B_7	15	17	40	58	70	92	100	126	242	240	217	199	187	165	157	131
B_7	13	19	47	49	72	90	102	124	244	238	210	208	185	167	155	133
B_7	11	21	45	51	79	81	104	122	246	236	212	206	178	176	153	135
B_7	9	23	43	53	77	83	111	113	248	234	214	204	180	174	146	144

把这 10 条线组合配对可得 2×8 = 16 对 3 次特优线. 对这 12 方进行适当的行、列轮换，使各特优线变成主对角线，将分别得到 16 个 3 次的特优方. 从而由这 12 方可得到 12×16=192 个 3 次的特优的 16 阶完美幻方. 这些完美幻方的主对角线可分成不同的 16 组，它们又分别说属于 12 个不同的同构类.

①

B_2 C_2
B_1 B_7

1	19	37	55	80	94	108	122	241	227	213	199	192	174	156	138
102	120	255	237	219	201	178	164	150	136	15	29	43	57	66	84
190	172	154	129	3	21	39	64	78	92	106	113	243	229	215	208
41	50	68	86	104	127	253	235	217	194	180	166	152	143	13	27
188	170	145	131	5	23	48	62	76	90	97	115	245	231	224	206
159	141	11	25	34	52	70	88	111	125	251	233	210	196	182	168
74	81	99	117	247	240	222	204	186	161	147	133	7	32	46	60
212	198	184	175	157	139	9	18	36	54	72	95	109	123	249	226
65	83	101	119	256	238	220	202	177	163	149	135	16	30	44	58
107	121	242	228	214	200	191	173	155	137	2	20	38	56	79	93
179	165	151	144	14	28	42	49	67	85	103	128	254	236	218	193
40	63	77	91	105	114	244	230	216	207	189	171	153	130	4	22
252	234	209	195	181	167	160	142	12	26	33	51	69	87	112	126
146	132	6	24	47	61	75	89	98	116	246	232	223	205	187	169
71	96	110	124	250	225	211	197	183	176	158	140	10	17	35	53
221	203	185	162	148	134	8	31	45	59	73	82	100	118	248	239

②

B_2 C_{10}
B_1 B_7

1	19	37	55	80	94	108	122	241	227	213	199	192	174	156	138
155	137	2	20	38	56	79	93	107	121	242	228	214	200	191	173
190	172	154	129	3	21	39	64	78	92	106	113	243	229	215	208
216	207	189	171	153	130	4	22	40	63	77	91	105	114	244	230
245	231	224	206	188	170	145	131	5	23	48	62	76	90	97	115
98	116	246	232	223	205	187	169	146	132	6	24	47	61	75	89
74	81	99	117	247	240	222	204	186	161	147	133	7	32	46	60
45	59	73	82	100	118	248	239	221	203	185	162	148	134	8	31
16	30	44	58	65	83	101	119	256	238	220	202	177	163	149	135
150	136	15	29	43	57	66	84	102	120	255	237	219	201	178	164
179	165	151	144	14	28	42	49	67	85	103	128	254	236	218	193
217	194	180	166	152	143	13	27	41	50	68	86	104	127	253	235
252	234	209	195	181	167	160	142	12	26	33	51	69	87	112	126
111	125	251	233	210	196	182	168	159	141	11	25	34	52	70	88
71	96	110	124	250	225	211	197	183	176	158	140	10	17	35	53
36	54	72	95	109	123	249	226	212	198	184	175	157	139	9	18

1	23	44	51	80	90	101	126	241	231	220	195	192	170	149	142	③
43	52	79	89	102	125	242	232	219	196	191	169	150	141	2	24	
78	81	103	124	243	240	218	197	190	161	151	140	3	32	42	53	
104	123	244	239	217	198	189	162	152	139	4	31	41	54	77	82	B_6 C_6
245	238	209	199	188	163	160	138	5	30	33	55	76	83	112	122	B_1 B_7
210	200	187	164	159	137	6	29	34	56	75	84	111	121	246	237	
186	165	158	129	7	28	35	64	74	85	110	113	247	236	211	208	
157	130	8	27	36	63	73	86	109	114	248	235	212	207	185	166	
16	26	37	62	65	87	108	115	256	234	213	206	177	167	156	131	
38	61	66	88	107	116	255	233	214	205	178	168	155	132	15	25	
67	96	106	117	254	225	215	204	179	176	154	133	14	17	39	60	
105	118	253	226	216	203	180	175	153	134	13	18	40	59	68	95	
252	227	224	202	181	174	145	135	12	19	48	58	69	94	97	119	
223	201	182	173	146	136	11	20	47	57	70	93	98	120	251	228	
183	172	147	144	10	21	46	49	71	92	99	128	250	229	222	193	
148	143	9	22	45	50	72	91	100	127	249	230	221	194	184	171	
1	23	44	51	80	90	101	126	241	231	220	195	192	170	149	142	④
214	205	178	168	155	132	15	25	38	61	66	88	107	116	255	233	
78	81	103	124	243	240	218	197	190	161	151	140	3	32	42	53	
153	134	13	18	40	59	68	95	105	118	253	226	216	203	180	175	$B_6 C_{14}$
245	238	209	199	188	163	160	138	5	30	33	55	76	83	112	122	$B_1 B_7$
47	57	70	93	98	120	251	228	223	201	182	173	146	136	11	20	
186	165	158	129	7	28	35	64	74	85	110	113	247	236	211	208	
100	127	249	230	221	194	184	171	148	143	9	22	45	50	72	91	
16	26	37	62	65	87	108	115	256	234	213	206	177	167	156	131	
219	196	191	169	150	141	2	24	43	52	79	89	102	125	242	232	
67	96	106	117	254	225	215	204	179	176	154	133	14	17	39	60	
152	139	4	31	41	54	77	82	104	123	244	239	217	198	189	162	
252	227	224	202	181	174	145	135	12	19	48	58	69	94	97	119	
34	56	75	84	111	121	246	237	210	200	187	164	159	137	6	29	
183	172	147	144	10	21	46	49	71	92	99	128	250	229	222	193	
109	114	248	235	212	207	185	166	157	130	8	27	36	63	73	86	
1	30	37	58	80	83	108	119	241	238	213	202	192	163	156	135	
107	120	242	237	214	201	191	164	155	136	2	29	38	57	79	84	⑤
190	165	154	144	3	28	39	49	78	85	106	128	243	236	215	193	
40	50	77	86	105	127	244	235	216	194	189	166	153	143	4	27	$B_{10} C_2$
245	234	224	195	188	167	145	142	5	26	48	51	76	87	97	126	B_1 B_7
146	141	6	25	47	52	75	88	98	125	246	233	223	196	187	168	
74	96	99	124	247	225	222	197	186	176	147	140	7	17	46	53	
221	198	185	175	148	139	8	18	45	54	73	95	100	123	248	226	
16	19	44	55	65	94	101	122	256	227	220	199	177	174	149	138	
102	121	255	228	219	200	178	173	150	137	15	20	43	56	66	93	
179	172	151	129	14	21	42	64	67	92	103	113	254	229	218	208	
41	63	68	91	104	114	253	230	217	207	180	171	152	130	13	22	
252	231	209	206	181	170	160	131	12	23	33	62	69	90	112	115	
159	132	11	24	34	61	70	89	111	116	251	232	210	205	182	169	
71	81	110	117	250	240	211	204	183	161	158	133	10	32	35	60	
212	203	184	162	157	134	9	31	36	59	72	82	109	118	249	239	

1	30	37	58	80	83	108	119	241	238	213	202	192	163	156	135
150	137	15	20	43	56	66	93	102	121	255	228	219	200	178	173
190	165	154	144	3	28	39	49	78	85	106	128	243	236	215	193
217	207	180	171	152	130	13	22	41	63	68	91	104	114	253	230
245	234	224	195	188	167	145	142	5	26	48	51	76	87	97	126
111	116	251	232	210	205	182	169	159	132	11	24	34	61	70	89
74	96	99	124	247	225	222	197	186	176	147	140	7	17	46	53
36	59	72	82	109	118	249	239	212	203	184	162	157	134	9	31
16	19	44	55	65	94	101	122	256	227	220	199	177	174	149	138
155	136	2	29	38	57	79	84	107	120	242	237	214	201	191	164
179	172	151	129	14	21	42	64	67	92	103	113	254	229	218	208
216	194	189	166	153	143	4	27	40	50	77	86	105	127	244	235
252	231	209	206	181	170	160	131	12	23	33	62	69	90	112	115
98	125	246	233	223	196	187	168	146	141	6	25	47	52	75	88
71	81	110	117	250	240	211	204	183	161	158	133	10	32	35	60
45	54	73	95	100	123	248	226	221	198	185	175	148	139	8	18

⑥

$B_{10}C_{10}$
B_1 B_7

1	26	44	62	80	87	101	115	241	234	220	206	192	167	149	131
38	52	66	89	107	125	255	232	214	196	178	169	155	141	15	24
78	96	103	117	243	225	218	204	190	176	151	133	3	17	42	60
105	123	253	239	216	198	180	162	153	139	13	31	40	54	68	82
245	227	209	202	188	174	160	135	5	19	33	58	76	94	112	119
223	200	182	164	146	137	11	29	47	56	70	84	98	121	251	237
186	172	158	144	7	21	35	49	74	92	110	128	247	229	211	193
148	130	9	27	45	63	72	86	100	114	249	235	221	207	184	166
16	23	37	51	65	90	108	126	256	231	213	195	177	170	156	142
43	61	79	88	102	116	242	233	219	205	191	168	150	132	2	25
67	81	106	124	254	240	215	197	179	161	154	140	14	32	39	53
104	118	244	226	217	203	189	175	152	134	4	18	41	59	77	95
252	238	224	199	181	163	145	138	12	30	48	55	69	83	97	122
210	201	187	173	159	136	6	20	34	57	75	93	111	120	246	228
183	165	147	129	10	28	46	64	71	85	99	113	250	236	222	208
157	143	8	22	36	50	73	91	109	127	248	230	212	194	185	171

⑦

$B_{14}C_{6}$
B_1 B_7

1	26	44	62	80	87	101	115	241	234	220	206	192	167	149	131
219	205	191	168	150	132	2	25	43	61	79	88	102	116	242	233
78	96	103	117	243	225	218	204	190	176	151	133	3	17	42	60
152	134	4	18	41	59	77	95	104	118	244	226	217	203	189	175
245	227	209	202	188	174	160	135	5	19	33	58	76	94	112	119
34	57	75	93	111	120	246	228	210	201	187	173	159	136	6	20
186	172	158	144	7	21	35	49	74	92	110	128	247	229	211	193
109	127	248	230	212	194	185	171	157	143	8	22	36	50	73	91
16	23	37	51	65	90	108	126	256	231	213	195	177	170	156	142
214	196	178	169	155	141	15	24	38	52	66	89	107	125	255	232
67	81	106	124	254	240	215	197	179	161	154	140	14	32	39	53
153	139	13	31	40	54	68	82	105	123	253	239	216	198	180	162
252	238	224	199	181	163	145	138	12	30	48	55	69	83	97	122
47	56	70	84	98	121	251	237	223	200	182	164	146	137	11	29
183	165	147	129	10	28	46	64	71	85	99	113	250	236	222	208
100	114	249	235	221	207	184	166	148	130	9	27	45	63	72	86

⑧

$B_{14}C_{14}$
B_1 B_7

1	21	48	60	65	85	112	124	241	229	224	204	177	165	160	140
246	239	219	194	182	175	155	130	6	31	43	50	70	95	107	114
14	26	35	55	78	90	99	119	254	234	211	199	190	170	147	135
249	228	216	205	185	164	152	141	9	20	40	61	73	84	104	125
5	32	44	49	69	96	108	113	245	240	220	193	181	176	156	129
255	235	210	198	191	171	146	134	15	27	34	54	79	91	98	118
10	19	39	62	74	83	103	126	250	227	215	206	186	163	151	142
244	232	221	201	180	168	157	137	4	24	45	57	68	88	109	121
16	28	33	53	80	92	97	117	256	236	209	197	192	172	145	133
251	226	214	207	187	162	150	143	11	18	38	63	75	82	102	127
3	23	46	58	67	87	110	122	243	231	222	202	179	167	158	138
248	237	217	196	184	173	153	132	8	29	41	52	72	93	105	116
12	17	37	64	76	81	101	128	252	225	213	208	188	161	149	144
242	230	223	203	178	166	159	139	2	22	47	59	66	86	111	123
7	30	42	51	71	94	106	115	247	238	218	195	183	174	154	131
253	233	212	200	189	169	148	136	13	25	36	56	77	89	100	120

⑨

B_4 C_8
B_1 B_7

1	28	48	53	65	92	112	117	241	236	224	197	177	172	160	133
251	239	214	194	187	175	150	130	11	31	38	50	75	95	102	114
14	23	35	58	78	87	99	122	254	231	211	202	190	167	147	139
248	228	217	205	184	164	153	141	8	20	41	61	72	84	105	125
5	17	44	64	69	81	108	128	245	225	220	208	181	161	156	144
242	235	223	198	178	171	159	134	2	27	47	54	66	91	111	118
10	30	39	51	74	94	103	115	250	238	215	195	186	174	151	131
253	232	212	201	189	168	148	137	13	24	36	57	77	88	100	121
16	21	33	60	80	85	97	124	256	229	209	204	192	165	145	140
246	226	219	207	182	162	155	143	6	18	43	63	70	82	107	127
3	26	46	55	67	90	110	119	243	234	222	199	179	170	158	135
249	237	216	196	185	173	152	132	9	29	40	52	73	93	104	116
12	32	37	49	76	96	101	113	252	240	213	193	188	176	149	129
255	230	210	203	191	166	146	139	15	22	34	59	79	86	98	123
7	19	42	62	71	83	106	126	247	227	218	206	183	163	154	142
244	233	221	200	180	169	157	136	4	25	45	56	68	89	109	120

⑩

B_{12} C_8
B_1 B_7

1	32	33	64	65	96	97	128	241	240	209	208	177	176	145	144
182	171	150	139	6	27	38	59	70	91	102	123	246	235	214	203
254	227	222	195	190	163	158	131	14	19	46	51	78	83	110	115
73	88	105	120	249	232	217	200	185	168	153	136	9	24	41	56
5	28	37	60	69	92	101	124	245	236	213	204	181	172	149	140
191	162	159	130	15	18	47	50	79	82	111	114	255	226	223	194
250	231	218	199	186	167	154	135	10	23	42	55	74	87	106	119
68	93	100	125	244	237	212	205	180	173	148	141	4	29	36	61
16	17	48	49	80	81	112	113	256	225	224	193	192	161	160	129
187	166	155	134	11	22	43	54	75	86	107	118	251	230	219	198
243	238	211	206	179	174	147	142	3	30	35	62	67	94	99	126
72	89	104	121	248	233	216	201	184	169	152	137	8	25	40	57
12	21	44	53	76	85	108	117	252	229	220	197	188	165	156	133
178	175	146	143	2	31	34	63	66	95	98	127	242	239	210	207
247	234	215	202	183	170	151	138	7	26	39	58	71	90	103	122
77	84	109	116	253	228	221	196	189	164	157	132	13	20	45	52

⑪

B_8 C_4
B_1 B_7

1	32	33	64	65	96	97	128	241	240	209	208	177	176	145	144	
75	86	107	118	251	230	219	198	187	166	155	134	11	22	43	54	⑫
254	227	222	195	190	163	158	131	14	19	46	51	78	83	110	115	
184	169	152	137	8	25	40	57	72	89	104	121	248	233	216	201	$B_8 C_{12}$
5	28	37	60	69	92	101	124	245	236	213	204	181	172	149	140	$B_1 B_7$
66	95	98	127	242	239	210	207	178	175	146	143	2	31	34	63	
250	231	218	199	186	167	154	135	10	23	42	55	74	87	106	119	
189	164	157	132	13	20	45	52	77	84	109	116	253	228	221	196	
16	17	48	49	80	81	112	113	256	225	224	193	192	161	160	129	
70	91	102	123	246	235	214	203	182	171	150	139	6	27	38	59	
243	238	211	206	179	174	147	142	3	30	35	62	67	94	99	126	
185	168	153	136	9	24	41	56	73	88	105	120	249	232	217	200	
12	21	44	53	76	85	108	117	252	229	220	197	188	165	156	133	
79	82	111	114	255	226	223	194	191	162	159	130	15	18	47	50	
247	234	215	202	183	170	151	138	7	26	39	58	71	90	103	122	
180	173	148	141	4	29	36	61	68	93	100	125	244	237	212	205	

下列 ①～⑬方以 B_9, B_7 为对角线组. 在 B_9, B_7 中有 10 条线，其 1 次和、2 次和、3 次和都是: 2056 351576 67634176

B_9	5	27	39	57	80	82	110	116	252	230	218	200	177	175	147	141
B_9	12	22	42	56	65	95	99	125	245	235	215	201	192	162	158	132
B_7	2	32	41	55	75	85	109	115	255	225	216	202	182	172	148	142
B_7	4	30	34	64	73	87	107	117	253	227	223	193	184	170	150	140
B_7	6	28	36	62	66	96	105	119	251	229	221	195	191	161	152	138
B_7	8	26	38	60	68	94	98	128	249	231	219	197	189	163	159	129
B_7	15	17	40	58	70	92	100	126	242	240	217	199	187	165	157	131
B_7	13	19	47	49	72	90	102	124	244	238	210	208	185	167	155	133
B_7	11	21	45	51	79	81	104	122	246	236	212	206	178	176	153	135
B_7	9	23	43	53	77	83	111	113	248	234	214	204	180	174	146	144

把这 10 条线组合配对同样可得 2×8 = 16 对 3 次特优线. 对这 13 方进行适当的行，列轮换，使各特优线变成主对角线，将分别得到 16 个 3 次的特优方. 从而由这 13 方可得到 13×16＝208 个 3 次的特优的 16 阶完美幻方. 这些完美幻方的主对角线可分成不同的 16 组，它们又分别说属于 13 个不同的同构类.

1	19	37	55	80	94	108	122	241	227	213	199	192	174	156	138	
105	114	244	230	216	207	189	171	153	130	4	22	40	63	77	91	①
186	161	147	133	7	32	46	60	74	81	99	117	247	240	222	204	
43	57	66	84	102	120	255	237	219	201	178	164	150	136	15	29	$B_2 C_6$
252	234	209	195	181	167	160	142	12	26	33	51	69	87	112	126	$B_7 B_9$
157	139	9	18	36	54	72	95	109	123	249	226	212	198	184	175	
78	92	106	113	243	229	215	208	190	172	154	129	3	21	39	64	
223	205	187	169	146	132	6	24	47	61	75	89	98	116	246	232	
16	30	44	58	65	83	101	119	256	238	220	202	177	163	149	135	
104	127	253	235	217	194	180	166	152	143	13	27	41	50	68	86	
183	176	158	140	10	17	35	53	71	96	110	124	250	225	211	197	
38	56	79	93	107	121	242	228	214	200	191	173	155	137	2	20	
245	231	224	206	188	170	145	131	5	23	48	62	76	90	97	115	
148	134	8	31	45	59	73	82	100	118	248	239	221	203	185	162	
67	85	103	128	254	236	218	193	179	165	151	144	14	28	42	49	
210	196	182	168	159	141	11	25	34	52	70	88	111	125	251	233	

1	19	37	55	80	94	108	122	241	227	213	199	192	174	156	138
152	143	13	27	41	50	68	86	104	127	253	235	217	194	180	166
186	161	147	133	7	32	46	60	74	81	99	117	247	240	222	204
214	200	191	173	155	137	2	20	38	56	79	93	107	121	242	228
252	234	209	195	181	167	160	142	12	26	33	51	69	87	112	126
100	118	248	239	221	203	185	162	148	134	8	31	45	59	73	82
78	92	106	113	243	229	215	208	190	172	154	129	3	21	39	64
34	52	70	88	111	125	251	233	210	196	182	168	159	141	11	25
16	30	44	58	65	83	101	119	256	238	220	202	177	163	149	135
153	130	4	22	40	63	77	91	105	114	244	230	216	207	189	171
183	176	158	140	10	17	35	53	71	96	110	124	250	225	211	197
219	201	178	164	150	136	15	29	43	57	66	84	102	120	255	237
245	231	224	206	188	170	145	131	5	23	48	62	76	90	97	115
109	123	249	226	212	198	184	175	157	139	9	18	36	54	72	95
67	85	103	128	254	236	218	193	179	165	151	144	14	28	42	49
47	61	75	89	98	116	246	232	223	205	187	169	146	132	6	24

② $B_2 C_{14}$ $B_7 B_9$

1	23	44	51	80	90	101	126	241	231	220	195	192	170	149	142
41	54	77	82	104	123	244	239	217	198	189	162	152	139	4	31
74	85	110	113	247	236	211	208	186	165	158	129	7	28	35	64
107	116	255	233	214	205	178	168	155	132	15	25	38	61	66	88
252	227	224	202	181	174	145	135	12	19	48	58	69	94	97	119
221	194	184	171	148	143	9	22	45	50	72	91	100	127	249	230
190	161	151	140	3	32	42	53	78	81	103	124	243	240	218	197
159	137	6	29	34	56	75	84	111	121	246	237	210	200	187	164
16	26	37	62	65	87	108	115	256	234	213	206	177	167	156	131
40	59	68	95	105	118	253	226	216	203	180	175	153	134	13	18
71	92	99	128	250	229	222	193	183	172	147	144	10	21	46	49
102	125	242	232	219	196	191	169	150	141	2	24	43	52	79	89
245	238	209	199	188	163	160	138	5	30	33	55	76	83	112	122
212	207	185	166	157	130	8	27	36	63	73	86	109	114	248	235
179	176	154	133	14	17	39	60	67	96	106	117	254	225	215	204
146	136	11	20	47	57	70	93	98	120	251	228	223	201	182	173

③ $B_6 C_2$ $B_7 B_9$

1	23	44	51	80	90	101	126	241	231	220	195	192	170	149	142
216	203	180	175	153	134	13	18	40	59	68	95	105	118	253	226
74	85	110	113	247	236	211	208	186	165	158	129	7	28	35	64
150	141	2	24	43	52	79	89	102	125	242	232	219	196	191	164
252	227	224	202	181	174	145	135	12	19	48	58	69	94	97	119
36	63	73	86	109	114	248	235	212	207	185	166	157	130	8	27
190	161	151	140	3	32	42	53	78	81	103	124	243	240	218	197
98	120	251	228	223	201	182	173	146	136	11	20	47	57	70	93
16	26	37	62	65	87	108	115	256	234	213	206	177	167	156	131
217	198	189	162	152	139	4	31	41	54	77	82	104	123	244	239
71	92	99	128	250	229	222	193	183	172	147	144	10	21	46	49
155	132	15	25	38	61	66	88	107	116	255	233	214	205	178	168
245	238	209	199	188	163	160	138	5	30	33	55	76	83	112	122
45	50	72	91	100	127	249	230	221	194	184	171	148	143	9	22
179	176	154	133	14	17	39	60	67	96	106	117	254	225	215	204
111	121	246	237	210	200	187	164	159	137	6	29	34	56	75	84

④ $B_6 C_{10}$ $B_7 B_9$

1	30	37	58	80	83	108	119	241	238	213	202	192	163	156	135
104	114	253	230	217	207	180	171	152	130	13	22	41	63	68	91
186	176	147	140	7	17	46	53	74	96	99	124	247	225	222	197
38	57	79	84	107	120	242	237	214	201	191	164	155	136	2	29
252	231	209	206	181	170	160	131	12	23	33	62	69	90	112	115
148	139	8	18	45	54	73	95	100	123	248	226	221	198	185	175
78	85	106	128	243	236	215	193	190	165	154	144	3	28	39	49
210	205	182	169	159	132	11	24	34	61	70	89	111	116	251	232
16	19	44	55	65	94	101	122	256	227	220	199	177	174	149	138
105	127	244	235	216	194	189	166	153	143	4	27	40	50	77	86
183	161	158	133	10	32	35	60	71	81	110	117	250	240	211	204
43	56	66	93	102	121	255	228	219	200	178	173	150	137	15	20
245	234	224	195	188	167	145	142	5	26	48	51	76	87	97	126
157	134	9	31	36	59	72	82	109	118	249	239	212	203	184	162
67	92	103	113	254	229	218	208	179	172	151	129	14	21	42	64
223	196	187	168	146	141	6	25	47	52	75	88	98	125	246	233

⑤

$B_{10}C_6$
B_7B_9

1	30	37	58	80	83	108	119	241	238	213	202	192	163	156	135
153	143	4	27	40	50	77	86	105	127	244	235	216	194	189	166
186	176	147	140	7	17	46	53	74	96	99	124	247	225	222	197
219	200	178	173	150	137	15	20	43	56	66	93	102	121	255	228
252	231	209	206	181	170	160	131	12	23	33	62	69	90	112	115
109	118	249	239	212	203	184	162	157	134	9	31	36	59	72	82
78	85	106	128	243	236	215	193	190	165	154	144	3	28	39	49
47	52	75	88	98	125	246	233	223	196	187	168	146	141	6	25
16	19	44	55	65	94	101	122	256	227	220	199	177	174	149	138
152	130	13	22	41	63	68	91	104	114	253	230	217	207	180	171
183	161	158	133	10	32	35	60	71	81	110	117	250	240	211	204
214	201	191	164	155	136	2	29	38	57	79	84	107	120	242	237
245	234	224	195	188	167	145	142	5	26	48	51	76	87	97	126
100	123	248	226	221	198	185	175	148	139	8	18	45	54	73	95
67	92	103	113	254	229	218	208	179	172	151	129	14	21	42	64
34	61	70	89	111	116	251	232	210	205	182	169	159	132	11	24

⑥

$B_{10}C_{14}$
B_7 B_9

1	26	44	62	80	87	101	115	241	234	220	206	192	167	149	131
40	54	68	82	105	123	253	239	216	198	180	162	153	139	13	31
74	92	110	128	247	229	211	193	186	172	158	144	7	21	35	49
102	116	242	233	219	205	191	168	150	132	2	25	43	61	79	88
252	238	224	199	181	163	145	138	12	30	48	55	69	83	97	122
212	194	185	171	157	143	8	22	36	50	73	91	109	127	248	230
190	176	151	133	3	17	42	60	78	96	103	117	243	225	218	204
146	137	11	29	47	56	70	84	98	121	251	237	223	200	182	164
16	23	37	51	65	90	108	126	256	231	213	195	177	170	156	142
41	59	77	95	104	118	244	226	217	203	189	175	152	134	4	18
71	85	99	113	250	236	222	208	183	165	147	129	10	28	46	64
107	125	255	232	214	196	178	169	155	141	15	24	38	52	66	89
245	227	209	202	188	174	160	135	5	19	33	58	76	94	112	119
221	207	184	166	148	130	9	27	45	63	72	86	100	114	249	235
179	161	154	140	14	32	39	53	67	81	106	124	254	240	215	197
159	136	6	20	34	57	75	93	111	120	246	228	210	201	187	173

⑦

$B_{14}C_2$
B_7 B_9

1	26	44	62	80	87	101	115	241	234	220	206	192	167	149	131	
217	203	189	175	152	134	4	18	41	59	77	95	104	118	244	226	⑧
74	92	110	128	247	229	211	193	186	172	158	144	7	21	35	49	
155	141	15	24	38	52	66	89	107	125	255	232	214	196	178	169	B_{14} C_{10}
252	238	224	199	181	163	145	138	12	30	48	55	69	83	97	122	B_7 B_9
45	63	72	86	100	114	249	235	221	207	184	166	148	130	9	27	
190	176	151	133	3	17	42	60	78	96	103	117	243	225	218	204	
111	120	246	228	210	201	187	173	159	136	6	20	34	57	75	93	
16	23	37	51	65	90	108	126	256	231	213	195	177	170	156	142	
216	198	180	162	153	139	13	31	40	54	68	82	105	123	253	239	
71	85	99	113	250	236	222	208	183	165	147	129	10	28	46	64	
150	132	2	25	43	61	79	88	102	116	242	233	219	205	191	168	
245	227	209	202	188	174	160	135	5	19	33	58	76	94	112	119	
36	50	73	91	109	127	248	230	212	194	185	171	157	143	8	22	
179	161	154	140	14	32	39	53	67	81	106	124	254	240	215	197	
98	121	251	237	223	200	182	164	146	137	11	29	47	56	70	84	

1	21	48	60	65	85	112	124	241	229	224	204	177	165	160	140	
73	84	104	125	249	228	216	205	185	164	152	141	9	20	40	61	⑨
250	227	215	206	186	163	151	142	10	19	39	62	74	83	103	126	
187	162	150	143	11	18	38	63	75	82	102	127	251	226	214	207	B_4 C_4
12	17	37	64	76	81	101	128	252	225	213	208	188	161	149	144	B_7 B_9
77	89	100	120	253	233	212	200	189	169	148	136	13	25	36	56	
254	234	211	199	190	170	147	135	14	26	35	55	78	90	99	119	
191	171	146	134	15	27	34	54	79	91	98	118	255	235	210	198	
16	28	33	53	80	92	97	117	256	236	209	197	192	172	145	133	
72	93	105	116	248	237	217	196	184	173	153	132	8	29	41	52	
247	238	218	195	183	174	154	131	7	30	42	51	71	94	106	115	
182	175	155	130	6	31	43	50	70	95	107	114	246	239	219	194	
5	32	44	49	69	96	108	113	245	240	220	193	181	176	156	129	
68	88	109	121	244	232	221	201	180	168	157	137	4	24	45	57	
243	231	222	202	179	167	158	138	3	23	46	58	67	87	110	122	
178	166	159	139	2	22	47	59	66	86	111	123	242	230	223	203	

1	21	48	60	65	85	112	124	241	229	224	204	177	165	160	140	
184	173	153	132	8	29	41	52	72	93	105	116	248	237	217	196	⑩
250	227	215	206	186	163	151	142	10	19	39	62	74	83	103	126	
70	95	107	114	246	239	219	194	182	175	155	130	6	31	43	50	
12	17	37	64	76	81	101	128	252	225	213	208	188	161	149	144	B_4 C_{12}
180	168	157	137	4	24	45	57	68	88	109	121	244	232	221	201	B_7 B_9
254	234	211	199	190	170	147	135	14	26	35	55	78	90	99	119	
66	86	111	123	242	230	223	203	178	166	159	139	2	22	47	59	
16	28	33	53	80	92	97	117	256	236	209	197	192	172	145	133	
185	164	152	141	9	20	40	61	73	84	104	125	249	228	216	205	
247	238	218	195	183	174	154	131	7	30	42	51	71	94	106	115	
75	82	102	127	251	226	214	207	187	162	150	143	11	18	38	63	
5	32	44	49	69	96	108	113	245	240	220	193	181	176	156	129	
189	169	148	136	13	25	36	56	77	89	100	120	253	233	212	200	
243	231	222	202	179	167	158	138	3	23	46	58	67	87	110	122	
79	91	98	118	255	235	210	198	191	171	146	134	15	27	34	54	

1	28	48	53	65	92	112	117	241	236	224	197	177	172	160	133
72	84	105	125	248	228	217	205	184	164	153	141	8	20	41	61
250	238	215	195	186	174	151	131	10	30	39	51	74	94	103	115
182	162	155	143	6	18	43	63	70	82	107	127	246	226	219	207
12	32	37	49	76	96	101	113	252	240	213	193	188	176	149	129
68	89	109	120	244	233	221	200	180	169	157	136	4	25	45	56
254	231	211	202	190	167	147	139	14	23	35	58	78	87	99	122
178	171	159	134	2	27	47	54	66	91	111	118	242	235	223	198
16	21	33	60	80	85	97	124	256	229	209	204	192	165	145	140
73	93	104	116	249	237	216	196	185	173	152	132	9	29	40	52
247	227	218	206	183	163	154	142	7	19	42	62	71	83	106	126
187	175	150	130	11	31	38	50	75	95	102	114	251	239	214	194
5	17	44	64	69	81	108	128	245	225	220	208	181	161	156	144
77	88	100	121	253	232	212	201	189	168	148	137	13	24	36	57
243	234	222	199	179	170	158	135	3	26	46	55	67	90	110	119
191	166	146	139	15	22	34	59	79	86	98	123	255	230	210	203

⑪

$B_{12}C_4$
$B_7\ B_9$

1	28	48	53	65	92	112	117	241	236	224	197	177	172	160	133
185	173	152	132	9	29	40	52	73	93	104	116	249	237	216	196
250	238	215	195	186	174	151	131	10	30	39	51	74	94	103	115
75	95	102	114	251	239	214	194	187	175	150	130	11	31	38	50
12	32	37	49	76	96	101	113	252	240	213	193	188	176	149	129
189	168	148	137	13	24	36	57	77	88	100	121	253	232	212	201
254	231	211	202	190	167	147	139	14	23	35	58	78	87	99	122
79	86	98	123	255	230	210	203	191	166	146	139	15	22	34	59
16	21	33	60	80	85	97	124	256	229	209	204	192	165	145	140
184	164	153	141	8	20	41	61	72	84	105	125	248	228	217	205
247	227	218	206	183	163	154	142	7	19	42	62	71	83	106	126
70	82	107	127	246	226	219	207	182	162	155	143	6	18	43	63
5	17	44	64	69	81	108	128	245	225	220	208	181	161	156	144
180	169	157	136	4	25	45	56	68	89	109	120	244	233	221	200
243	234	222	199	179	170	158	135	3	26	46	55	67	90	110	119
66	91	111	118	242	235	223	198	178	171	159	134	2	27	47	54

⑫

$B_{12}C_{12}$
$B_7\ B_9$

253	228	221	196	189	164	157	132	13	20	45	52	77	84	109	116
3	30	35	62	67	94	99	126	243	238	211	206	179	174	147	142
255	226	223	194	191	162	159	130	15	18	47	50	79	82	111	114
1	32	33	64	65	96	97	128	241	240	209	208	177	176	145	144
248	233	216	201	184	169	152	137	8	25	40	57	72	89	104	121
10	23	42	55	74	87	106	119	250	231	218	199	186	167	154	135
246	235	214	203	182	171	150	139	6	27	38	59	70	91	102	123
12	21	44	53	76	85	108	117	252	229	220	197	188	165	156	133
244	237	212	205	180	173	148	141	4	29	36	61	68	93	100	125
14	19	46	51	78	83	110	115	254	227	222	195	190	163	158	131
242	239	210	207	178	175	146	143	2	31	34	63	66	95	98	127
16	17	48	49	80	81	112	113	256	225	224	193	192	161	160	129
249	232	217	200	185	168	153	136	9	24	41	56	73	88	105	120
7	26	39	58	71	90	103	122	247	234	215	202	183	170	151	138
251	230	219	198	187	166	155	134	11	22	43	54	75	86	107	118
5	28	37	60	69	92	101	124	245	236	213	204	181	172	149	140

⑬

B_8C_8
B_7B_9

本例还有如下特优线，同样可以给出 3 次特优的 16 阶完美幻方:

B_9 1 31 35 61 69 91 103 121 256 226 222 196 188 166 154 136
B_3 11 17 36 55 79 92 105 115 246 240 221 202 178 165 152 142
2056 353624 68423680

B_9 1 31 35 61 69 91 103 121 256 226 222 196 188 166 154 136
B_{11} 2 28 40 51 75 96 100 122 255 229 217 206 182 161 157 135
2056 353624 68423680

B_9 16 18 46 52 76 86 106 120 241 239 211 205 181 171 151 137
B_3 6 32 45 58 66 85 104 126 251 225 212 199 191 172 153 131
2056 349528 66844672

B_9 16 18 46 52 76 86 106 120 241 239 211 205 181 171 151 137
B_{11} 15 21 41 62 70 81 109 119 242 236 216 195 187 176 148 138
2056 349528 66844672

B_{15} 2 17 41 58 75 92 109 126 255 240 216 199 182 165 148 131
B_5 3 24 44 50 71 93 97 118 254 233 213 207 186 164 160 139
2056 355480 69139168

B_{15} 2 17 41 58 75 92 109 126 255 240 216 199 182 165 148 131
B_{13} 7 20 33 59 78 88 101 114 250 237 224 198 179 169 156 143
2056 355480 69139168

B_{15} 15 32 40 55 70 85 100 115 242 225 217 202 187 172 157 142
B_5 14 25 37 63 74 84 112 123 243 232 220 194 183 173 145 134
2056 347672 66129184

B_{15} 15 32 40 55 70 85 100 115 242 225 217 202 187 172 157 142
B_{13} 10 29 48 54 67 89 108 127 247 228 209 203 190 168 149 130
2056 347672 66129184

例 2　行序(1,2,3,4,5,6,7,8,16,15,14,13,12,11,10,9)
列序(1,14,15,11,10,5,13,8,16,3,2,6,7,12,4,9)　(26)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,　1,14,15,11,10, 5,13,8,　列和
16,15,14,13,12,11,10,9　16, 3, 2, 6, 7,12, 4,9　17

如例 1 可给出分段方,列和方,行和方.并计算各列和方各线的次和, 我们有:

下列 ①～⑬方以列和方 B_1,B_{15} 为对角线组. 在 B_1,B_{15} 中，各含有一对 5 次特优线和一对 3 次特优线. 从而可给出 5 次特优的 16 阶完美幻方和 3 次特优的 16 阶完美幻方各 1 个：

B_1 6 215 232 176 159 78 205 124 251 42 25 81 98 179 52 133
B_{15} 14 223 240 168 151 70 197 116 243 34 17 89 106 187 60 141
2056 353816 68497696 14126703368 3030939566176

B_1 11 218 233 161 146 67 196 117 246 39 24 96 111 190 61 140
B_{15} 3 210 225 169 154 75 204 125 254 47 32 88 103 182 53 132
2056 349336 66770656

133	12	213	236	165	156	69	204	117	252	37	28	85	108	181	60	①
118	251	38	27	86	107	182	59	134	11	214	235	166	155	70	203	列 行
135	10	215	234	167	154	71	202	119	250	39	26	87	106	183	58	B_8 C_8
120	249	40	25	88	105	184	57	136	9	216	233	168	153	72	201	
144	1	224	225	176	145	80	193	128	241	48	17	96	97	192	49	I II
127	242	47	18	95	98	191	50	143	2	223	226	175	146	79	194	B_1 B_{15}
142	3	222	227	174	147	78	195	126	243	46	19	94	99	190	51	
125	244	45	20	93	100	189	52	141	4	221	228	173	148	77	196	
140	5	220	229	172	149	76	197	124	245	44	21	92	101	188	53	
123	246	43	22	91	102	187	54	139	6	219	230	171	150	75	198	
138	7	218	231	170	151	74	199	122	247	42	23	90	103	186	55	
121	248	41	24	89	104	185	56	137	8	217	232	169	152	73	200	
129	16	209	240	161	160	65	208	113	256	33	32	81	112	177	64	
114	255	34	31	82	111	178	63	130	15	210	239	162	159	66	207	
131	14	211	238	163	158	67	206	115	254	35	30	83	110	179	62	
116	253	36	29	84	109	180	61	132	13	212	237	164	157	68	205	
159	77	203	121	242	36	22	88	111	189	59	137	2	212	230	168	②
51	133	7	224	238	172	154	65	195	117	247	48	30	92	106	177	
253	43	25	82	100	182	56	143	13	219	233	162	148	70	200	127	列 行
229	167	160	78	204	122	241	35	21	87	112	190	60	138	1	211	B_2 C_2
107	185	50	132	6	216	239	173	155	73	194	116	246	40	31	93	I II
199	128	254	44	26	81	99	181	55	144	14	220	234	161	147	69	B_1 B_{15}
9	210	228	166	152	79	205	123	249	34	20	86	104	191	61	139	
32	94	108	186	49	131	5	215	240	174	156	74	193	115	245	39	
146	68	198	120	255	45	27	89	98	180	54	136	15	221	235	169	
62	140	10	209	227	165	151	80	206	124	250	33	19	85	103	192	
244	38	24	95	109	187	57	130	4	214	232	175	157	75	201	114	
236	170	145	67	197	119	256	46	28	90	97	179	53	135	16	222	
102	184	63	141	11	217	226	164	150	72	207	125	251	41	18	84	
202	113	243	37	23	96	110	188	58	129	3	213	231	176	158	76	
8	223	237	171	153	66	196	118	248	47	29	91	105	178	52	134	
17	83	101	183	64	142	12	218	225	163	149	71	208	126	252	42	
98	180	54	136	15	221	235	169	146	68	198	120	255	45	27	89	③
51	133	7	224	238	172	154	65	195	117	247	48	30	92	106	177	
4	214	232	175	157	75	201	114	244	38	24	95	109	187	57	130	列 行
229	167	160	78	204	122	241	35	21	87	112	190	60	138	1	211	B_2 C_{10}
150	72	207	125	251	41	18	84	102	184	63	141	11	217	226	164	I II
199	128	254	44	26	81	99	181	55	144	14	220	234	161	147	69	B_1 B_{15}
248	47	29	91	105	178	52	134	8	223	237	171	153	66	196	118	
32	94	108	186	49	131	5	215	240	174	156	74	193	115	245	39	
111	189	59	137	2	212	230	168	159	77	203	121	242	36	22	88	
62	140	10	209	227	165	151	80	206	124	250	33	19	85	103	192	
13	219	233	162	148	70	200	127	253	43	25	82	100	182	56	143	
236	170	145	67	197	119	256	46	28	90	97	179	53	135	16	222	
155	73	194	116	246	40	31	93	107	185	50	132	6	216	239	173	
202	113	243	37	23	96	110	188	58	129	3	213	231	176	158	76	
249	34	20	86	104	191	61	139	9	210	228	166	152	79	205	123	
17	83	101	183	64	142	12	218	225	163	149	71	208	126	252	42	

239	164	155	72	194	125	246	41	31	84	107	184	50	141	6	217
147	76	199	113	254	37	26	96	99	188	55	129	14	213	234	176
205	118	249	47	20	91	104	178	61	134	9	223	228	171	152	66
245	42	32	83	108	183	49	142	5	218	240	163	156	71	193	126
27	88	98	189	54	137	15	212	235	168	146	77	198	121	255	36
103	177	62	133	10	224	227	172	151	65	206	117	250	48	19	92
57	143	4	219	232	162	157	70	201	127	244	43	24	82	109	182
16	211	236	167	145	78	197	122	256	35	28	87	97	190	53	138
226	173	150	73	207	116	251	40	18	93	102	185	63	132	11	216
158	69	202	128	243	44	23	81	110	181	58	144	3	220	231	161
196	123	248	34	29	86	105	191	52	139	8	210	237	166	153	79
252	39	17	94	101	186	64	131	12	215	225	174	149	74	208	115
22	89	111	180	59	136	2	221	230	169	159	68	203	120	242	45
106	192	51	140	7	209	238	165	154	80	195	124	247	33	30	85
56	130	13	214	233	175	148	75	200	114	253	38	25	95	100	187
1	222	229	170	160	67	204	119	241	46	21	90	112	179	60	135

④

$B_{10}\ C_{10}$

$B_1\ B_{15}$

18	93	102	185	63	132	11	216	226	173	150	73	207	116	251	40
147	76	199	113	254	37	26	96	99	188	55	129	14	213	234	176
52	139	8	210	237	166	153	79	196	123	248	34	29	86	105	191
245	42	32	83	108	183	49	142	5	218	240	163	156	71	193	126
230	169	159	68	203	120	242	45	22	89	111	180	59	136	2	221
103	177	62	133	10	224	227	172	151	65	206	117	250	48	19	92
200	114	253	38	25	95	100	187	56	130	13	214	233	175	148	75
16	211	236	167	145	78	197	122	256	35	28	87	97	190	53	138
31	84	107	184	50	141	6	217	239	164	155	72	194	125	246	41
158	69	202	128	243	44	23	81	110	181	58	144	3	220	231	161
61	134	9	223	228	171	152	66	205	118	249	47	20	91	104	178
252	39	17	94	101	186	64	131	12	215	225	174	149	74	208	115
235	168	146	77	198	121	255	36	27	88	98	189	54	137	15	212
106	192	51	140	7	209	238	165	154	80	195	124	247	33	30	85
201	127	244	43	24	82	109	182	57	143	4	219	232	162	157	70
1	222	229	170	160	67	204	119	241	46	21	90	112	179	60	135

⑤

$B_{10}\ C_2$

$B_1\ B_{15}$

250	35	23	94	106	179	55	142	10	211	231	174	154	67	199	126
105	180	56	141	9	212	232	173	153	68	200	125	249	36	24	93
1	213	240	172	145	69	208	124	241	37	32	92	97	181	64	140
146	70	207	123	242	38	31	91	98	182	63	139	2	214	239	171
243	39	30	90	99	183	62	138	3	215	238	170	147	71	206	122
100	184	61	137	4	216	237	169	148	72	205	121	244	40	29	89
5	224	236	161	149	80	204	113	245	48	28	81	101	192	60	129
150	79	203	114	246	47	27	82	102	191	59	130	6	223	235	162
247	46	26	83	103	190	58	131	7	222	234	163	151	78	202	115
104	189	57	132	8	221	233	164	152	77	201	116	248	45	25	84
16	220	225	165	160	76	193	117	256	44	17	85	112	188	49	133
159	75	194	118	255	43	18	86.	111	187	50	134	15	219	226	166
254	42	19	87	110	186	51	135	14	218	227	167	158	74	195	119
109	185	52	136	13	217	228	168	157	73	196	120	253	41	20	88
12	209	229	176	156	65	197	128	252	33	21	96	108	177	53	144
155	66	198	127	251	34	22	95	107	178	54	143	11	210	230	175

⑥

列　行

$B_4\ \ C_4$

Ⅰ　Ⅱ

$B_1\ \ B_{15}$

250	35	23	94	106	179	55	142	10	211	231	174	154	67	199	126	⑦
152	77	201	116	248	45	25	84	104	189	57	132	8	221	233	164	
1	213	240	172	145	69	208	124	241	37	32	92	97	181	64	140	列 行
111	187	50	134	15	219	226	166	159	75	194	118	255	43	18	86	B_4 C_{12}
243	39	30	90	99	183	62	138	3	215	238	170	147	71	206	122	Ⅰ Ⅱ
157	73	196	120	253	41	20	88	109	185	52	136	13	217	228	168	B_1 B_{15}
5	224	236	161	149	80	204	113	245	48	28	81	101	192	60	129	
107	178	54	143	11	210	230	175	155	66	198	127	251	34	22	95	
247	46	26	83	103	190	58	131	7	222	234	163	151	78	202	115	
153	68	200	125	249	36	24	93	105	180	56	141	9	212	232	173	
16	220	225	165	160	76	193	117	256	44	17	85	112	188	49	133	
98	182	63	139	2	214	239	171	146	70	207	123	242	38	31	91	
254	42	19	87	110	186	51	135	14	218	227	167	158	74	195	119	
148	72	205	121	244	40	29	89	100	184	61	137	4	216	237	169	
12	209	229	176	156	65	197	128	252	33	21	96	108	177	53	144	
102	191	59	130	6	223	235	162	150	79	203	114	246	47	27	82	

243	42	30	87	99	186	62	135	3	218	238	167	147	74	206	119	⑧
148	73	205	120	244	41	29	88	100	185	61	136	4	217	237	168	
5	209	236	176	149	65	204	128	245	33	28	96	101	177	60	144	B_{12} C_{12}
102	178	59	143	6	210	235	175	150	66	203	127	246	34	27	95	
247	35	26	94	103	179	58	142	7	211	234	174	151	67	202	126	B_1 B_{15}
152	68	201	125	248	36	25	93	104	180	57	141	8	212	233	173	
16	213	225	172	160	69	193	124	256	37	17	92	112	181	49	140	
111	182	50	139	15	214	226	171	159	70	194	123	255	38	18	91	
254	39	19	90	110	183	51	138	14	215	227	170	158	71	195	122	
157	72	196	121	253	40	20	89	109	184	52	137	13	216	228	169	
12	224	229	161	156	80	197	113	252	48	21	81	108	192	53	129	
107	191	54	130	11	223	230	162	155	79	198	114	251	47	22	82	
250	46	23	83	106	190	55	131	10	222	231	163	154	78	199	115	
153	77	200	116	249	45	24	84	105	189	56	132	9	221	232	164	
1	220	240	165	145	76	208	117	241	44	32	85	97	188	64	133	
98	187	63	134	2	219	239	166	146	75	207	118	242	43	31	86	

243	42	30	87	99	186	62	135	3	218	238	167	147	74	206	119	⑨
109	184	52	137	13	216	228	169	157	72	196	121	253	40	20	89	
5	209	236	176	149	65	204	128	245	33	28	96	101	177	60	144	B_{12} C_4
155	79	198	114	251	47	22	82	107	191	54	130	11	223	230	162	
247	35	26	94	103	179	58	142	7	211	234	174	151	67	202	126	B_1 B_{15}
105	189	56	132	9	221	232	164	153	77	200	116	249	45	24	84	
16	213	225	172	160	69	193	124	256	37	17	92	112	181	49	140	
146	75	207	118	242	43	31	86	98	187	63	134	2	219	239	166	
254	39	19	90	110	183	51	138	14	215	227	170	158	71	195	122	
100	185	61	136	4	217	237	168	148	73	205	120	244	41	29	88	
12	224	229	161	156	80	197	113	252	48	21	81	108	192	53	129	
150	66	203	127	246	34	27	95	102	178	59	143	6	210	235	175	
250	46	23	83	106	190	55	131	10	222	231	163	154	78	199	115	
104	180	57	141	8	212	233	173	152	68	201	125	248	36	25	93	
1	220	240	165	145	76	208	117	241	44	32	85	97	188	64	133	
159	70	194	123	255	38	18	91	111	182	50	139	15	214	226	171	

232	171	148	79	201	118	253	34	24	91	100	191	57	134	13	210
1	215	236	163	160	74	197	126	241	39	28	83	112	186	53	142
63	137	6	221	226	168	155	68	207	121	246	45	18	88	107	180
99	192	58	133	14	209	231	172	147	80	202	117	254	33	23	92
29	82	104	187	52	143	9	214	237	162	152	75	196	127	249	38
245	46	17	87	108	179	64	138	5	222	225	167	156	67	208	122
203	116	255	41	22	93	98	184	59	132	15	217	230	173	146	72
151	76	195	128	250	37	30	81	103	188	51	144	10	213	238	161
233	166	157	66	200	123	244	47	25	86	109	178	56	139	4	223
16	218	229	174	145	71	204	115	256	42	21	94	97	183	60	131
50	136	11	212	239	169	150	77	194	120	251	36	31	89	102	189
110	177	55	140	3	224	234	165	158	65	199	124	243	48	26	85
20	95	105	182	61	130	8	219	228	175	153	70	205	114	248	43
252	35	32	90	101	190	49	135	12	211	240	170	149	78	193	119
198	125	242	40	27	84	111	185	54	141	2	216	235	164	159	73
154	69	206	113	247	44	19	96	106	181	62	129	7	220	227	176

⑩

$B_6 C_6$

$B_1 B_{15}$

25	86	109	178	56	139	4	223	233	166	157	66	200	123	244	47
1	215	236	163	160	74	197	126	241	39	28	83	112	186	53	142
194	120	251	36	31	89	102	189	50	136	11	212	239	169	150	77
99	192	58	133	14	209	231	172	147	80	202	117	254	33	23	92
228	175	153	70	205	114	248	43	20	95	105	182	61	130	8	219
245	46	17	87	108	179	64	138	5	222	225	167	156	67	208	122
54	141	2	216	235	164	159	73	198	125	242	40	27	84	111	185
151	76	195	128	250	37	30	81	103	188	51	144	10	213	238	161
24	91	100	191	57	134	13	210	232	171	148	79	201	118	253	34
16	218	229	174	145	71	204	115	256	42	21	94	97	183	60	131
207	121	246	45	18	88	107	180	63	137	6	221	226	168	155	68
110	177	55	140	3	224	234	165	158	65	199	124	243	48	26	85
237	162	152	75	196	127	249	38	29	82	104	187	52	143	9	214
252	35	32	90	101	190	49	135	12	211	240	170	149	78	193	119
59	132	15	217	230	173	146	72	203	116	255	41	22	93	98	184
154	69	206	113	247	44	19	96	106	181	62	129	7	220	227	176

⑪

$B_6 C_{14}$

$B_1 B_{15}$

232	166	148	66	201	123	253	47	24	86	100	178	57	139	13	223
16	215	229	163	145	74	204	126	256	39	21	83	97	186	60	142
63	136	6	212	226	169	155	77	207	120	246	36	18	89	107	189
110	192	55	133	3	209	234	172	158	80	199	117	243	33	26	92
29	95	104	182	52	130	9	219	237	175	152	70	196	114	249	43
252	46	32	87	101	179	49	138	12	222	240	167	149	67	193	122
203	125	255	40	22	84	98	185	59	141	15	216	230	164	146	73
154	76	206	128	247	37	19	81	106	188	62	144	7	213	227	161
233	171	157	79	200	118	244	34	25	91	109	191	56	134	4	210
1	218	236	174	160	71	197	115	241	42	28	94	112	183	53	131
50	137	11	221	239	168	150	68	194	121	251	45	31	88	102	180
99	177	58	140	14	224	231	165	147	65	202	124	254	48	23	85
20	82	105	187	61	143	8	214	228	162	153	75	205	127	248	38
245	35	17	90	108	190	64	135	5	211	225	170	156	78	208	119
198	116	242	41	27	93	111	184	54	132	2	217	235	173	159	72
151	69	195	113	250	44	30	96	103	181	51	129	10	220	238	176

⑫

$B_{14} C_6$

$B_1 B_{15}$

25	91	109	191	56	134	4	210	233	171	157	79	200	118	244	34	⑬
16	215	229	163	145	74	204	126	256	39	21	83	97	186	60	142	
194	121	251	45	31	88	102	180	50	137	11	221	239	168	150	68	$B_{14}\,C_{14}$
110	192	55	133	3	209	234	172	158	80	199	117	243	33	26	92	
228	162	153	75	205	127	248	38	20	82	105	187	61	143	8	214	$B_1 \quad B_{15}$
252	46	32	87	101	179	49	138	12	222	240	167	149	67	193	122	
54	132	2	217	235	173	159	72	198	116	242	41	27	93	111	184	
154	76	206	128	247	37	19	81	106	188	62	144	7	213	227	161	
24	86	100	178	57	139	13	223	232	166	148	66	201	123	253	47	
1	218	236	174	160	71	197	115	241	42	28	94	112	183	53	131	
207	120	246	36	18	89	107	189	63	136	6	212	226	169	155	77	
99	177	58	140	14	224	231	165	147	65	202	124	254	48	23	85	
237	175	152	70	196	114	249	43	29	95	104	182	52	130	9	219	
245	35	17	90	108	190	64	135	5	211	225	170	156	78	208	119	
59	141	15	216	230	164	146	73	203	125	255	40	22	84	98	185	
151	69	195	113	250	44	30	96	103	181	51	129	10	220	238	176	

这 13 方中，各含有 1 对 5 次特优线，1 对 3 次特优线. 因此可得 1 个 5 次特优方，1 个 3 次特优方. 例如⑪作适当的行、列轮回可得⑭、⑮ .

52	143	9	214	237	162	152	75	196	127	249	38	29	82	104	**187**	⑭
149	**78**	193	119	252	35	32	90	101	190	49	135	12	211	**240**	170	
22	93	**98**	184	59	132	15	217	230	173	146	72	203	**116**	255	41	
7	220	227	**176**	154	69	206	113	247	44	19	96	**106**	181	62	129	
200	123	244	47	**25**	86	109	178	56	139	4	**223**	233	166	157	66	
112	186	53	142	1	**215**	236	163	160	74	**197**	126	241	39	28	83	
239	169	150	77	194	120	**251**	36	31	**89**	102	189	50	136	11	212	
254	33	23	92	99	192	58	**133**	**14**	209	231	172	147	80	202	117	主对角线
61	130	8	219	228	175	153	**70**	**205**	114	248	43	20	95	105	182	
156	67	208	122	245	46	**17**	87	108	**179**	64	138	5	222	225	167	2056
27	84	111	185	54	**141**	2	216	235	164	**159**	73	198	125	242	40	353816
10	213	238	161	**151**	76	195	128	250	37	30	**81**	103	188	51	144	68497696
201	118	253	**34**	24	91	100	191	57	134	13	210	**232**	171	148	79	14126703368
97	183	**60**	131	16	218	229	174	145	71	204	115	256	**42**	21	94	3030939566176
226	**168**	155	68	207	121	246	45	18	88	107	180	63	137	**6**	221	
243	48	26	85	110	177	55	140	3	224	234	165	158	65	199	**124**	

(2) $n = 24, \varphi(24) = 8, 24^2 = 576, \mathbf{F} = \{1,2,\cdots,576\}, \Sigma_{24} = 6924.$

$$1 + 2 + \cdots + 24 = 12\times 25 = 3\times 100$$

可幻排列:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{matrix} \tag{27}$$

$\longrightarrow \pi = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,24,23,22,21,20,19,18,17,16,15,14,13)$

以π为行、列序作分段方A, 同样执行行、列 Z 变换可得:

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
27	80	144	187	230	268	537	503	450	397	341	298	46	89	121	174	227	285	544	482	437	396	356	303
53	106	166	209	241	558	515	477	424	362	319	12	68	111	147	200	264	571	518	460	417	383	330	13
79	132	188	231	267	536	504	451	398	340	297	47	90	133	173	226	286	545	481	438	395	357	304	26
105	167	210	253	557	514	478	425	361	318	11	69	112	146	199	252	572	519	459	416	384	331	14	52
131	189	232	266	535	492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78
168	211	254	556	513	479	426	373	317	10	70	113	145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104
190	233	265	534	491	453	400	338	295	36	92	135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37	77	130
212	255	555	512	480	427	374	316	9	71	114	157	197	250	574	521	457	414	371	333	16	50	103	156
234	277	533	490	454	401	337	294	35	93	136	170	223	276	548	495	435	392	360	307	38	76	129	191
256	554	511	468	428	375	315	8	72	115	158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213
278	532	489	455	402	349	293	34	94	137	169	222	275	549	496	434	391	348	308	39	75	128	192	235
553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248	576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257
531	488	456	403	350	292	33	95	138	181	221	274	550	497	433	390	347	309	40	74	127	180	236	279
509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471	411	368	336	19	62	100	153	215	258	565
487	444	404	351	291	32	96	139	182	220	273	551	498	445	389	346	310	41	73	126	179	237	280	530
465	431	378	325	5	58	118	161	193	246	563	525	472	410	367	324	20	63	99	152	216	259	566	508
447	405	352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446	388	345	311	42	85	125	178	238	281	529	486
432	379	326	4	57	119	162	205	245	562	526	473	409	366	323	21	64	98	151	204	260	567	507	464
406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177	239	282	541	485	442
380	327	3	56	120	163	206	244	561	527	474	421	365	322	22	65	97	150	203	261	568	506	463	420
354	301	29	82	142	185	217	270	539	501	448	386	343	300	44	87	123	176	240	283	542	484	441	407
328	2	55	108	164	207	243	560	528	475	422	364	321	23	66	109	149	202	262	569	505	462	419	381
302	28	81	143	186	229	269	538	502	449	385	342	299	45	88	122	175	228	284	543	483	440	408	355

① 列 B_3 行 C_3 ⅠB_{17} ⅡB_{22} $\Sigma_{24}=6924.$

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
80	144	187	230	268	537	503	450	397	341	298	46	89	121	174	227	285	544	482	437	396	356	303	27
166	209	241	558	515	477	424	362	319	12	68	111	147	200	264	571	518	460	417	383	330	13	53	106
231	267	536	504	451	398	340	297	47	90	133	173	226	286	545	481	438	395	357	304	26	79	132	188
557	514	478	425	361	318	11	69	112	146	199	252	572	519	459	416	384	331	14	52	105	167	210	253
492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78	131	189	232	266	535
426	373	317	10	70	113	145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104	168	211	254	556	513	479
338	295	36	92	135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37	77	130	190	233	265	534	491	453	400
9	71	114	157	197	250	574	521	457	414	371	333	16	50	103	156	212	255	555	512	480	427	374	316
93	136	170	223	276	548	495	435	392	360	307	38	76	129	191	234	277	533	490	454	401	337	294	35
158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213	256	554	511	468	428	375	315	8	72	115
222	275	549	496	434	391	348	308	39	75	128	192	235	278	532	489	455	402	349	293	34	94	137	169
576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257	553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248
497	433	390	347	309	40	74	127	180	236	279	531	488	456	403	350	292	33	95	138	181	221	274	550
411	368	336	19	62	100	153	215	258	565	509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471
346	310	41	73	126	179	237	280	530	487	444	404	351	291	32	96	139	182	220	273	551	498	445	389
20	63	99	152	216	259	566	508	465	431	378	325	5	58	118	161	193	246	563	525	472	410	367	324
85	125	178	238	281	529	486	447	405	352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446	388	345	311	42
151	204	260	567	507	464	432	379	326	4	57	119	162	205	245	562	526	473	409	366	323	21	64	98
239	282	541	485	442	406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177
568	506	463	420	380	327	3	56	120	163	206	244	561	527	474	421	365	322	22	65	97	150	203	261
484	441	407	354	301	29	82	142	185	217	270	539	501	448	386	343	300	44	87	123	176	240	283	542
419	381	328	2	55	108	164	207	243	560	528	475	422	364	321	23	66	109	149	202	262	569	505	462
355	302	28	81	143	186	229	269	538	502	449	385	342	299	45	88	122	175	228	284	543	483	440	408

② 列 $\boldsymbol{B}_{17}$ 行 $\boldsymbol{C}_3$ Ⅰ$\boldsymbol{B}_{12}$ Ⅱ$\boldsymbol{B}_3$ $\Sigma_{24}=6924$.

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
131	189	232	266	535	492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78
256	554	511	468	428	375	315	8	72	115	158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213
487	444	404	351	291	32	96	139	182	220	273	551	498	445	389	346	310	41	73	126	179	237	280	530
380	327	3	56	120	163	206	244	561	527	474	421	365	322	22	65	97	150	203	261	568	506	463	420
27	80	144	187	230	268	537	503	450	397	341	298	46	89	121	174	227	285	544	482	437	396	356	303
168	211	254	556	513	479	426	373	317	10	70	113	145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104
278	532	489	455	402	349	293	34	94	137	169	222	275	549	496	434	391	348	308	39	75	128	192	235
465	431	378	325	5	58	118	161	193	246	563	525	472	410	367	324	20	63	99	152	216	259	566	508
354	301	29	82	142	185	217	270	539	501	448	386	343	300	44	87	123	176	240	283	542	484	441	407
53	106	166	209	241	558	515	477	424	362	319	12	68	111	147	200	264	571	518	460	417	383	330	13
190	233	265	534	491	453	400	338	295	36	92	135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37	77	130
553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248	576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257
447	405	352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446	388	345	311	42	85	125	178	238	281	529	486
328	2	55	108	164	207	243	560	528	475	422	364	321	23	66	109	149	202	262	569	505	462	419	381
79	132	188	231	267	536	504	451	398	340	297	47	90	133	173	226	286	545	481	438	395	357	304	26
212	255	555	512	480	427	374	316	9	71	114	157	197	250	574	521	457	414	371	333	16	50	103	156
531	488	456	403	350	292	33	95	138	181	221	274	550	497	433	390	347	309	40	74	127	180	236	279
432	379	326	4	57	119	162	205	245	562	526	473	409	366	323	21	64	98	151	204	260	567	507	464
302	28	81	143	186	229	269	538	502	449	385	342	299	45	88	122	175	228	284	543	483	440	408	355
105	167	210	253	557	514	478	425	361	318	11	69	112	146	199	252	572	519	459	416	384	331	14	52
234	277	533	490	454	401	337	294	35	93	136	170	223	276	548	495	435	392	360	307	38	76	129	191
509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471	411	368	336	19	62	100	153	215	258	565
406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177	239	282	541	485	442

③ 列$\boldsymbol{B}_3$　行$\boldsymbol{C}_3$　Ⅰ$\boldsymbol{B}_4$　Ⅱ$\boldsymbol{B}_2$　　$\Sigma_{24}=6924$.

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
189	232	266	535	492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78	131
511	468	428	375	315	8	72	115	158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213	256	554
351	291	32	96	139	182	220	273	551	498	445	389	346	310	41	73	126	179	237	280	530	487	444	404
120	163	206	244	561	527	474	421	365	322	22	65	97	150	203	261	568	506	463	420	380	327	3	56
268	537	503	450	397	341	298	46	89	121	174	227	285	544	482	437	396	356	303	27	80	144	187	230
426	373	317	10	70	113	145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104	168	211	254	556	513	479
34	94	137	169	222	275	549	496	434	391	348	308	39	75	128	192	235	278	532	489	455	402	349	293
193	246	563	525	472	410	367	324	20	63	99	152	216	259	566	508	465	431	378	325	5	58	118	161
501	448	386	343	300	44	87	123	176	240	283	542	484	441	407	354	301	29	82	142	185	217	270	539
319	12	68	111	147	200	264	571	518	460	417	383	330	13	53	106	166	209	241	558	515	477	424	362
135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37	77	130	190	233	265	534	491	453	400	338	295	36	92
576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257	553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248
388	345	311	42	85	125	178	238	281	529	486	447	405	352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446
66	109	149	202	262	569	505	462	419	381	328	2	55	108	164	207	243	560	528	475	422	364	321	23
226	286	545	481	438	395	357	304	26	79	132	188	231	267	536	504	451	398	340	297	47	90	133	173
457	414	371	333	16	50	103	156	212	255	555	512	480	427	374	316	9	71	114	157	197	250	574	521
309	40	74	127	180	236	279	531	488	456	403	350	292	33	95	138	181	221	274	550	497	433	390	347
151	204	260	567	507	464	432	379	326	4	57	119	162	205	245	562	526	473	409	366	323	21	64	98
543	483	440	408	355	302	28	81	143	186	229	269	538	502	449	385	342	299	45	88	122	175	228	284
384	331	14	52	105	167	210	253	557	514	478	425	361	318	11	69	112	146	199	252	572	519	459	416
76	129	191	234	277	533	490	454	401	337	294	35	93	136	170	223	276	548	495	435	392	360	307	38
258	565	509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471	411	368	336	19	62	100	153	215
442	406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177	239	282	541	485

④ 列 B_4 行 C_3 ⅠB_5 ⅡB_3 $\Sigma_{24}=6924$.

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
232	266	535	492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78	131	189
428	375	315	8	72	115	158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213	256	554	511	468
96	139	182	220	273	551	498	445	389	346	310	41	73	126	179	237	280	530	487	444	404	351	291	32
561	527	474	421	365	322	22	65	97	150	203	261	568	506	463	420	380	327	3	56	120	163	206	244
341	298	46	89	121	174	227	285	544	482	437	396	356	303	27	80	144	187	230	268	537	503	450	397
145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104	168	211	254	556	513	479	426	373	317	10	70	113
496	434	391	348	308	39	75	128	192	235	278	532	489	455	402	349	293	34	94	137	169	222	275	549
20	63	99	152	216	259	566	508	465	431	378	325	5	58	118	161	193	246	563	525	472	410	367	324
240	283	542	484	441	407	354	301	29	82	142	185	217	270	539	501	448	386	343	300	44	87	123	176
417	383	330	13	53	106	166	209	241	558	515	477	424	362	319	12	68	111	147	200	264	571	518	460
77	130	190	233	265	534	491	453	400	338	295	36	92	135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37
553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248	576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257
352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446	388	345	311	42	85	125	178	238	281	529	486	447	405
164	207	243	560	528	475	422	364	321	23	66	109	149	202	262	569	505	462	419	381	328	2	55	108
504	451	398	340	297	47	90	133	173	226	286	545	481	438	395	357	304	26	79	132	188	231	267	536
9	71	114	157	197	250	574	521	457	414	371	333	16	50	103	156	212	255	555	512	480	427	374	316
221	274	550	497	433	390	347	309	40	74	127	180	236	279	531	488	456	403	350	292	33	95	138	181
409	366	323	21	64	98	151	204	260	567	507	464	432	379	326	4	57	119	162	205	245	562	526	473
88	122	175	228	284	543	483	440	408	355	302	28	81	143	186	229	269	538	502	449	385	342	299	45
572	519	459	416	384	331	14	52	105	167	210	253	557	514	478	425	361	318	11	69	112	146	199	252
360	307	38	76	129	191	234	277	533	490	454	401	337	294	35	93	136	170	223	276	548	495	435	392
153	215	258	565	509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471	411	368	336	19	62	100
485	442	406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177	239	282	541

⑤ 列$\boldsymbol{B}_5$　行C_3　Ⅰ$\boldsymbol{B}_6$　Ⅱ$\boldsymbol{B}_4$　　$\Sigma_{24}=6924$.

1	54	107	165	208	242	559	516	476	423	363	320	24	67	110	148	201	263	570	517	461	418	382	329
266	535	492	452	399	339	296	48	91	134	172	225	287	546	493	437	394	358	305	25	78	131	189	232
315	8	72	115	158	196	249	575	522	469	413	370	334	17	49	102	155	213	256	554	511	468	428	375
220	273	551	498	445	389	346	310	41	73	126	179	237	280	530	487	444	404	351	291	32	96	139	182
365	322	22	65	97	150	203	261	568	506	463	420	380	327	3	56	120	163	206	244	561	527	474	421
174	227	285	544	482	437	396	356	303	27	80	144	187	230	268	537	503	450	397	341	298	46	89	121
168	211	254	556	513	479	426	373	317	10	70	113	145	198	251	573	520	458	415	372	332	15	51	104
128	192	235	278	532	489	455	402	349	293	34	94	137	169	222	275	549	496	434	391	348	308	39	75
465	431	378	325	5	58	118	161	193	246	563	525	472	410	367	324	20	63	99	152	216	259	566	508
82	142	185	217	270	539	501	448	386	343	300	44	87	123	176	240	283	542	484	441	407	354	301	29
515	477	424	362	319	12	68	111	147	200	264	571	518	460	417	383	330	13	53	106	166	209	241	558
36	92	135	171	224	288	547	494	436	393	359	306	37	77	130	190	233	265	534	491	453	400	338	295
576	523	470	412	369	335	18	61	101	154	214	257	553	510	467	429	376	314	7	60	116	159	195	248
311	42	85	125	178	238	281	529	486	447	405	352	290	31	84	140	183	219	272	552	499	446	388	345
262	569	505	462	419	381	328	2	55	108	164	207	243	560	528	475	422	364	321	23	66	109	149	202
357	304	26	79	132	188	231	267	536	504	451	398	340	297	47	90	133	173	226	286	545	481	438	395
212	255	555	512	480	427	374	316	9	71	114	157	197	250	574	521	457	414	371	333	16	50	103	156
403	350	292	33	95	138	181	221	274	550	497	433	390	347	309	40	74	127	180	236	279	531	488	456
162	205	245	562	526	473	409	366	323	21	64	98	151	204	260	567	507	464	432	379	326	4	57	119
449	385	342	299	45	88	122	175	228	284	543	483	440	408	355	302	28	81	143	186	229	269	538	502
112	146	199	252	572	519	459	416	384	331	14	52	105	167	210	253	557	514	478	425	361	318	11	69
495	435	392	360	307	38	76	129	191	234	277	533	490	454	401	337	294	35	93	136	170	223	276	548
62	100	153	215	258	565	509	466	430	377	313	6	59	117	160	194	247	564	524	471	411	368	336	19
541	485	442	406	353	289	30	83	141	184	218	271	540	500	447	387	344	312	43	86	124	177	239	282

⑥ 列 $\boldsymbol{B}_6$　行 $\boldsymbol{C}_3$　Ⅰ$\boldsymbol{B}_7$　Ⅱ$\boldsymbol{B}_5$　　$\Sigma_{24}=6924$.

四、互补法构作双 2 因数阶完美幻方

本节将研究一个有趣的问题：如何利用一些不完全是完美幻方的方阵来构作完美幻方?这类似于前面的完美幻方的乘积定理. 即把一些具有互补性的非完美幻方 $\boldsymbol{B}(b)$植入一个基本方 $\boldsymbol{A}(a)$，使之成为较高阶的完美幻方 $\boldsymbol{C}(c)$. 这里 $\boldsymbol{B}(b)$包含有相互互补的两个因子方，基本方 $\boldsymbol{A}(a)$应当是完美幻方.常用的非完美互补方 $\boldsymbol{B}(b)$有如下的 2 因互补方，3 因互补方. 4 阶、5 阶，可直接利用完美

幻方. 若$B(b)$是完美幻方, 那就是完美幻方的乘积定理了.

2 因互补方: 用 1,2,3,4 作两个 2 阶方, 若此二方对应位置上二数之和恒为 5, 则称此二方是互补二阶方. 例如,

1	2		1	3		1	2		1	4		1	3
3	4		2	4		4	3		2	3		4	2
4	3		4	2		4	3		4	1		4	2
2	1		3	1		1	2		3	2		1	3

(28)

3 因互补方: 用 1, 2, ⋯,9 作两个 3 阶方, 若此二方对应位置上二数之和恒为 10, 则称此二方是互补 3 阶方. 例如.

1	4	7		1	2	3		1	6	8		1	2	3
2	5	8		6	5	4		5	7	3		5	6	4
3	6	9		7	8	9		9	2	4		9	7	8
9	6	3		9	8	7		9	4	2		9	8	7
8	5	2		4	5	6		5	3	7		5	4	6
7	4	1		3	2	1		1	8	6		1	3	2

(29)

由这些互补方可分别拼出基本方. 如 8 阶 2 因互补方和 12 阶 3 因互补方:

①

1	2	4	3	1	2	4	3
3	4	2	1	3	4	2	1
1	2	4	3	1	2	4	3
3	4	2	1	3	4	2	1
4	3	1	2	4	3	1	2
2	1	3	4	2	1	3	4
4	3	1	2	4	3	1	2
2	1	3	4	2	1	3	4

②

1	2	1	2	4	3	4	3
3	4	3	4	2	1	2	1
4	3	4	3	1	2	1	2
2	1	2	1	3	4	3	4
1	2	1	2	4	3	4	3
3	4	3	4	2	1	2	1
4	3	4	3	1	2	1	2
2	1	2	1	3	4	3	4

③

1	2	4	3	1	2	4	3
3	4	2	1	3	4	2	1
4	3	1	2	4	3	1	2
2	1	3	4	2	1	3	4
4	3	1	2	4	3	1	2
2	1	3	4	2	1	3	4
1	2	4	3	1	2	4	3
3	4	2	1	3	4	2	1

④

1	2	4	3	4	3	1	2
3	4	2	1	2	1	3	4
4	3	1	2	1	2	4	3
2	1	3	4	3	4	2	1
1	2	4	3	4	3	1	2
3	4	2	1	2	1	3	4
4	3	1	2	1	2	4	3
2	1	3	4	3	4	2	1

(30)

①

1	4	7	1	4	7	9	6	3	9	6	3
2	5	8	2	5	8	8	5	2	8	5	2
3	6	9	3	6	9	7	4	1	7	4	1
9	6	3	9	6	3	1	4	7	1	4	7
8	5	2	8	5	2	2	5	8	2	5	8
7	4	1	7	4	1	3	6	9	3	6	9
1	4	7	1	4	7	9	6	3	9	6	3
2	5	8	2	5	8	8	5	2	8	5	2
3	6	9	3	6	9	7	4	1	7	4	1
9	6	3	9	6	3	1	4	7	1	4	7
8	5	2	8	5	2	2	5	8	2	5	8
7	4	1	7	4	1	3	6	9	3	6	9

②

1	4	7	9	6	3	1	4	7	9	6	3
2	5	8	8	5	2	2	5	8	8	5	2
3	6	9	7	4	1	3	6	9	7	4	1
1	4	7	9	6	3	1	4	7	9	6	3
2	5	8	8	5	2	2	5	8	8	5	2
3	6	9	7	4	1	3	6	9	7	4	1
9	6	3	1	4	7	9	6	3	1	4	7
8	5	2	2	5	8	8	5	2	2	5	8
7	4	1	3	6	9	7	4	1	3	6	9
9	6	3	1	4	7	9	6	3	1	4	7
8	5	2	2	5	8	8	5	2	2	5	8
7	4	1	3	6	9	7	4	1	3	6	9

(31)

显然，在拼方时，要求方中各行、各列、各对角线上的互补方是偶数个才能保证其元素之和都相等. 这里 8 阶之和为 20; 12 阶之和为 60. 基本方 $B(b)$也可以直接引用已知的完美幻方. 例如，有基本的 4 阶完美幻方:

A_1

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

A_2

1	14	7	12
8	11	2	13
10	5	16	3
15	4	9	6

A_3

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

$A=(a_{ij})$， $\Sigma_4=34$.
$i,j=1,2,3,4$ (32)

如完美幻方的乘积定理一样，这里也要用到结合式:

对于 8 阶 12 阶

有结合式 $b+(a_{ij}-1)4$ $b+(a_{ij}-1)9$ (33)

$b=1,2,3,4.$ $b=1,2,\cdots,9.$

即把各 A 中各元素分别用一个 2 或 3 阶方去替换，从而得 8 或 12 阶完美幻方. 如有 8 阶完美幻方: $\Sigma_8=260$.

①

1	2	56	55	13	14	60	59
3	4	54	53	15	16	58	57
29	30	44	43	17	18	40	39
31	32	42	41	19	20	38	37
52	51	5	6	64	63	9	10
50	49	7	8	62	61	11	12
48	47	25	26	36	35	21	22
46	45	27	28	34	33	23	24

②

1	2	56	55	25	26	48	47
3	4	54	53	27	28	46	45
29	30	44	43	5	6	52	51
31	32	42	41	7	8	50	49
40	39	17	18	64	63	9	10
38	37	19	20	62	61	11	12
60	59	13	14	36	35	21	22
58	57	15	16	34	33	23	24

③

1	2	48	47	21	22	60	59
3	4	46	45	23	24	58	57
29	30	52	51	9	10	40	39
31	32	50	49	11	12	38	37
44	43	5	6	64	63	17	18
46	45	7	8	62	61	19	20
56	55	25	26	36	35	13	14
54	53	27	28	34	33	15	16

④

1	2	53	54	16	15	60	59
3	4	55	56	14	13	58	57
32	31	44	43	17	18	37	38
30	29	42	41	19	20	39	40
49	50	5	6	64	63	12	11
51	52	7	8	62	61	10	9
48	47	28	27	33	34	21	22
46	45	26	25	35	36	23	24

⑤

1	2	53	54	28	27	48	47
3	4	55	56	26	25	46	45
32	31	44	43	5	6	49	50
30	29	42	41	7	8	51	52
37	38	17	18	64	63	12	11
39	40	19	20	62	61	10	9
60	59	16	15	33	34	21	22
58	59	14	13	35	36	23	24

⑥

1	2	45	46	24	23	60	59
3	4	47	48	22	21	58	57
32	31	52	51	9	10	37	38
30	29	50	49	11	12	39	40
41	42	5	6	64	63	20	19
43	44	7	8	62	61	18	17
56	55	28	27	33	34	13	14
54	53	26	25	35	36	15	16

⑦

1	2	56	55	13	14	60	59
3	4	54	53	15	16	58	57
32	31	41	42	20	19	37	38
30	29	43	44	18	17	39	40
52	51	5	6	64	63	9	10
50	49	7	8	62	61	11	12
45	46	28	27	33	34	24	23
47	48	26	25	35	36	22	21

⑧

1	2	56	55	28	27	45	46
3	4	54	53	26	25	47	48
32	31	41	42	5	6	52	51
30	29	43	44	7	8	50	49
37	38	20	19	64	63	9	10
39	40	18	17	62	61	11	12
60	59	13	14	33	34	24	23
58	57	15	16	35	36	22	21

⑨

1	2	48	47	21	22	60	59
3	4	46	45	23	24	58	57
32	31	49	50	12	11	37	38
30	29	51	52	10	9	39	40
44	43	5	6	64	63	17	18
42	41	7	8	62	61	19	20
53	54	28	27	33	34	16	15
55	56	26	25	33	36	14	13

⑩

1	2	56	55	16	15	57	58
3	4	54	53	14	13	59	60
32	31	41	42	17	18	40	39
30	29	43	44	19	20	38	37
49	50	8	7	64	63	9	10
51	52	6	5	62	61	11	12
48	47	25	26	33	34	24	23
46	45	27	28	35	36	22	21

⑪

1	2	56	55	25	26	48	47
3	4	54	53	27	28	46	45
32	31	41	42	8	7	49	50
30	29	43	44	6	5	51	52
40	39	17	18	64	63	9	10
38	37	19	20	62	61	11	12
57	58	16	15	33	34	24	23
59	60	14	13	35	36	22	21

⑫

1	2	48	47	24	23	57	58
3	4	46	45	22	21	49	60
32	31	49	50	9	10	40	39
30	29	51	52	11	12	38	37
41	42	8	7	64	63	17	18
43	44	6	5	62	61	19	20
56	55	25	26	33	34	16	15
54	53	27	28	35	36	14	13

12 阶完美幻方:　　　　$\Sigma_{12}=870.$

①

1	4	7	118	121	124	36	33	30	135	132	129
2	5	8	119	122	125	35	32	29	134	131	128
3	6	9	120	123	126	34	31	28	133	130	127
72	69	66	99	96	93	37	40	43	82	85	88
71	68	65	98	95	92	38	41	44	83	86	89
70	67	64	97	94	91	39	42	45	84	87	90
109	112	115	10	13	16	144	141	138	27	24	21
110	113	116	11	14	17	143	140	137	26	23	20
111	114	117	12	15	18	142	139	136	25	22	19
108	105	102	63	60	57	73	76	79	46	49	52
107	104	101	62	59	56	74	77	80	47	50	53
106	103	100	61	58	55	75	78	81	48	51	54

②

1	4	7	118	121	124	63	60	57	108	105	102
2	5	8	119	122	125	62	59	56	107	104	101
3	6	9	120	123	126	61	58	55	106	103	100
72	69	66	99	96	93	10	13	16	109	112	115
71	68	65	98	95	92	11	14	17	110	113	116
70	67	64	97	94	91	12	15	18	111	114	117
82	85	88	37	40	43	144	141	138	27	24	21
83	86	89	38	41	44	143	140	137	26	23	20
84	87	90	39	42	45	142	139	136	25	22	19
135	132	129	36	33	30	73	76	79	46	49	52
134	131	128	35	32	29	74	77	80	47	50	53
133	130	127	34	31	28	75	78	81	48	51	54

③

1	4	7	126	123	120	36	33	30	127	130	133
2	5	8	125	122	119	35	32	29	128	131	134
3	6	9	124	121	118	34	31	28	129	132	135
72	69	66	91	94	97	37	40	43	90	87	84
71	68	65	92	95	98	38	41	44	89	86	83
70	67	64	93	96	99	39	42	45	88	85	82
109	112	115	18	15	12	144	141	138	19	22	25
110	113	116	17	14	11	143	140	137	20	23	26
111	114	117	16	13	10	142	139	136	21	24	27
108	105	103	55	58	61	73	76	79	54	51	48
107	104	101	56	59	62	74	77	80	53	50	47
106	103	100	57	60	63	75	78	81	52	49	46

④

1	2	3	126	125	124	28	29	30	135	134	133
6	5	4	121	122	123	33	32	31	130	131	132
7	8	9	120	119	118	34	35	36	129	128	127
64	65	66	99	98	97	37	38	39	90	89	88
69	68	67	94	95	96	42	41	40	85	86	87
70	71	72	93	92	91	43	44	45	84	83	82
117	116	115	10	11	12	144	143	142	19	20	21
112	113	114	15	14	13	139	140	141	24	23	22
111	110	109	16	17	18	138	137	136	25	26	27
108	107	106	55	56	57	81	80	79	46	47	48
103	104	105	60	59	58	76	77	78	51	50	49
102	101	100	61	62	63	75	74	73	52	53	54

⑤

1	2	3	126	125	124	55	56	57	108	107	106
6	5	4	121	122	123	60	59	58	103	104	105
7	8	9	120	119	118	61	62	63	102	101	100
64	65	66	99	98	97	10	11	12	117	116	115
69	68	67	94	95	96	15	14	13	112	113	114
70	71	72	93	92	91	16	17	18	111	110	109
90	89	88	37	38	39	144	143	142	19	20	21
85	86	87	42	41	40	139	140	141	24	23	22
84	83	82	43	44	45	138	137	136	25	26	27
129	128	127	28	29	30	81	80	79	46	47	48
130	131	132	33	32	31	76	77	78	51	50	49
135	134	133	34	35	36	75	74	73	52	53	54

⑥

1	2	3	108	107	106	46	47	48	135	134	133
6	5	4	103	104	105	51	50	49	130	131	132
7	8	9	102	101	100	52	53	54	129	128	127
64	65	66	117	116	115	19	20	21	90	89	88
69	68	67	112	113	114	24	23	22	85	86	87
70	71	72	111	110	109	25	26	27	84	83	82
99	98	97	10	11	12	144	143	142	37	38	39
94	95	96	15	14	13	139	140	141	42	41	40
93	92	91	16	17	18	138	137	136	43	44	45
126	125	124	55	56	57	81	80	79	28	29	30
121	122	123	60	59	58	76	77	78	33	32	31
120	119	118	61	62	63	75	74	73	34	35	36

⑦

126	125	124	55	56	57	81	80	79	28	29	30
121	122	123	60	59	58	76	77	78	33	32	31
120	119	118	61	62	63	75	74	73	34	35	36
1	2	3	108	107	106	46	47	48	135	134	133
6	5	4	103	104	105	51	50	49	130	131	132
7	8	9	102	101	100	52	53	54	129	128	127
64	65	66	117	116	115	19	20	21	90	89	88
69	68	67	112	113	114	24	23	22	85	86	87
70	71	72	111	110	109	25	26	27	84	83	82
99	98	97	10	11	12	144	143	142	37	38	39
94	95	96	15	14	13	139	140	141	42	41	40
93	92	91	16	17	18	138	137	136	43	44	45

⑧

28	29	30	126	125	124	55	56	57	81	80	79
33	32	31	121	122	123	60	59	58	76	77	78
34	35	36	120	119	118	61	62	63	75	74	73
135	134	133	1	2	3	108	107	106	46	47	48
130	131	132	6	5	4	103	104	105	51	50	49
129	128	127	7	8	9	102	101	100	52	53	54
90	89	88	64	65	66	117	116	115	19	20	21
85	86	87	69	68	67	112	113	114	24	23	22
84	83	82	70	71	72	111	110	109	25	26	27
37	38	39	99	98	97	10	11	12	144	143	142
42	41	40	94	95	96	15	14	13	139	140	141
43	44	45	93	92	91	16	17	18	138	137	136

⑨

144	143	142	37	38	39	99	98	97	10	11	12
139	140	141	42	41	40	94	95	96	15	14	13
138	137	136	43	44	45	93	92	91	16	17	18
81	80	79	28	29	30	126	125	124	55	56	57
76	77	78	33	32	31	121	122	123	60	59	58
75	74	73	34	35	36	120	119	118	61	62	63
46	47	48	135	134	133	1	2	3	108	107	106
51	50	49	130	131	132	6	5	4	103	104	105
52	53	54	129	128	127	7	8	9	102	101	100
19	20	21	90	89	88	64	65	66	117	116	115
24	23	22	85	86	87	69	68	67	112	113	114
25	26	27	84	83	82	70	71	72	111	110	109

这里只给出了少量的例子. 容易看出, 这样作出的完美幻方是对顶互补型的. 这种方法的步骤是:

(1) 给出2(3)因互补方;

(2) 拼出8(12)阶2(3)因互补方, 要求方之各行、各列、各对角线元素和相等;

(3) 选定填入方A;

(4) 填入即得.

用同样的方法还可以给出$n=24=2\times12=3\times8=6\times4$等阶的完美幻方. 下面有几个例子.

(1)24= 2×12　由 12 阶完美幻方④为基本方 $B(b)$和 2 因互补方以及合成公式:

$$K = b+(a-1)4\ ,\quad (a=1,2,3,4;\ b=1,2,\cdots,144). \tag{34}$$

直接可得　(Σ_{24}=6924).

①

1	2	5	6	9	10	504	503	500	499	496	495	109	110	113	114	117	118	540	539	536	535	532	531
3	4	7	8	11	12	502	501	498	497	494	493	111	112	115	116	119	120	538	537	534	533	530	529
21	22	17	18	13	14	484	483	488	487	492	491	129	130	125	126	121	122	520	519	524	523	528	527
23	24	19	20	15	16	482	481	486	485	490	489	131	132	127	128	123	124	518	517	522	521	526	525
25	26	29	30	33	34	480	479	476	475	472	471	133	134	137	138	141	142	516	515	512	511	508	507
27	28	31	32	35	36	478	477	474	473	470	469	135	136	139	140	143	144	514	513	510	509	506	505
253	254	257	258	261	262	396	395	392	391	388	387	145	146	149	150	153	154	360	359	356	355	352	351
255	256	259	260	263	264	394	393	390	389	386	385	147	148	151	152	155	156	358	357	354	353	350	349
273	274	269	270	265	266	376	375	380	379	384	383	165	166	161	162	157	158	340	339	344	343	348	347
275	276	271	272	267	268	374	373	378	377	382	381	167	168	163	164	159	160	338	337	342	341	346	345
277	278	281	282	285	286	372	371	368	367	364	363	169	170	173	174	177	178	336	335	332	331	328	327
279	280	283	284	287	288	370	369	366	365	362	361	171	172	175	176	179	180	334	333	330	329	326	325
459	467	464	463	460	459	37	38	41	42	45	46	576	575	572	571	568	567	73	74	77	78	81	82
466	465	462	461	458	457	39	40	43	44	47	48	574	573	570	569	566	565	75	76	79	80	83	84
448	447	452	451	456	455	57	58	53	54	49	50	556	555	560	559	564	563	93	94	89	90	85	86
446	445	450	449	454	453	59	60	55	56	51	52	554	553	558	557	562	561	95	96	91	92	87	88
444	443	440	439	436	435	61	62	65	66	69	70	552	551	548	547	544	543	97	98	101	102	105	106
442	441	438	437	434	433	63	64	67	68	71	72	550	549	546	545	542	541	99	100	103	104	107	108
432	431	428	427	424	423	217	218	221	222	225	226	324	323	320	319	316	315	181	182	185	186	189	190
430	429	426	425	422	421	219	220	223	224	227	228	322	321	318	317	314	313	183	184	187	188	191	192
412	411	416	415	420	419	237	238	233	234	229	230	304	303	308	307	312	311	201	202	197	198	193	194
410	409	414	413	418	417	239	240	235	236	231	232	302	301	306	305	310	309	203	204	199	200	195	196
408	407	404	403	400	399	241	242	245	246	249	250	300	299	296	295	292	291	205	206	209	510	213	214
406	405	402	401	398	397	243	244	247	248	251	252	298	297	264	293	290	289	207	208	211	212	215	216

1	2
3	4
4	3
2	1

Σ_{24}= 6924.

②

1	4	5	8	9	12	504	501	500	497	496	493	109	112	113	116	117	120	540	537	536	533	532	529
2	3	6	7	10	11	503	502	499	498	495	494	110	111	114	115	118	119	539	538	535	534	531	530
21	24	17	20	13	16	484	481	488	485	492	489	129	132	125	128	121	124	520	517	524	521	528	525
22	23	18	19	14	15	483	482	487	486	491	490	130	131	126	127	122	123	519	518	523	522	527	526
25	28	29	32	33	36	480	477	476	473	472	469	133	136	137	140	141	144	516	513	512	509	508	505
26	27	30	31	34	35	479	478	475	474	471	470	134	135	138	139	142	143	515	514	511	510	507	506
253	256	257	260	261	264	396	393	392	389	388	385	145	148	149	152	153	156	360	357	355	353	352	349
254	255	258	259	262	263	395	394	391	390	387	386	146	147	150	151	154	155	359	358	356	354	351	350
273	276	269	272	265	268	384	381	380	377	376	373	165	168	161	164	157	160	340	337	344	341	348	345
274	275	270	271	266	267	383	382	379	378	375	374	166	167	162	163	158	159	339	338	343	342	347	346
277	280	281	284	285	288	372	369	368	365	364	361	169	172	173	176	177	180	336	333	331	329	327	325
278	279	282	283	286	287	371	370	367	366	363	362	170	171	174	175	178	179	335	334	332	330	328	326
468	465	464	461	460	457	37	40	41	44	45	48	576	573	572	569	568	565	73	76	77	80	81	84
467	466	463	462	459	458	38	39	42	43	46	47	575	574	571	570	567	566	74	75	78	79	82	83
448	445	452	449	456	453	53	56	57	60	49	52	556	553	560	557	564	561	93	96	89	92	85	88
447	446	451	450	455	454	54	55	58	59	50	51	555	554	559	558	563	562	94	95	90	91	86	87
444	441	440	437	436	433	61	64	65	68	69	72	552	549	548	545	544	541	97	100	101	104	105	108
443	442	439	438	435	434	62	63	66	67	70	71	551	550	547	546	543	542	98	99	102	103	106	107
432	429	428	425	424	421	217	220	221	224	225	228	324	321	320	317	316	313	181	184	185	188	189	192
431	430	427	426	423	422	218	219	222	223	226	227	323	322	319	318	315	314	182	183	186	187	190	191
412	409	416	413	420	417	237	240	233	236	229	232	304	301	308	305	312	309	201	204	197	200	193	196
411	410	415	414	419	418	238	239	234	235	230	231	303	302	307	306	311	310	202	203	198	199	194	195
408	405	404	401	400	397	241	244	245	248	249	252	300	297	296	293	292	289	205	208	209	212	213	216
407	406	403	402	399	398	242	243	246	247	250	251	299	298	295	294	291	290	206	207	210	211	214	215

1	4
2	3
4	1
3	2

(2)24 = 3×8　　由8阶完美幻方及3因互补方:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
9	8	7
6	5	4
3	2	1

1	2	52	51	21	22	60	59
4	3	49	50	24	23	57	58
29	30	48	47	9	10	40	39
32	31	45	46	12	11	37	38
44	45	5	6	64	63	17	18
41	42	8	7	61	62	20	19
56	55	25	26	36	35	13	14
53	54	28	27	33	34	16	15

(35)

和结合公式

$$K = b + (a - 1)9, \quad (a = 1,2,\cdots,9;\ b = 1,2,\cdots,64). \tag{36}$$

由此分别可给出下列24阶完美幻方. 由于2因互补方, 3因互补方和12阶完美幻方, 8阶完美幻方的多样选择性, 以及组合的不同方式, 从而可构作出更多的24阶完美幻方.

③ $\Sigma_{24}=6924$.

1	2	3	10	11	12	432	431	430	423	422	421	181	182	183	190	191	192	540	539	538	531	530	529
4	5	6	13	14	15	429	428	427	420	419	418	184	185	186	193	194	195	537	536	535	528	527	526
7	8	9	16	17	18	426	425	424	417	416	415	187	188	189	196	197	198	534	533	532	525	524	523
28	29	30	19	20	21	405	404	403	414	413	412	208	209	210	199	200	201	513	512	511	522	521	520
31	32	33	22	23	24	402	401	400	411	410	409	211	212	213	202	203	204	510	509	508	519	518	517
34	35	36	25	26	27	399	398	397	408	407	406	214	215	216	205	206	207	507	506	505	516	515	514
253	254	255	262	263	264	468	467	466	459	458	457	73	74	75	82	83	84	360	359	358	351	350	349
256	257	258	265	266	267	465	464	463	456	455	454	76	77	78	85	86	87	357	356	355	348	347	346
259	260	261	268	269	270	462	461	460	453	452	451	79	80	81	88	89	90	354	353	352	345	344	343
280	281	282	271	272	273	441	440	439	450	449	448	100	101	102	91	92	93	333	332	331	342	341	340
283	284	285	274	275	276	438	437	436	447	446	445	103	104	105	94	95	96	330	329	328	339	338	337
286	287	288	277	278	279	435	434	433	444	443	442	106	107	108	97	98	99	327	326	325	336	335	334
396	395	394	387	386	385	37	38	39	46	47	48	576	575	574	567	566	565	145	146	147	154	155	156
393	392	391	384	383	382	40	41	42	49	50	51	573	572	571	564	563	562	148	149	150	157	158	159
390	389	388	381	380	379	43	44	45	52	53	54	570	569	568	561	560	569	151	152	153	160	161	162
369	368	367	378	377	376	64	65	66	55	56	57	549	548	547	558	557	556	172	173	174	163	164	165
366	365	364	375	374	373	67	68	69	58	59	60	546	545	544	555	554	553	175	176	177	166	167	168
363	362	361	372	371	370	70	71	72	61	62	63	543	542	541	552	551	550	178	179	180	169	170	171
504	503	502	495	494	493	217	218	219	226	227	228	324	323	322	315	314	313	109	110	111	118	119	120
501	500	499	492	491	490	220	221	222	229	230	231	321	320	319	312	311	310	112	113	114	121	122	123
498	497	496	489	488	487	223	224	225	232	233	234	318	317	316	309	308	307	115	116	117	124	125	126
477	476	475	486	485	484	244	245	246	235	236	237	297	296	295	306	305	304	136	137	138	127	128	129
474	473	472	483	482	481	247	248	249	238	239	240	294	293	292	303	302	301	139	140	141	130	131	132
471	470	469	480	479	478	250	251	252	241	242	243	291	290	289	300	299	298	142	143	144	133	134	135

④ $\Sigma_{24}=6924$.

1	2	3	10	11	12	504	503	502	495	494	493	109	110	111	118	119	120	540	539	538	531	530	529
4	5	6	13	14	15	501	500	499	492	491	490	112	113	114	121	122	123	537	536	535	528	527	526
7	8	9	16	17	18	498	497	496	489	488	487	115	116	117	124	125	126	534	533	532	525	524	523
28	29	30	19	20	21	477	476	475	486	485	484	136	137	138	127	128	129	513	512	511	522	521	520
31	32	33	22	23	24	474	473	472	483	482	481	139	140	141	130	131	132	510	509	508	519	518	517
34	35	36	25	26	27	471	470	469	480	479	478	142	143	144	133	134	135	507	506	505	516	515	514
253	254	255	262	263	264	396	395	394	387	386	385	145	146	147	154	155	156	360	359	358	351	350	349
256	257	258	265	266	267	393	392	391	384	383	382	148	149	150	157	158	159	357	356	355	348	347	346
259	260	261	268	269	270	390	389	388	381	380	379	151	152	153	160	161	162	354	353	352	345	344	343
280	281	282	271	272	273	369	368	367	378	377	376	172	173	174	163	164	165	333	332	331	342	341	340
283	284	285	274	275	276	366	365	364	375	374	373	175	176	177	166	167	168	330	329	328	339	338	337
286	287	288	277	278	279	363	362	361	372	371	370	178	179	180	169	170	171	327	326	325	336	335	334
468	467	466	459	458	457	37	38	39	46	47	48	576	575	574	567	566	565	73	74	75	82	83	84
465	464	463	456	455	454	40	41	42	49	50	51	573	572	571	564	563	562	76	77	78	85	86	87
462	461	460	453	452	451	43	44	45	52	53	54	570	569	568	561	560	569	79	80	81	88	89	90
441	440	439	450	449	448	64	65	66	55	56	57	549	548	547	558	557	556	100	101	102	91	92	93
438	437	436	447	446	445	67	68	69	58	59	60	546	545	544	555	554	553	103	104	105	94	95	96
435	434	433	444	443	442	70	71	72	61	62	63	543	542	541	552	551	550	106	107	108	97	98	99
432	431	430	423	422	421	217	218	219	226	227	228	324	323	322	315	314	313	181	182	183	190	191	192
429	428	427	420	419	418	220	221	222	229	230	231	321	320	319	312	311	310	184	185	186	193	194	195
426	425	424	417	416	415	223	224	225	232	233	234	318	317	316	309	308	307	187	188	189	196	197	198
405	404	403	414	413	412	244	245	246	235	236	237	297	296	295	306	305	304	208	209	210	199	200	201
402	401	400	411	410	409	247	248	249	238	239	240	294	293	292	303	302	301	211	212	213	202	203	204
399	398	397	408	407	406	250	251	252	241	242	243	291	290	289	300	299	298	214	215	216	205	206	207

为了达到因子互补的目的，并合方的各行、各列、各对角线中必定包含偶数个因子互补方. 所以，基本方 $\boldsymbol{B}(b)$只能是偶数阶完美幻方. 因此，用这种方法不能给出 $9=3\times3$, $15=3\times5$, $18=2\times9$, $21=3\times7$ 等阶数的完美幻方. 再因为因子互补方不是完美幻方，故由完美幻方的乘积定理知，这样作出的完美幻方多半不是特优的.

第 11 章　单 2 因数偶阶完美幻方

阶数为 $n = 2(2k+1), (k = 1,2,3,\cdots)$的完美幻方，称为单 2 因数偶阶完美幻方．例如，$n = 6,10,14,18,22,\cdots$

一、6 阶对顶互补完美幻方

定理 1　不能用列和方一幻和组方法构造连续自然数集 $\mathbf{F} = \{1,2,3,\cdots,n^2\}$上的单 2 因数偶阶完美幻方．

证明　由于，$n = 2(2k+1)$，

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = (2k+1)\{2(2k+1)+1\} = (2k+1)(4k+3). \quad (1)$$

在 $2(2k+1)$列式

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k+1 \\ 4k+2 & 4k+1 & 4k & \cdots & 2k+2 \end{matrix} \quad (2)$$

中，只能做到列和相等，等于 $4k+3$，做不到行和相等．

下面只对 $n = 6 = 2\times3$ 给出进一步的证明即可．　n = 6 时，设

$$\mathbf{F} = \{1, 2, 3, \cdots, 36\}, \quad \Sigma_6 = 111, \quad \varphi(6) = 2. \quad (3)$$

给出排列　$\pi_1: (1,2,3,4,5,6)$，　$\pi_2: (1,2,3,6,5,4)$．　(4)

分别以之为行、列序构作 6 阶分段方：

A_1

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

A_2

1	2	3	6	5	4
7	8	9	12	11	10
13	14	15	18	17	16
31	32	33	36	35	34
25	26	27	30	29	28
19	20	21	24	23	22

(5)

执行行、列 Z 变换得各方第一线如下：

							和							和
B_1	1	8	15	22	29	36	111	1	8	15	36	29	22	111
B_5	1	12	17	22	27	32	111	1	10	17	36	27	20	111
B_3	1	10	13	22	25	34	105	1	12	13	36	25	24	111
C_3	1	20	3	22	5	24	75	1	32	3	36	5	34	111
B_2	1	9	17	19	27	35	108	1	9	17	31	27	23	108
B_4	1	11	15	19	29	33	108	1	11	15	31	29	21	108
C_2	1	14	27	4	17	30	93	1	14	27	6	17	28	93
C_4	1	26	15	4	29	18	93	1	26	15	6	29	16	93

(6)

对 A_1 只有 B_1, B_5；对 A_2 只有 B_1, B_5, B_3, C_3是列(行)和方，可提供幻和组．而且它们分别是同类的．因为，在这些线中都有两个相同元．因而，用它们不可能构造出 6 阶完美幻方．对其他阶数可类似证明．

因此，排列

$$\pi=(1,2,3,\cdots,2k+1,4k+2,4k+1,\cdots,2k+2) \tag{7}$$

不是可幻排列. 在第9章，还证明了：在连续自然数集 $\mathbf{F}=\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 上也不能构造出对顶互补型的单2因数偶阶完美幻方. 现在，只能用定理7来构造单2因数偶阶对顶互补型的完美幻方.

例如, $n=6$ 时，在互补数对

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
列和									40									

(8)

中，删去一个偶数互补数对,利用余下的数对将有可能构造出对顶互补的6阶完美幻方.此时,

$$\Sigma_6=\frac{6}{2}\cdot \mathrm{L}=3\times 40=120,\quad \frac{1}{2}\Sigma_6=60$$
$$|P|=|Q|=3^2\frac{\mathrm{L}}{2}=9\cdot 20=180. \tag{9}$$

(1) 删去互补数对4, 36, 可得6阶分段方:

1	2	3	8	9	10
33	34	35	27	28	29
26	24	22	25	23	21
32	31	30	39	38	37
13	12	11	7	6	5
15	17	19	14	16	18
列和			60+60		

				Σ
P:	1	24	25	60
	33	2	22	57
	26	34	3	63
Q:	8	23	29	60
	27	9	21	57
	25	28	10	63

				Σ
P:	1	34	27	57
	33	24	3	60
	26	2	35	63
Q:	8	28	21	57
	27	23	10	60
	25	9	29	63

(10)

由此可得6阶完美幻方如下:

	①						②						③						
60	1	24	35	23	29	8	1	24	35	11	17	32	1	34	22	32	12	19	63
57	33	2	22	28	10	25	33	2	22	19	31	13	33	24	3	13	17	30	60
63	26	34	3	9	21	27	26	34	3	30	12	15	26	2	35	15	31	11	57
60	17	11	32	39	16	9	29	23	8	39	16	5	8	28	21	39	6	18	63
57	12	30	15	7	38	18	21	9	27	7	38	18	27	23	10	7	16	37	60
63	31	19	13	14	6	37	10	28	25	14	6	37	25	9	29	14	38	5	57
	60+60						60+60						60+60						
	④						⑤						⑥						
60	1	24	35	29	23	8	1	24	35	11	17	32	1	34	22	32	12	19	63
63	26	34	3	21	9	27	26	34	3	30	12	15	26	2	35	15	31	11	57
57	33	2	22	10	28	25	33	2	22	19	31	13	33	24	3	13	17	30	60
60	11	17	32	39	16	9	29	23	8	39	16	5	8	28	21	39	6	18	63
63	19	31	13	14	6	37	10	28	25	14	6	37	25	9	29	14	38	5	57
57	30	12	15	7	38	18	21	9	27	7	38	18	27	23	10	7	16	37	60

用同样的方法，删去别的偶互补数对也可得到许多的6阶完美幻方.

(2) 删去: 2, 38

	⑦						⑧						⑨						
60	1	25	34	5	27	28	1	25	34	28	27	5	1	25	34	12	13	35	60
58	33	3	22	31	10	21	33	3	22	21	10	31	33	3	22	29	17	16	62
62	26	32	4	24	23	11	26	32	4	11	23	24	26	32	4	19	30	9	58
60	35	13	12	39	15	6	12	13	35	39	15	6	28	27	5	39	15	6	60
58	9	30	19	7	37	18	19	30	9	7	37	18	11	23	24	7	37	18	62
62	16	17	29	14	8	36	29	17	16	14	8	36	21	10	31	14	8	36	58
	60+60						60+60						60+60						

(3) 删去: 6, 34

	⑩						⑪						⑫						
56	1	29	26	15	18	31	1	31	28	15	26	19	1	36	24	32	22	5	59
58	21	7	30	13	37	12	23	3	35	4	33	22	21	11	28	13	30	17	60
66	38	24	4	32	5	17	24	27	8	29	2	30	38	14	7	15	9	37	61
56	25	22	9	39	11	14	25	14	21	39	9	12	8	18	35	39	4	16	59
58	27	3	28	19	33	10	36	7	18	17	37	5	27	10	23	19	29	12	60
66	8	35	23	2	16	36	11	38	10	16	13	32	25	31	3	2	26	33	61
	60+60						72	59	49	72	49	49	60	59	61	60	59	61	

(4) 删去: 8, 32

	⑬						⑭						⑮					
60	1	34	25	30	28	2	1	34	25	10	12	28	1	34	25	30	28	2
60	35	7	18	26	3	31	35	7	18	14	37	9	35	7	18	26	3	31
60	24	19	17	4	29	27	24	19	17	36	11	13	36	11	13	16	21	23
60	10	12	38	39	6	15	30	28	2	39	6	15	10	12	38	39	6	15
60	14	37	9	5	33	22	26	3	31	5	33	22	14	37	9	5	33	22
60	36	11	13	16	21	23	4	29	27	16	21	23	24	19	17	4	29	27
	60 +60						60+60						48	68	64	48	68	64

(5) 删去: 10, 30

	⑯						⑰						⑱						
60	1	34	25	26	27	7	1	34	25	26	22	12	1	24	32	29	22	12	63
57	23	2	32	29	12	22	23	2	32	5	31	27	36	2	32	5	31	21	57
63	36	24	3	5	21	31	36	24	3	29	7	21	23	34	3	26	7	27	60
60	14	13	33	39	6	15	14	18	28	39	6	15	11	18	28	39	16	8	63
57	11	28	18	17	38	8	35	9	13	17	38	8	35	9	19	4	38	15	57
63	35	19	9	4	16	37	11	33	19	4	16	37	14	33	13	17	6	37	60
	60+60						60+60						60+60						

(6) 删去: 12, 28

	⑲						⑳						㉑						
53	1	30	22	29	32	6	1	22	30	6	29	32	1	36	24	14	8	37	59
60	21	4	35	24	13	23	21	35	4	23	24	13	21	10	29	33	22	5	60
67	38	26	3	7	15	31	38	3	26	31	7	15	38	15	6	13	31	17	61
53	11	8	34	39	10	18	34	11	8	39	18	10	26	32	3	39	4	16	59
60	16	27	17	19	36	5	17	16	27	19	5	36	7	18	35	19	30	11	60
67	33	25	9	2	14	37	9	33	25	2	37	14	27	9	23	2	25	34	61
	60+60						60+60						60	59	61	60	59	61	

(7) 删去: 14, 26

	㉒						㉓						㉔						
60	1	37	22	2	35	23	1	33	28	8	19	31	1	33	28	31	19	8	58
60	25	7	28	27	4	29	34	3	22	29	5	27	34	3	22	27	5	29	61
60	34	16	10	31	21	8	25	24	10	23	36	2	25	24	10	2	36	23	61
60	38	5	17	39	3	18	32	21	9	39	7	12	9	21	32	39	7	12	58
60	13	36	11	15	33	12	11	35	13	6	37	18	13	35	11	6	37	18	61
60	9	19	32	6	24	30	17	4	38	15	16	30	38	4	17	15	16	30	61
	60+60						60+60						60+60						

(8) 删去:　16, 24

	㉕						㉖						㉗						
56	1	23	32	15	12	37	1	23	32	15	35	14	1	33	26	4	34	22	60
64	21	33	10	34	13	9	38	4	18	11	12	37	25	2	31	35	17	10	62
60	38	4	18	11	35	14	21	33	10	34	13	9	32	27	3	19	11	28	58
56	25	28	3	39	17	8	25	5	26	39	17	8	36	6	18	39	7	14	60
64	6	27	31	19	7	30	29	28	3	2	36	22	5	23	30	15	38	9	62
60	29	5	26	2	36	22	6	27	31	19	7	30	21	29	12	8	13	37	58
	60+60						60+60						62	58	60	62	58	60	

(9) 删去:　18, 22

	㉘						㉙						㉚						
62	1	36	25	28	23	7	1	36	25	10	11	37	1	36	25	10	37	11	58
58	27	5	26	30	3	29	27	5	26	12	33	17	27	5	26	12	17	33	62
60	32	19	9	2	34	24	32	19	9	38	16	6	32	19	9	38	6	16	60
62	12	17	33	39	4	15	30	29	3	39	4	15	30	3	29	39	4	15	58
58	10	37	11	13	35	14	28	7	23	13	35	14	28	23	7	13	35	14	62
60	38	6	16	8	21	31	2	24	34	8	21	31	2	34	24	8	21	31	60
	60+60						60+60						60+60						

这里给出了 30 个幻和为 $\Sigma_6 = 120$ 的 6 阶完美幻方. 再利用第 9 章末尾的变换 1,2 还可以得到更多的 6 阶完美幻方. 下面还将给出一些具有不同幻和的各种特优的 6 阶完美幻方.

二、特优的 6 阶完美幻方

6 阶完美幻方是对顶互补的, 可以讨论它的特优性.

例 1　$\Sigma_6 = 120$,　$L = 40$.

在数对

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	(11)

中, 删去数对 4, 36. 余下数可构成对顶互补方阵. $a + a' = 40$. 这是正整数组成的 6 阶完美幻方中, 可能具有的最小的 6 阶幻和.

A							*B*							①						
1	8	15	7	5	3		1	8	15	7	5	3		31	8	22	24	5	30	61+59
14	22	28	27	24	21		28	14	22	24	21	27		28	14	23	7	21	27	65+55
23	31	38	34	30	29		31	38	23	29	34	30		1	38	15	29	34	3	54+66
33	35	37	39	32	25		33	35	37	39	32	25		16	35	10	9	32	18	61+59
13	16	19	26	18	12		16	19	13	12	26	18		33	19	13	12	26	17	65+55
6	10	11	17	9	2		11	6	10	9	2	17		11	6	37	39	2	25	54+66

Σ　　$60 + 60$　　(12)

A 为分段方, 各 3 阶方之元素和为 180. ***B*** 为列和方, 各列的元素和都是 60 + 60. 各 3 阶方由 ***A*** 之方经行 Z 变换得来. ①是 6 阶完美幻方. 各列上、下各半元素和为 60+60; 各行左、右半元素和已标出.而且①还是 5 次特优的 6 阶完美幻方. 因为,各对角线的各次和如下:

							Σ_6	2 次和	3 次和	4 次和	5 次和	6 次和
I	31	14	15	9	26	25	120	2764	69840	1866724	5163240 0	1460011684

Ⅱ	30	21	29	10	19	11	120	2764	6984 0	1866724	51632400	1459406884

Ⅰ						2 次和	Ⅱ					2 次和
31	23	38	9	17	2	3308	30	7	34	10	33	6	3330
8	23	1	32	17	39	3308	5	27	29	35	13	11	3110
8	28	15	32	17	25	3428	5	7	3	35	33	37	3766
22	14	2	18	26	39	3202	24	21	3	16	19	37	3012
22	28	38	18	12	2	3184	24	27	34	16	13	6	2922

(13)

5 次特优的 6 阶完美幻方①还允许有如下变换:

	①								②						
61	31	8	22	24	5	30	59	61	31	22	8	5	24	30	59
65	28	14	23	7	21	27	55	54	1	15	38	34	29	3	66
54	1	38	15	29	34	3	66	65	28	23	14	21	7	27	55
61	16	35	10	9	32	18	59	61	35	16	10	9	18	32	59
65	33	19	13	12	26	17	55	54	6	11	37	39	25	2	66
54	11	6	37	39	2	25	66	65	19	33	13	12	17	26	55

①→ ②: 2、3 行, 2、3 列对应交换,

同时引起 5、6 行, 5、6 列对应交换.

	③								④						
65	14	23	28	27	7	21	55	65	14	28	23	7	27	21	55
54	38	15	1	3	29	34	66	61	8	31	22	24	30	5	59
61	8	22	31	30	24	5	59	54	38	1	15	29	3	34	66
65	13	33	19	26	17	12	55	65	33	13	19	26	12	17	55
54	37	11	6	2	25	39	66	61	16	10	35	32	9	18	59
61	10	16	35	32	18	9	59	54	11	37	6	2	39	25	66

① → ③: 2、3 行, 2、3 列对应变成 1、2 行, 1、2 列,

同时引起 5、6 行, 5、6 列对应变成 4、5 行, 4、5 列.

③ → ④: 2、3 行, 2、3 列对应交换,

同时引起 5、6 行, 5、6 列对应交换.

	⑤								⑥						
54	15	38	1	3	34	29	66	54	15	1	38	34	3	29	66
65	23	14	28	27	21	3	55	61	22	31	8	5	30	24	59
61	22	8	31	30	5	24	59	65	23	28	14	21	27	7	55
54	37	6	11	25	2	39	66	54	6	37	11	25	39	2	66
65	13	19	33	17	26	12	55	61	35	10	16	18	9	32	59
61	10	35	16	18	32	9	59	65	19	13	33	17	12	26	55

③ → ⑤: 1、2 行, 1、2 列对应交换,

同时引起 4、5 行, 4、5 列对应交换.

⑤ → ⑥: 2、3 行, 2、3 列对应交换,

同时引起 5、6 行, 5、6 列对应交换.

							Σ_6	2 次和	3 次和	4 次和	5 次和	6 次和
Ⅰ	31	14	15	9	26	25	120	2764	69840	1866724	5163240 0	1460011684
Ⅱ	30	21	29	10	19	11	120	2764	6984 0	1866724	51632400	1459406884

各方之各列元素和均为 60+60.

例 2 $\Sigma_6=150$, L=50.

在下列数表中, 黑体数字可以组成幻和$\Sigma_6=150$ 的 6 阶完美幻方. 有关参数如下:

L=50, |**P**|=|**Q**|=225, 半列(行)和: 75

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

(14)

为了把这 36 个数编制成 6 阶完美幻方, 我们从满足上列参数条件着手.

1. 将这 36 个数按 $a+a'=L=50$ 互补数对配对

1	2	3	6	7	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
49	48	47	44	43	39	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26

(15)

2. 把这 36 个数组成对顶互补的 6 阶方阵. 构作时要求对顶互补的 4 个 3 阶方的行和, 列和都是 75. 如下所得:

A

1	31	43	2	26	47
14	17	44	13	28	34
18	27	30	15	21	39
48	24	3	49	19	7
37	22	16	36	33	6
35	29	11	32	23	10

(16)

3. 对各对顶互补的 4 个 3 阶方作相同的行 Z 变换得:

①

1	31	43	2	26	47
44	17	14	34	28	13
30	27	18	39	21	15
48	24	3	49	19	7
16	22	37	6	33	36
11	29	35	10	23	32

(17)

①已经是 6 阶完美幻方了. 为了确定其特优性计算各种可能的对角线的各次和:

Ⅰ:	1	17	18	49	33	32	150,	5128,	197100.		
	1	14	27	49	36	23	150,				
	31	14	30	11	26	20	150,	4114,	121050,	3741874,	119609250.
	31	44	18	19	6	32	150				
	43	17	30	7	33	20	150				
	43	44	27	7	33	23	150,	5128,	197100.		
Ⅱ:	2	13	21	48	37	29	150,	5128,	197100.		
	2	15	28	48	35	22	150				
	34	26	15	16	24	35	150,	4114,	121050,	3741874,	119609250.
	34	21	47	16	29	3	150				
	39	13	26	11	37	13	150				
	39	**28**	**47**	**11**	**22**	**39**	150,	5128,	197100.		

(18)

其余未计算者是不相等的. 由上可见, 经过调整可得 **5** 次特优的 **6** 阶完美幻方如下:

②						③						④					
14	44	17	11	48	**16**	**14**	44	17	13	47	**15**	**14**	44	17	39	21	**15**
18	**30**	27	29	**24**	22	18	**30**	27	28	**26**	21	18	**30**	27	2	**26**	47
43	1	**31**	**35**	3	37	43	1	**31**	**34**	2	39	43	1	**31**	**34**	28	13
39	2	**34**	**36**	6	33	37	3	**35**	**36**	6	33	11	29	**35**	**36**	6	33
21	**26**	28	32	**20**	21	22	**24**	29	32	**20**	23	48	**24**	3	32	**20**	23
15	47	13	7	49	**19**	**16**	48	11	7	49	**19**	**16**	22	37	7	49	**19**

特优方 ② → ③ 是交换左下,右上二对顶互补方所得. ③ → ④是关于左下,右上方之对角线的 180°旋转. 由于这个对顶互补 3 阶方的各行、各列都是 75. 所以在保持一对对顶方不变的条件下, 可以有许多不同的变换来保持这种完美幻方的特优性.

(1) ***P***, ***P'*** 或 ***Q***, ***Q'*** 相互交换.

①						②						③					
14	44	17	39	2	34	36	6	33	39	2	34	36	6	33	11	48	16
18	30	27	21	26	28	32	20	23	21	26	28	32	20	23	29	24	22
43	1	31	15	47	13	7	49	19	15	47	13	7	49	19	35	3	37
11	48	16	36	6	33	11	48	16	14	44	17	39	2	34	14	44	17
29	24	22	32	20	23	29	24	22	18	30	27	21	26	28	18	30	27
35	3	37	7	49	19	35	3	37	43	1	31	15	47	13	43	1	31

容易看出①与③是同构的. 因为它们分别具有组成相同的行、列、对角线组, 不同之处只是线的顺序和线中元素的顺序. 而方①, ②是不同构的.

(2) ***P***, ***P'*** 或 ***Q***, ***Q'*** 分别对其对角线作翻转变换. 这里只对 ***Q***, ***Q'*** 作变换.

①						④						⑤					
14	44	17	11	48	16	14	44	17	37	22	16	14	44	17	11	29	35
18	30	27	29	24	22	18	30	27	3	24	48	18	30	27	48	24	3
43	1	31	35	3	37	43	1	31	35	29	11	43	1	31	16	22	37
39	2	34	36	6	33	13	28	34	36	6	33	39	21	15	36	6	33
21	26	28	32	20	23	47	26	2	32	20	23	2	26	47	32	20	23
15	47	13	7	49	19	15	21	39	7	49	19	34	28	13	7	49	19

(3) 在 ***P***, ***P'*** 或 ***Q***, ***Q'*** 中, 对主对角线元素做各种不同的排列. 这里也只对后者进行.

①						⑥						⑦					
14	44	17	11	48	16	14	44	17	48	11	16	14	44	17	37	3	35
18	30	27	29	24	22	18	30	27	3	35	37	18	30	27	22	24	29
43	1	31	35	3	37	43	1	31	24	29	22	43	1	31	16	48	11
39	2	34	36	6	33	2	39	34	36	6	33	13	47	15	36	6	33
21	26	28	32	20	23	47	15	13	32	20	23	28	26	21	32	20	23
15	47	13	7	49	19	26	21	28	7	49	19	34	2	39	7	49	19
⑧						⑨						⑩					
14	44	17	3	37	35	14	44	17	22	29	24	14	44	17	29	22	24
18	30	27	48	16	11	18	30	27	37	35	3	18	30	27	11	16	48
43	1	31	24	22	29	43	1	31	16	11	48	43	1	31	35	37	3
47	13	15	36	6	33	28	21	26	36	6	33	21	28	26	36	6	33
2	34	39	32	20	23	13	15	47	32	20	23	39	34	2	32	20	23
26	28	21	7	49	19	34	39	2	7	49	19	15	13	47	7	49	19

对顶方中主对角线元素重新排列时，所在行、列的元素也同时随之而交换.由这 3 类变换，从①可变出至少 2×4×6 = 48 个具有相同主对角线的 5 次特优的 6 阶完美幻方. 分段方 ***A*** 中还有一些 3 次特优的 6 阶完美幻方. 由 (20)可知 3 次特优主对角线有 4 种不同的组合:

①						②						③						④					
44	17	14	16	11	48	44	17	14	48	16	11	17	14	44	16	11	48	17	14	44	48	16	11
30	27	18	22	29	24	30	27	18	24	22	29	27	18	30	22	29	24	27	18	30	24	22	29
1	31	43	37	35	3	1	31	43	3	37	35	31	43	1	37	35	3	31	43	1	3	37	35
34	39	2	6	33	36	2	34	39	6	33	36	34	39	2	33	36	6	2	34	39	33	36	6
28	21	26	20	23	32	26	28	21	20	23	32	28	21	26	23	32	20	26	28	21	23	32	20
13	15	47	49	19	7	47	13	15	49	19	7	13	15	47	19	7	49	47	13	15	19	7	49
150	5128	197100				150	5128	197100				150	5128	197100				150	5128	197100			

由于对顶互补方的各行、各列元素和仍都是 75. 因此各方也可用前面的 3 类变换，可变换出许许多多的具有相同主对角线的 **3 次特优的 6 阶完美幻方.**

例 3　　$\Sigma_6 = 150$,　L = 50.

	①						②						③						
73	14	18	41	5	37	35	14	18	41	4	39	34	14	41	18	37	5	35	77
77	44	30	3	46	16	11	44	30	3	45	15	13	17	31	27	22	24	29	75
75	17	27	31	24	22	29	17	27	31	26	21	28	44	3	30	16	46	11	73
73	45	13	15	36	32	9	46	11	16	36	32	9	13	45	15	36	9	32	77
77	4	34	39	6	20	47	5	35	37	6	20	47	28	26	21	33	19	23	75
75	26	28	21	33	23	19	24	29	22	33	23	19	34	4	39	6	47	20	73

此 3 方之主对角线与例 2 的①同，但其他各线的组成成分有所不同. 因此，它是与例 2 所得不同构的 5 次特优 6 阶完美幻方. 由于各行的半和不相等，故变换不如前者多.

例 4　　$\Sigma_6 = 162$, L = 54.

在下列 54 互补数对中，删去黑体数对，余下数可组成幻和为 162 的 6 阶完美幻方:

1	2	**3**	**4**	5	**6**	7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	16	17	18	19	**20**	21	**22**	**23**	24	25	**26**
53	52	**51**	**50**	49	**48**	47	46	45	44	43	42	**41**	40	39	38	37	36	35	**34**	33	**32**	**31**	30	29	**28**

	①						②						
60	7	52	1	43	10	49	7	52	1	49	10	43	102
95	40	9	46	18	37	12	40	9	46	12	37	18	67
88	35	24	29	15	38	21	35	24	29	21	38	15	74
88	33	16	39	25	30	19	5	44	11	47	2	53	102
95	42	17	36	8	45	14	42	17	36	14	45	8	67
60	5	44	11	53	2	47	33	16	39	19	30	25	74
	80	77	86	86	77	80	80	77	86	80	77	86	243

⑧是 5 次特优的 6 阶完美幻方，而且是反向对顶互补方. ⑨是将其变为正向对顶互补方，即将 4, 5, 6 行、列逆序而得.但它不是特优的. 由于各行、列的半和均不等，因此没有变换的可能.故只能有一个这样的 5 次特优 6 阶完美幻方.

主对角线:						Σ_6	2 次和	3 次和	4 次和	5 次和
7	9	29	25	45	47	162,	5830,	236034,	10087174,	444225762.
5	17	39	15	37	49	162,	5830,	236034,	10087174,	444225762.

(19)

三、10 阶完美幻方

如 6 阶一样, 可用前面的方法构作 10 阶完美幻方. 在互补数对($L=a+a'=104$)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 49 & 50 & 51 \\ 103 & 102 & 101 & \cdots & 55 & 54 & 53 \end{matrix} \qquad (20)$$

中, 删去一个偶互补数对, 余下数可组成对顶互补的 10 阶完美幻方. 方法如前. 这里可分 24 类. 幻和: $\Sigma_{10}=5\times104=520=2\times260, |P|=|Q|=650$. 下面给一些例子:

(1) 删去: 6, 98

1	92	77	36	54	97	17	22	63	61	
2	91	76	35	56	96	18	23	64	59	260
3	90	75	34	58	95	19	24	65	57	+
4	89	74	33	60	94	20	25	66	55	260
5	88	73	32	62	93	21	26	67	53	
7	87	82	41	43	103	12	27	68	50	
8	86	81	40	45	102	13	28	69	48	260
9	87	80	39	47	101	14	29	70	46	+
10	84	79	38	49	100	15	30	71	44	260
11	83	78	37	51	99	16	31	72	42	

1	92	77	36	54	7	87	82	41	43
56	2	91	76	35	45	8	86	81	40
34	58	3	90	75	39	47	9	87	80
74	33	60	4	89	79	38	49	10	84
88	73	32	62	5	83	78	37	51	11
97	17	22	63	61	103	12	27	68	50
59	96	18	23	64	48	102	13	28	69
65	57	95	19	24	70	46	101	14	29
25	66	55	94	20	30	71	44	100	15
21	26	67	53	93	16	31	72	42	99

267 262 257 252 262

1	92	77	36	54	7	87	82	41	43
35	56	2	91	76	40	45	8	86	81
90	75	34	58	3	87	80	39	47	9
60	4	89	74	33	49	10	84	79	38
73	32	62	5	88	78	37	51	11	83
97	17	22	63	61	103	12	27	68	50
64	59	96	18	23	69	48	102	13	28
19	24	65	57	95	14	29	70	46	101
55	94	20	25	66	44	100	15	30	71
26	67	53	93	21	31	72	42	99	16

261 261 256 256 266

1	92	77	36	54	83	78	37	51	11
56	2	91	76	35	79	38	49	10	84
34	58	3	90	75	39	47	9	87	80
74	33	60	4	89	45	8	86	81	40
88	73	32	62	5	7	87	82	41	43
21	26	67	53	93	103	12	27	68	50
25	66	55	94	20	48	102	13	28	69
65	57	95	19	24	70	46	101	14	29
59	96	18	23	64	30	71	44	100	15
97	17	22	63	61	16	31	72	42	99

267 262 257 252 262

(2) 删去: 16, 88

1	93	82	41	43	98	17	27	68	50	
2	92	81	40	45	97	18	28	69	48	260
3	91	80	39	47	96	19	29	70	46	+
4	90	79	38	49	95	20	30	71	44	260
5	89	78	37	51	94	21	31	72	42	
6	87	77	36	54	103	11	22	63	61	
7	86	76	35	56	102	12	23	64	59	260
8	85	75	34	58	101	13	24	65	57	+
9	84	74	33	60	100	14	25	66	55	260
10	83	73	32	62	99	15	26	67	53	

1	93	82	41	43	6	87	77	36	54
45	2	92	81	40	56	7	86	76	35
39	47	3	91	80	34	58	8	85	75
79	38	49	4	90	74	33	60	9	84
89	78	37	51	5	83	73	32	62	10
98	17	27	68	50	103	11	22	63	61
48	97	18	28	69	59	102	12	23	64
70	46	96	19	29	65	57	101	13	24
30	71	44	95	20	25	66	55	100	14
21	31	72	42	94	15	26	67	53	99

267 262 257 252 262

1	93	82	41	43	6	87	77	36	54
92	81	40	45	2	86	76	35	56	7
80	39	47	3	91	34	75	58	8	85
38	49	4	90	79	33	60	9	84	74
51	5	89	78	37	62	10	83	73	32
98	17	27	68	50	103	11	22	63	61
18	28	69	48	97	12	23	64	59	102
29	70	46	96	19	24	65	57	101	13
71	44	95	20	30	66	55	100	14	25
42	94	21	31	72	53	99	15	26	67

258 253 258 263 268

1	93	82	41	43	86	76	35	56	7
51	5	89	78	37	34	75	58	8	85
38	49	4	90	79	33	60	9	84	74
80	39	47	3	91	62	10	83	73	32
92	81	40	45	2	6	87	77	36	54
18	28	69	48	97	103	11	22	63	61
29	70	46	96	19	53	99	15	26	67
71	44	95	20	30	66	55	100	14	25
42	94	21	31	72	24	65	57	101	13
98	17	27	68	50	12	23	64	59	102

258 253 258 263 268

(3) 删去: 26, 78

1	93	83	41	42	98	16	27	68	51	
2	92	82	40	44	97	17	28	69	49	
3	91	81	39	46	96	18	29	70	47	260
4	90	80	38	48	95	19	30	71	45	+
5	89	79	37	50	94	20	31	72	43	260
6	88	77	36	53	103	11	21	63	62	
7	87	76	35	55	102	12	22	64	60	
8	86	75	34	57	101	13	23	65	58	
9	85	74	33	59	100	14	24	66	56	
10	84	73	32	61	99	15	25	67	54	

1	93	83	41	42	84	73	32	61	10
44	2	92	82	40	74	33	59	9	85
39	46	3	91	81	34	57	8	86	75
80	38	48	4	90	55	7	87	76	35
89	79	37	50	5	6	88	77	36	53
20	31	72	43	94	103	11	21	63	62
30	71	45	95	19	60	102	12	22	64
70	47	96	18	29	65	58	101	13	23
49	97	17	28	69	24	66	56	100	14
98	16	27	68	51	15	25	67	54	99

267 262 257 252 262

1	93	83	41	42	32	61	10	84	73
82	40	44	2	92	85	74	33	59	9
46	3	91	81	39	57	8	86	75	34
90	80	38	48	4	76	35	55	7	87
37	50	5	89	79	6	88	77	36	53
72	43	94	20	31	103	11	21	63	62
19	30	71	45	95	22	64	60	102	12
47	96	18	29	70	58	101	13	23	65
28	69	49	97	17	14	24	66	56	100
98	16	27	68	51	67	54	99	15	25

264 254 259 259 264

1	93	83	41	42	73	32	61	10	84
40	44	2	92	82	59	9	85	74	33
91	81	39	46	3	86	75	34	57	8
48	4	90	80	38	35	55	7	87	76
79	37	50	5	89	6	88	77	36	53
31	72	43	94	20	103	11	21	63	62
45	95	19	30	71	64	60	102	12	22
18	29	70	47	96	13	23	65	58	101
69	49	97	17	28	56	100	14	24	66
98	16	27	68	51	25	67	54	99	15

261 261 256 256 266

(4) 删去: 36, 68

1	93	83	41	42	98	16	26	69	51	
2	92	82	40	44	97	17	27	70	49	
3	91	81	39	46	96	18	28	71	47	260
4	90	80	38	48	95	19	29	72	45	+
5	89	79	37	50	94	20	30	73	43	260
6	88	78	35	53	103	11	21	63	62	
7	87	77	34	55	102	12	22	64	60	
8	86	76	33	57	101	13	23	65	58	
9	85	75	32	59	100	14	24	66	56	
10	84	74	31	61	99	15	25	67	54	

1	93	83	41	42	85	75	32	59	9
46	3	91	81	39	77	34	55	7	87
37	50	5	89	79	31	61	10	84	74
82	40	44	2	92	57	8	86	76	33
90	80	38	48	4	6	88	78	35	53
19	29	72	45	95	103	11	21	63	62
27	70	49	97	17	58	101	13	23	65
73	43	94	20	30	67	54	99	15	25
47	96	18	28	71	22	64	60	102	12
98	16	26	69	51	14	24	66	56	100

264 254 259 259 264

1	93	83	41	42	85	75	32	59	9
46	3	91	81	39	31	61	10	84	74
37	50	5	89	79	6	88	78	35	53
82	40	44	2	92	77	34	55	7	87
90	80	38	48	4	57	8	86	76	33
19	29	72	45	95	103	11	21	63	62
73	43	94	20	30	58	101	13	23	65
98	16	26	69	51	67	54	99	15	25
27	70	49	97	17	22	64	60	102	12
47	96	18	28	71	14	24	66	56	100

264 254 259 259 264

37	50	5	89	79	85	75	32	59	9
82	40	44	2	92	31	61	10	84	74
90	80	38	48	4	6	88	78	35	53
1	93	83	41	42	77	34	55	7	87
46	3	91	81	39	57	8	86	76	33
19	29	72	45	95	67	54	99	15	25
73	43	94	20	30	22	64	60	102	12
98	16	26	69	51	14	24	66	56	100
27	70	49	97	17	103	11	21	63	62
47	96	18	28	71	58	101	13	23	65

264 254 259 259 264

(5) 删去:　　2, 102

6	91	77	36	50	97	17	22	63	61	
1	92	76	35	56	96	18	23	64	59	
3	90	75	34	58	95	19	24	65	57	260
4	89	74	33	60	94	20	25	66	55	+
5	88	73	32	62	93	21	26	67	53	260
7	87	82	41	43	98	13	27	68	54	
8	86	81	40	45	103	12	28	69	48	
9	85	80	39	47	101	14	29	70	46	
10	84	79	38	49	100	15	30	71	44	
11	83	78	37	51	99	16	31	72	42	

22	63	97	61	17	98	27	13	54	68
59	96	23	18	64	28	48	69	103	12
19	24	57	95	65	46	14	101	29	70
66	55	25	20	94	15	71	30	44	100
93	21	53	67	26	72	99	42	31	16
6	77	91	50	36	82	41	7	43	87
76	56	35	1	92	45	8	81	86	40
58	90	3	75	34	85	80	47	9	39
89	33	74	60	4	38	49	79	84	10
32	5	62	73	88	11	83	51	37	78
	261	261	265	259	254				

93	21	53	67	26	98	27	13	54	68
59	96	23	18	64	72	99	42	31	16
22	63	97	61	17	46	14	101	29	70
19	24	57	95	65	28	48	69	103	12
66	55	25	20	94	15	71	30	44	100
6	77	91	50	36	11	83	51	37	78
32	5	62	73	88	45	8	81	86	40
58	90	3	75	34	82	41	7	43	87
76	56	35	1	92	85	80	47	9	39
89	33	74	60	4	38	49	79	84	10
	261	261	265	259	254				

93	21	53	67	26	15	71	30	44	100
59	96	23	18	64	28	48	69	103	12
22	63	97	61	17	46	14	101	29	70
19	24	57	95	65	72	99	42	31	16
66	55	25	20	94	98	27	13	54	68
89	33	74	60	4	11	83	51	37	78
76	56	35	1	92	45	8	81	86	40
58	90	3	75	34	82	41	7	43	87
32	5	62	73	88	85	80	47	9	39
6	77	91	50	36	38	49	79	84	10
	261	261	265	259	254				

(6) 删去:　　4, 100

1	92	77	36	54	97	17	22	63	61	
2	91	76	35	56	96	18	23	64	59	
3	90	75	34	58	95	19	24	65	57	260
5	88	74	33	60	94	20	25	66	55	+
6	89	72	31	62	93	21	26	67	53	260
7	87	82	41	43	103	12	27	68	50	
8	86	81	40	45	102	13	28	69	48	
9	85	80	39	47	101	14	29	70	46	
10	84	79	38	49	99	16	30	71	44	
11	83	78	37	51	98	15	32	73	42	

92	77	36	1	54	7	87	82	41	43
2	91	56	76	35	81	45	86	8	40
58	3	34	90	75	39	9	47	85	80
33	60	74	5	88	79	38	10	49	84
72	31	62	89	6	51	83	37	78	11
97	17	22	63	61	12	27	68	103	50
23	59	18	96	64	102	13	48	28	69
65	95	57	19	24	46	101	70	14	29
25	66	94	55	20	71	44	30	99	16
53	21	67	26	93	32	73	42	15	98
	263	258	258	259	262				

92	77	36	1	54	7	87	82	41	43
2	91	56	76	35	39	9	47	85	80
58	3	34	90	75	79	38	10	49	84
33	60	74	5	88	81	45	86	8	40
72	31	62	89	6	51	83	37	78	11
97	17	22	63	61	12	27	68	103	50
65	95	57	19	24	102	13	48	28	69
25	66	94	55	20	46	101	70	14	29
23	59	18	96	64	71	44	30	99	16
53	21	67	26	93	32	73	42	15	98
	263	258	258	259	262				

92	77	36	1	54	7	82	87	41	43
2	91	56	76	35	39	47	9	85	80
58	3	34	90	75	79	10	38	49	84
33	60	74	5	88	81	86	45	8	40
72	31	62	89	6	51	37	83	78	11
97	22	17	63	61	12	27	68	103	50
65	57	95	19	24	102	13	48	28	69
25	94	66	55	20	46	101	70	14	29
23	18	59	96	64	71	44	30	99	16
53	67	21	26	93	32	73	42	15	98
	263	258	258	259	262				

(7) 删去: 8, 96

1	92	77	36	54	97	17	22	63	61	
2	91	76	35	56	98	18	23	64	57	
3	90	75	34	58	93	19	24	65	59	260
4	89	74	33	60	94	20	25	66	55	+
5	88	73	32	62	95	21	26	67	51	260
7	87	82	41	43	103	12	27	68	50	
6	86	81	40	47	102	13	28	69	48	
11	85	80	39	45	101	14	29	70	46	
10	84	79	38	49	100	15	30	71	44	
9	83	78	37	53	99	16	31	72	42	

1	92	54	36	77	89	4	60	74	33
90	75	34	58	3	88	73	32	5	62
49	10	84	79	38	39	85	80	11	45
40	47	6	81	86	7	43	87	82	41
78	37	83	9	53	35	56	2	91	76
15	100	44	30	71	103	12	50	68	27
16	31	72	99	42	14	29	70	46	101
65	19	24	93	59	55	94	20	25	66
97	61	17	22	63	64	57	98	23	18
69	48	102	13	28	26	67	21	95	51

262 259 259 257 263

1	92	54	36	77	89	4	60	74	33
49	10	84	79	38	39	85	80	11	45
40	47	6	81	86	7	43	87	82	41
78	37	83	9	53	35	56	2	91	76
90	75	34	58	3	88	73	32	5	62
15	100	44	30	71	103	12	50	68	27
65	19	24	93	59	55	94	20	25	66
97	61	17	22	63	64	57	98	23	18
69	48	102	13	28	26	67	21	95	51
16	31	72	99	42	14	29	70	46	101

262 259 259 257 263

1	92	54	36	77	89	60	4	74	33
49	10	84	79	38	39	80	85	11	45
40	47	6	81	86	7	87	43	82	41
78	37	83	9	53	35	2	56	91	76
90	75	34	58	3	88	32	73	5	62
15	44	100	30	71	103	12	50	68	27
65	24	19	93	59	55	94	20	25	66
97	17	61	22	63	64	57	98	23	18
69	102	48	13	28	26	67	21	95	51
16	72	31	99	42	14	29	70	46	101

262 259 259 257 263

(8) 删去: 10, 94

5	92	77	36	50	97	17	22	63	61	
2	91	76	35	56	96	18	23	64	59	
3	90	75	34	58	95	19	24	65	57	260
4	89	74	33	60	98	20	25	62	55	+
1	88	73	32	66	93	21	26	67	53	260
7	87	82	41	43	99	12	27	68	54	
8	86	81	40	45	102	13	28	69	48	
9	85	80	39	47	101	14	29	70	46	
6	84	79	42	49	100	15	30	71	44	
11	83	78	37	51	103	16	31	72	38	

77	36	50	5	92	61	17	63	97	22
91	35	76	2	56	18	64	23	59	96
3	90	58	75	34	19	24	95	57	65
60	33	74	89	4	98	62	25	20	55
32	66	1	88	73	67	93	53	26	21
43	87	41	7	82	27	68	54	99	12
86	40	81	45	8	13	69	28	102	48
85	80	9	47	39	101	14	46	29	70
6	42	79	84	49	44	71	30	15	100
37	11	51	78	83	72	38	103	16	31

257 260 261 261 261

77	36	50	5	92	18	64	23	59	96
91	35	76	2	56	61	17	63	97	22
3	90	58	75	34	19	24	95	57	65
60	33	74	89	4	67	93	53	26	21
32	66	1	88	73	98	62	25	20	55
86	40	81	45	8	27	68	54	99	12
43	87	41	7	82	13	69	28	102	48
85	80	9	47	39	101	14	46	29	70
37	11	51	78	83	44	71	30	15	100
6	42	79	84	49	72	38	103	16	31

257 260 261 261 261

77	36	50	5	92	61	17	97	22	63
91	35	76	2	56	18	64	59	96	23
3	90	58	75	34	19	24	57	65	95
60	33	74	89	4	98	62	20	55	25
32	66	1	88	73	67	93	26	21	53
43	87	7	82	41	27	68	54	99	12
86	40	45	8	81	13	69	28	102	48
85	80	47	39	9	101	14	46	29	70
6	42	84	49	79	44	71	30	15	100
37	11	78	83	51	72	38	103	16	31

257 260 261 261 261

(9) 删去: 12, 92

1	93	82	41	43	98	16	26	66	57
4	90	81	40	45	97	18	28	69	48
3	91	80	39	47	96	19	29	70	46
5	87	77	36	55	95	20	30	71	44
2	89	79	37	53	94	21	31	72	42
6	88	78	38	50	103	11	22	63	61
7	86	76	35	56	100	14	23	64	59
8	85	75	34	58	101	13	24	65	57
9	84	74	33	60	99	17	27	68	49
10	83	73	32	62	102	15	25	67	51

260 + 260

1	43	93	82	41	98	16	54	26	66
39	3	80	47	91	69	97	18	28	48
87	36	5	77	55	29	46	96	70	19
53	89	37	2	79	21	31	72	94	42
81	90	45	40	4	44	71	20	30	95
6	88	50	78	38	103	63	11	22	61
35	7	86	76	56	65	101	24	57	13
75	58	8	34	85	17	68	99	27	49
83	73	32	10	62	51	15	67	102	25
60	33	84	74	9	23	14	59	64	100

261 261 260 248 270

1	43	93	82	41	44	71	20	30	95
39	3	80	47	91	21	31	72	94	42
87	36	5	77	55	29	46	96	70	19
53	89	37	2	79	69	97	18	28	48
81	90	45	40	4	98	16	54	26	66
60	33	84	74	9	103	63	11	22	61
83	73	32	10	62	65	101	24	57	13
75	58	8	34	85	17	68	99	27	49
35	7	86	76	56	51	15	67	102	25
6	88	50	78	38	23	14	59	64	100

261 261 260 248 270

1	43	93	82	41	71	44	20	30	95
39	3	80	47	91	31	21	72	94	42
87	36	5	77	55	46	29	96	70	19
53	89	37	2	79	97	69	18	28	48
81	90	45	40	4	16	98	54	26	66
33	60	84	74	9	103	63	11	22	61
73	83	32	10	62	65	101	24	57	13
58	75	8	34	85	17	68	99	27	49
7	35	86	76	56	51	15	67	102	25
88	6	50	78	38	23	14	59	64	100

261 261 260 248 270

(10) 删去: 14, 90

1	93	82	41	43	98	17	27	68	50
2	92	81	40	45	97	18	28	69	48
3	91	80	39	47	96	19	29	70	46
5	89	79	38	49	95	20	30	71	44
4	88	78	37	53	94	21	31	72	42
6	87	77	36	54	103	11	22	63	61
7	86	76	35	56	102	12	23	64	59
8	85	75	34	58	101	13	24	65	57
9	84	74	33	60	99	15	25	66	55
10	83	73	32	62	100	16	26	67	51

260 + 260

1	82	93	41	43	6	77	54	87	36
45	40	81	2	92	62	10	32	73	83
39	3	47	91	80	86	76	35	7	56
89	79	38	49	5	75	34	58	85	8
88	53	4	78	37	33	60	84	9	74
98	27	50	17	68	103	22	11	63	61
42	94	72	31	21	59	64	23	102	12
18	28	69	97	48	65	101	57	13	24
29	70	46	19	96	15	25	66	55	99
71	44	20	95	30	16	51	100	26	67

258 263 257 259 263

1	82	93	41	43	6	77	54	87	36
39	3	47	91	80	62	10	32	73	83
88	53	4	78	37	33	60	84	9	74
45	40	81	2	92	86	76	35	7	56
89	79	38	49	5	75	34	58	85	8
98	27	50	17	68	103	22	11	63	61
42	94	72	31	21	65	101	57	13	24
71	44	20	95	30	16	51	100	26	67
18	28	69	97	48	59	64	23	102	12
29	70	46	19	96	15	25	66	55	99

258 263 257 259 263

1	82	93	41	43	6	36	54	87	77
39	3	47	91	80	62	83	32	73	10
88	53	4	78	37	33	74	84	9	60
45	40	81	2	92	86	56	35	7	76
89	79	38	49	5	75	8	58	85	34
98	68	50	17	27	103	22	11	63	61
42	21	72	31	94	65	101	57	13	24
71	30	20	95	44	16	51	100	26	67
18	48	69	97	28	59	64	23	102	12
29	96	46	19	70	15	25	66	55	99

258 263 257 259 263

10 阶完美幻方的决定因素和变换:

1. 数字集 **F** 的选取, **F** 一确定幻方的幻和也就确定, 这里是$\Sigma_{10}=520$;

2. 对顶分段方的编制, 尽可能编制成各列是 260+260 的形式.对给定的数字集 **F** 可以编制出不同的对顶分段方;

3. 对各对顶方执行行 Z 变换, 或发展了的行 Z 变换.在执行这一步时尽可能保持各列的元素和不变.上列各分段方已通过转置转变成行和为 260+260 形式.即尽可能保持各行的元素和不变.这里可先给出上面两方的 Z 变换, 然后再用对顶互补给出下面两方的 Z 变换.这里的互补数为 $a+a'=104$;

4. 对各对顶方执行行 Z 变换的目的, 是使上面两方的对应列的和相等. 再用对顶互补给出下面两方, 使上、下两方对应列的和为 520(不一定恰为 260+260). 如此即已给出完美幻方;

5. 完美幻方还有很多变换.例如, 当完美幻方的各行满足上述第 3 点时, 对各对顶方的行的重排, 这有 5!= 120 种不同的排列. 通过两对顶方执行的重排, 甚至可以给出完美幻方的特优性主对角线.在对顶方有其和相等的列和时, 还可以进行列的重排, 产生新的完美幻方.

这里对各类给出了行和式分段方, 并给出一个或 3 个 10 阶完美幻方.

下面采用了另一种选取方式来给出 10 阶完美幻方的数字集 F.

10 阶完美幻方的特优性

例 1 幻和$\Sigma_{10}=1810$, 有以下数表之数列

1	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8	**9**	10	**11**	12	13	14	**15**	16	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	23	**24**	25	26	27	**28**	29	**30**	31	32	33	**34**	35	**36**	**37**	**38**
39	**40**	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	**49**	50	51	52	**53**	54	**55**	**56**	**57**
58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	**78**	**79**	80	**81**	82	83	84	**85**	86	**87**	88	89	90	**91**	92	**93**	**94**	**95**
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152
153	**154**	**155**	156	**157**	158	159	160	**161**	162	**163**	164	165	166	**167**	168	**169**	**170**	**171**
172	173	174	175	176	177	178	179	180	181									

(21)

中黑体数字以及满足 $a+a'=362$ 的互补数, 构成如下表:

	P						**Q**				
1	5	9	17	18	19	15	11	3	2	50	
153	157	161	169	170	171	167	163	155	154	810	
77	81	85	93	94	95	91	87	79	78	430	$a\in P$, Q,
305	309	313	321	322	323	319	315	307	306	1570	$b\in P'$, Q',
324	328	332	340	341	342	338	334	326	325	1665	$a+b=362$.
	Q'						**P'**				
343	347	351	359	360	361	357	353	345	344	1760	
191	195	199	207	208	209	205	201	193	192	1000	
267	271	275	283	284	285	281	277	269	268	1380	
39	43	47	55	56	57	53	49	41	40	240	
20	24	28	36	37	38	34	30	22	21	145	
860	880	900	940	945	950	930	910	870	865	4525	

(22)

计算互补数列之元素和及各次和如下:

A_0									次和	1	2	3	4	5
1	5	9	17	18	361	357	353	345	344	1810	620460	218314960	76924768728	27115852865800
153	157	161	169	170	209	205	201	193	192	1810	331660	61496560	11531207128	2184863633800
77	81	85	93	94	285	281	277	269	268	1810	418300	108542080	29397761368	8079040016200
305	309	313	321	322	57	53	49	41	40	1810	504940	155587600	48765613528	15331891016200
324	328	332	340	341	38	34	30	22	21	1810	559090	184991050	61632898978	20554874845450
343	347	351	359	360	19	15	11	3	2	1810	620460	218314960	76924768728	27115852865800
191	195	199	207	208	171	167	163	155	154	1810	331660	61496560	11531207128	2184863633800
267	271	275	283	284	95	91	87	79	78	1810	418300	108542080	29397761368	8079040016200
39	43	47	55	56	323	319	315	307	306	1810	504940	155587600	48765613528	15331891016200
20	24	28	36	37	342	338	334	326	325	1810	559090	184991050	61632898978	20554874845450
A_1														
1	153	77	305	324	361	209	285	57	38	1810	487260	145987360	45758480088	14707191670600
5	157	81	309	328	357	205	281	53	34	1810	486700	145683280	45594973528	14625631333000
9	161	85	313	332	353	201	277	49	30	1810	486460	145552960	45524918488	14590694278600
17	169	93	321	340	345	193	269	41	22	1810	486940	145813600	45665040088	14660578813000
18	170	94	322	341	344	192	268	40	21	1810	487090	145895050	45708837538	14682426282250
2	154	78	306	325	360	208	284	56	37	1810	487090	145895050	45708837538	14682426282250
3	155	79	307	326	359	207	283	55	36	1810	486940	145813600	45665040088	14660578813000
11	163	87	315	334	351	199	275	47	28	1810	486460	145552960	45524918488	14590694278600
15	167	91	319	338	347	195	271	43	24	1810	486700	145683280	45594973528	14625631333000
19	171	95	323	342	343	191	267	39	20	1810	487260	145987360	45758480088	14707191670600

可见以这些对应线为主对角线，都将可得到5次特优的10阶完美幻方. 这里给出了10个不同的主对角线组.

PB_1					$P'B_1$					$\Sigma_{10}=5\times362=2\times905=1810$	
1	170	93	313	328	361	192	269	49	34	243103+ 243787 =	486890
5	153	94	321	332	357	209	268	41	30	245535+241355	
9	157	77	322	340	353	205	285	40	22	249943+236947	
17	161	81	305	341	345	201	281	57	21	242077+ 244813	
18	169	85	309	324	344	193	277	53	38	236567+250323	
QB_4					$Q'B_4$						
2	155	87	319	342	360	207	275	43	20	250323+243103	
3	163	91	323	325	359	199	271	39	34	244813+245535	
11	167	95	306	326	351	195	267	56	36	236947+249943	
15	171	78	307	334	347	191	284	55	28	241355+242077	
19	154	79	315	338	343	208	283	47	24	243787+236567	

	PB_4				$Q'B_1$					$\Sigma_{10}=5\times362=2\times905=1810$
1	157	85	321	341	343	195	275	55	37	251197 + 235693 = 486890
5	161	93	322	324	347	199	283	56	20	243255+243635
9	169	94	305	328	351	207	284	39	24	238087+248803
17	170	77	309	332	359	208	267	43	28	240823+246067
18	153	81	313	340	360	191	271	47	36	243863+243027
	QB_1					$P'B_4$				
2	171	91	315	326	344	209	281	49	22	243027+243863
3	154	95	319	334	345	192	285	53	30	246067 +240823
11	155	78	323	338	353	193	268	57	34	248803+238087
15	163	79	306	342	357	201	269	40	38	243635+243255
19	167	87	307	325	361	205	277	41	21	235693+251197

	PB_2				$Q'B_3$					$\Sigma_{10}=5\times362=2\times905=1810$
1	169	81	322	332	343	207	271	56	28	237859+249031 = 486890
5	170	85	305	340	347	208	275	39	36	242115+244775
9	153	93	309	341	351	191	283	43	37	242989+243901
17	157	94	313	324	359	195	284	47	20	250171+236719
18	161	77	321	328	360	199	267	55	24	244091+ 242799
	QB_3				$P'B_2$					
2	163	95	307	338	344	201	285	41	34	242799+244091
3	167	78	315	342	345	205	268	49	38	236719+250171
11	171	79	319	325	353	209	269	53	21	243901+242989
15	154	87	323	326	357	192	277	57	22	244775+242115
19	155	91	306	334	361	193	281	40	30	249031+237859

	PB_3				$Q'B_2$					$\Sigma_{10}=5\times362=2\times905=1810$
1	161	94	309	340	343	199	284	43	36	241051+245839= 486890
5	169	77	313	341	347	207	267	47	37	238125+248765
9	170	81	321	324	351	208	271	55	20	243331+243559
17	153	85	322	328	359	191	275	56	24	244699+242191
18	157	93	305	332	360	195	283	39	28	250019+236871
	QB_2				$P'B_3$					
2	167	79	323	334	344	205	269	57	30	236871+250019
3	171	87	306	338	345	209	277	40	34	242191+244699
11	154	91	307	342	353	192	281	41	38	243559+243331
15	155	95	315	325	357	193	285	49	21	248765+238125
19	163	78	319	326	361	201	268	53	22	245839+241051

在各列和方的不同 P, Q 间无相同的 2 次和线,因此除 A_0, A_1 外，不再有特优线. 同时，在 P 或 Q 中也无 2 次和相等线. 因此用 B_1, B_4 ; B_2, B_3 作行列线组，可能配对给出 10 阶平方完美幻方，即各行各列的元素和, 2 次和均相等，但不是特优的. 或者给出以 A_0 或 A_1 作对角线组得到 5 次特优的 10 阶完美幻方，但其 2 次和都不等于 486 890. 因此不是平方的. 二者只能取其一 .

1	170	93	313	328	361	192	269	49	34	①
341	17	161	81	305	21	345	201	281	57	$\Sigma_{10}=2\times905=1810$
321	332	5	153	94	41	30	357	209	268	行 PB_1, QB_4
85	309	324	18	169	277	53	38	344	193	列 PB_4, QB_1
157	77	322	340	9	205	285	40	22	353	列是平方的
167	95	306	326	11	195	267	56	36	351	2 次和 486890
87	319	342	2	155	275	43	20	360	207	行不是平方的
307	334	15	171	78	55	28	347	191	284	对角线组 A_0
325	3	163	91	323	37	359	199	271	39	$\Sigma_{10}=5\times362=1810$
19	154	79	315	338	343	208	283	47	24	对角互补配对

1	170	93	313	328	37	359	199	271	39	②
157	77	322	340	9	55	28	347	191	284	行 PB_1, QB_4,
85	309	324	18	169	275	43	20	360	207	列 PB_4, QB_1,
321	332	5	153	94	195	267	56	36	351	$\Sigma_{10}=2\times905=1810$
341	17	161	81	305	343	208	283	47	24	2 次和 486, 890,
325	3	163	91	323	361	192	269	49	34	对角线 A_1
307	334	15	171	78	205	285	40	22	353	$\Sigma_{10}=5\times362=1810$
87	319	342	2	155	277	53	38	344	193	是特优的
167	95	306	326	11	41	30	357	209	268	不是平方的
19	154	79	315	338	21	345	201	281	57	

1	169	81	322	332	199	267	55	24	360	③
340	5	170	85	305	284	47	20	359	195	行 PB_2, QB_3
309	341	9	153	93	43	37	351	191	283	列 PB_3, QB_2
94	313	324	17	157	36	347	208	275	39	$\Sigma_{10}=2\times905=1810$
161	77	321	328	18	343	207	271	56	28	2 次和 486, 890
163	95	307	338	2	361	193	281	40	30	对角线 A_0
78	315	342	3	167	22	357	192	277	57	$\Sigma_{10}=5\times362=1810$
319	325	11	171	79	53	21	353	209	269	是特优的
326	15	154	87	323	268	49	38	345	205	不是平方的
19	155	91	306	334	201	285	41	34	344	

1	169	81	322	332	361	193	281	40	30	④
161	77	321	328	18	201	285	41	34	344	行 PB_2, QB_3
94	313	324	17	157	268	49	38	345	205	列 PB_3, QB_2
309	341	9	153	93	53	21	353	209	269	$\Sigma_{10}=1810$
340	5	170	85	305	22	357	192	277	57	
163	95	307	338	2	199	267	55	24	360	对角线 A_1
19	155	91	306	334	343	207	271	56	28	$\Sigma_{10}=1810$
326	15	154	87	323	36	347	208	275	39	是特优的
319	325	11	171	79	43	37	351	191	283	
78	315	342	3	167	284	47	20	359	195	

1	157	85	321	341	19	167	87	307	325	
328	9	169	94	305	338	11	155	78	323	平方完美幻方
313	340	18	153	81	315	326	2	171	91	
93	322	324	5	161	79	306	342	15	163	各行各列
170	77	309	332	17	154	95	319	334	3	1810
343	195	275	55	37	361	205	277	41	21	486890
24	351	207	284	39	34	353	193	268	57	不是特优的
47	36	360	191	271	49	22	344	209	281	
283	56	20	347	199	269	40	38	357	201	
208	267	43	28	359	192	285	53	30	345	

①、②、③、④的各行各列元素和为$\Sigma_{10}=2\times905=1810$, 但不是 10 阶平方完美幻方. 因为,它们的列是平方的, 2 次和为 486 890, 但行不是平方的. 不过他们还都是 5 次特优的 10 阶完美幻方. 各方都包含有 5 个元素的 2, 3, 4, 5 次和不同的主对角线. 因此, 可分别地分解成 5 个主对角线元素的 2, 3, 4, 5 次和不同的 5 次特优的 10 阶完美幻方.

1	157	85	321	**341**	154	**95**	319	334	**3**	①
328	**9**	169	94	**305**	79	306	**342**	**15**	163	各行各列:
313	340	**18**	**153**	81	315	326	**2**	**171**	91	905 + 905 = **1810**.
93	322	**324**	**5**	161	338	**11**	155	78	**323**	
170	77	309	332	**17**	**19**	167	87	307	325	**1810**
208	**267**	43	28	**359**	**361**	205	277	41	21	**620460**
283	56	**20**	**347**	199	34	**353**	193	268	**57**	**218314960**
47	36	**360**	**191**	271	49	22	**344**	**209**	281	**76924768728**
24	**351**	207	284	**39**	269	40	**38**	**357**	201	**27115852865800**
343	195	275	55	37	192	**285**	53	30	**345**	

170	77	309	332	**17**	79	306	**342**	**15**	163	②
1	157	85	321	341	315	326	**2**	**171**	91	
328	**9**	169	94	305	338	**11**	155	78	**323**	
313	340	**18**	153	81	**19**	167	87	307	325	
93	322	324	**5**	161	154	**95**	319	334	**3**	1810
283	56	**20**	**347**	199	192	**285**	53	30	**345**	331660
47	36	**360**	**191**	271	**361**	205	277	41	21	61496560
24	**351**	207	284	**39**	34	**353**	193	268	**57**	11531207128
343	195	275	55	37	49	22	**344**	**209**	281	2184863633800
208	**267**	43	28	**359**	269	40	**38**	**357**	201	
93	322	324	**5**	161	315	326	**2**	**171**	91	③
170	77	309	332	**17**	338	**11**	155	78	**323**	
1	157	85	321	341	**19**	167	87	307	325	
328	**9**	169	94	305	154	**95**	319	334	**3**	
313	340	**18**	153	81	79	306	**342**	**15**	163	1810
47	36	**360**	**191**	271	269	40	**38**	**357**	201	418300
24	**351**	207	284	**39**	192	**285**	53	30	**345**	108542080
343	195	275	55	37	**361**	205	277	41	21	29397761368
208	**267**	43	28	**359**	34	**353**	193	268	**57**	8079040016200
283	56	**20**	**347**	199	49	22	**344**	**209**	281	
313	340	**18**	153	81	338	**11**	155	78	**323**	④
93	322	324	**5**	161	**19**	167	87	307	325	
170	77	309	332	**17**	154	**95**	319	334	**3**	
1	157	85	321	341	79	306	**342**	**15**	163	
328	**9**	169	94	305	315	326	**2**	**171**	91	1810
24	**351**	207	284	**39**	49	22	**344**	**209**	281	504940
343	195	275	55	37	269	40	**38**	**357**	201	155587600
208	**267**	43	28	**359**	192	**285**	53	30	**345**	48765613528
283	56	**20**	**347**	199	**361**	205	277	41	21	15331891016200
47	36	**360**	**191**	271	34	**353**	193	268	**57**	
328	**9**	169	94	305	**19**	167	87	307	325	⑤
313	340	**18**	153	81	154	**95**	319	334	**3**	
93	322	324	**5**	161	79	306	**342**	**15**	163	
170	77	309	332	**17**	315	326	**2**	**171**	91	
1	157	85	321	341	338	**11**	155	78	**323**	1810
343	195	275	55	37	34	**353**	193	268	**57**	559090
208	**267**	43	28	**359**	49	22	**344**	**209**	281	184991050
283	56	**20**	**347**	199	269	40	**38**	**357**	201	61632898978
47	36	**360**	**191**	271	192	**285**	53	30	**345**	20554874845450
24	**351**	207	284	**39**	**361**	205	277	41	21	
1	157	85	321	341	338	11	155	78	**323**	⑥
170	77	309	332	17	315	326	2	**171**	91	
93	322	**324**	5	161	79	306	**342**	15	163	
313	340	18	**153**	81	154	**95**	319	334	3	
328	9	169	94	**305**	**19**	167	87	307	325	1810
24	351	207	284	**39**	**361**	205	277	41	21	487260
47	36	360	**191**	271	192	**285**	53	30	345	145987360
283	56	**20**	347	199	269	40	**38**	357	201	45758480088
208	**267**	43	28	359	49	22	344	**209**	281	14707191670600
343	195	275	55	37	34	353	193	268	**57**	

328	9	169	94	305	315	326	2	171	**91**	⑦
1	**157**	85	321	341	79	306	342	**15**	163	
170	77	**309**	332	17	154	95	**319**	334	3	
93	322	324	**5**	161	19	**167**	87	307	325	
313	340	18	153	**81**	**338**	11	155	78	323	**1810**
47	36	360	191	**271**	**34**	353	193	268	57	**486700**
283	56	20	**347**	199	361	**205**	277	41	21	**145683280**
208	267	**43**	28	359	192	285	**53**	30	345	**45594973528**
343	**195**	275	55	37	269	40	38	**357**	201	**14625631333000**
24	351	207	284	39	49	22	344	209	**281**	

313	340	18	153	81	79	306	342	15	**163**	⑧
328	**9**	169	94	305	154	95	319	**334**	3	
1	157	**85**	321	341	19	167	**87**	307	325	
170	77	309	**332**	17	338	**11**	155	78	323	
93	322	324	5	**161**	**315**	326	2	171	91	**1810**
283	56	20	347	**199**	**49**	22	344	209	281	**486460**
208	267	43	**28**	359	34	**353**	193	268	57	**145552960**
343	195	**275**	55	37	269	40	**38**	357	201	**45524918488**
24	**351**	207	284	39	192	285	53	**30**	345	**14590694278600**
47	36	360	191	271	361	205	277	41	**21**	

93	322	324	5	161	154	95	319	334	**3**	⑨
313	**340**	18	153	81	19	167	87	**307**	325	
328	9	**169**	94	305	338	11	**155**	78	323	
1	157	85	**321**	341	315	**326**	2	171	91	
170	77	309	332	**17**	**79**	306	342	15	163	**1810**
208	267	43	28	**359**	**269**	40	38	357	201	**486940**
343	195	275	**55**	37	49	**22**	344	209	281	**145813600**
24	351	**207**	284	39	34	353	**193**	268	57	**45665040088**
47	**36**	360	191	271	361	205	277	**41**	21	**14660578813000**
283	56	20	347	199	192	285	53	30	**345**	

170	77	309	332	17	19	167	87	307	**325**	⑩
93	**322**	324	5	161	338	11	155	**78**	323	
313	340	**18**	153	81	315	326	**2**	171	91	
328	9	169	**94**	305	79	**306**	342	15	163	**1810**
1	157	85	321	**341**	**154**	95	319	334	3	**487090**
343	195	275	55	**37**	**192**	285	53	30	345	**145895050**
24	351	207	**284**	39	269	**40**	38	357	201	**45708837538**
47	36	**360**	191	271	49	22	**344**	209	281	**14682426282250**
283	**56**	20	347	**199**	34	353	193	**268**	57	
208	267	43	28	359	361	205	277	41	**21**	

1. 对角方进行整体交换. 如:

1	157	85	321	341	208	267	43	28	359	
328	9	169	94	305	283	56	20	347	199	交换①的
313	340	18	153	81	47	36	360	191	271	左上右下方
93	322	324	5	161	24	351	207	284	39	
170	77	309	332	17	343	195	275	55	37	1810
154	95	319	334	3	361	205	277	41	21	620460
79	306	342	15	163	34	353	193	268	57	218314960
315	326	2	171	91	49	22	344	209	281	76924768728
338	11	155	78	323	269	40	38	357	201	27115852865800
19	167	87	307	325	192	285	53	30	345	

269	40	38	357	201	315	326	2	171	91	
192	285	53	30	345	338	11	155	78	323	交换③的
361	205	277	41	21	19	167	87	307	325	左下右上方
34	353	193	268	57	154	95	319	334	3	
49	22	344	209	281	79	306	342	15	163	1810
47	36	360	191	271	93	322	324	5	161	418300
24	351	207	284	39	170	77	309	332	17	108542080
343	195	275	55	37	1	157	85	321	341	29397761368
208	267	43	28	359	328	9	169	94	305	8079040016200
283	56	20	347	199	313	340	18	153	81	

因为, 各完美幻方之各 5 阶方的各行各列元素和都是 905. 所以这些特优方可在不改变特优性的条件下进行变换. 例如上面 2 方就是对对角方进行整体交换.

2. 对应对角方内对应行列的交换. 这里只对①右上左下方进行变换.

9	169	94	305	328	154	95	319	334	3	18	153	81	313	340	154	95	319	334	3
340	18	153	81	313	79	306	342	15	163	324	5	161	93	322	79	306	342	15	163
322	324	5	161	93	315	326	2	171	91	309	332	17	170	77	315	326	2	171	91
77	309	332	17	170	338	11	155	78	323	85	321	341	1	157	338	11	155	78	323
157	85	321	341	1	19	167	87	307	325	169	94	305	328	9	19	167	87	307	325
208	267	43	28	359	353	193	268	57	34	208	267	43	28	359	344	209	281	49	22
283	56	20	347	199	22	344	209	281	49	283	56	20	347	199	38	357	201	269	40
47	36	360	191	271	40	38	357	201	269	47	36	360	191	271	53	30	345	192	285
24	351	207	284	39	285	53	30	345	192	24	351	207	284	39	277	41	21	361	205
343	195	275	55	37	205	277	41	21	361	343	195	275	55	37	193	268	57	34	353

5	161	93	322	324	154	95	319	334	3	17	170	77	309	332	154	95	319	334	3
332	17	170	77	309	79	306	342	15	163	341	1	157	85	321	79	306	342	15	163
321	341	1	157	85	315	326	2	171	91	305	328	9	169	94	315	326	2	171	91
94	305	328	9	169	338	11	155	78	323	81	313	340	18	153	338	11	155	78	323
153	81	313	340	18	19	167	87	307	325	161	93	322	324	5	19	167	87	307	325
208	267	43	28	359	357	201	269	40	38	208	267	43	28	359	345	192	285	53	30
283	56	20	347	199	30	345	192	285	53	283	56	20	347	199	21	361	205	277	41
47	36	360	191	271	41	21	361	205	277	47	36	360	191	271	57	34	353	193	268
24	351	207	284	39	268	57	34	353	193	24	351	207	284	39	281	49	22	344	209
343	195	275	55	37	209	281	49	22	344	343	195	275	55	37	201	269	40	38	357

17	170	77	332	309	154	95	319	334	3	1	341	157	321	85	154	95	319	334	3
341	1	157	321	85	79	306	342	15	163	170	17	77	332	309	79	306	342	15	163
305	328	9	94	169	315	326	2	171	91	328	305	9	94	169	315	326	2	171	91
161	93	322	5	324	338	11	155	78	323	93	161	322	5	324	338	11	155	78	323
81	313	340	153	18	19	167	87	307	325	313	81	340	153	18	19	167	87	307	325
208	267	43	28	359	345	192	285	30	53	208	267	43	28	359	361	21	205	41	277
283	56	20	347	199	21	361	205	41	277	283	56	20	347	199	192	345	285	30	53
47	36	360	191	271	57	34	353	268	193	47	36	360	191	271	34	57	353	268	193
24	351	207	284	39	201	269	40	357	38	24	351	207	284	39	269	201	40	357	38
343	195	275	55	37	281	49	22	209	344	343	195	275	55	37	49	281	22	209	344

17	170	77	309	332	154	95	319	334	3	1	341	157	85	321	154	95	319	334	3
341	1	157	85	321	79	306	342	15	163	170	17	77	309	332	79	306	342	15	163
305	328	9	169	94	315	326	2	171	91	328	305	9	169	94	315	326	2	171	91
81	313	340	18	153	338	11	155	78	323	313	81	340	18	153	338	11	155	78	323
161	93	322	324	5	19	167	87	307	325	93	161	322	324	5	19	167	87	307	325
208	267	43	28	359	345	192	285	53	30	208	267	43	28	359	361	21	205	277	41
283	56	20	347	199	21	361	205	277	41	283	56	20	347	199	192	345	285	53	30
47	36	360	191	271	57	34	353	193	268	47	36	360	191	271	34	57	353	193	268
24	351	207	284	39	281	49	22	344	209	24	351	207	284	39	49	281	22	344	209
343	195	275	55	37	201	269	40	38	357	343	195	275	55	37	269	201	40	38	357

这里给出了 8 个由①变出的互不同构的 5 次特优的 10 阶完美幻方. 但事实上, 主对角线上 5 个数: 1,5,9,17,18 有 5!种不同的排列. 因此, 用这种变换由①可得 5!=120 种互不同构的特优方. 再结合变换 1. 上列①,②,③,④,⑤总共可得 2×10×5!=2400 个互不同构的 5 次特优的 10 阶完美幻方.

四、完美幻方的合成法

在数 1,2,3,…,104,105 中, 删去 5 个数, 余下 100 个数可能作出 10 阶完美幻方.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 104 + 105 = 52\times105 = 5565,$$

有下列删去法: 删去

$$\begin{array}{lll}
(1)\,101,\ 102,\ 103,\ 104,\ 105 & \Sigma_{10} = \{S-(101+102+\cdots+105)\} = 505; & \\
(2)\,96,\ 97,\ 98,\ 99,\ 100 & \Sigma_{10} = 507.5; & \\
(3)\,91,\ 92,\ 93,\ 94,\ 95 & \Sigma_{10} = 510; & (23) \\
(4)\,81,\ 82,\ 83,\ 84,\ 85 & \Sigma_{10} = 515; & \\
(5)\,71,\ 72,\ 73,\ 74,\ 75 & \Sigma_{10} = 520; & \\
(6)\,51,\ 52,\ 53,\ 54,\ 55 & \Sigma_{10} = 530. &
\end{array}$$

幻和为奇数, 带小数的都不能用. 因此, 只有第 3,5 两种删去法有意义. 前者可得幻和更小的 10 阶完美幻方, 后者所得幻和与前相同. 这里只取第 3 种删去法为例. 其方法如下:

(1) 构作分段方, 要求: 各 5 阶方的总值均相等为: 1275,且各列上下两段之值相等.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	27	28	29	30	36	37	38	39	40
66	67	68	69	7	51	52	53	54	55
71	72	73	74	75	56	57	58	59	60
81	82	83	4	85	96	97	98	99	100
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	32	33	34	35	21	22	23	24	25
41	42	43	44	4	46	47	48	49	50
76	77	78	79	80	61	62	63	64	65
86	87	88	89	90	101	102	103	104	105

245 250 255 260 265 245 250 255 260 265

(2) 对各 5 阶方作相同的行 Z 变换使各列元素和均为: 255+255.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
27	28	29	30	26	37	38	39	40	36
68	69	70	66	67	53	54	55	51	52
74	75	71	72	73	59	60	56	57	58
85	81	82	83	84	100	96	97	98	99
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
32	33	34	35	31	22	23	24	25	21
43	44	45	41	42	48	49	50	46	47
79	80	76	77	78	64	65	61	62	63
90	86	87	88	89	105	101	102	103	104

255+255　　255+255

(3) 对各小方作列 Z 变换, 使各小方成 5 阶完美幻方, 其幻和为: 255.

1	69	82	30	73	6	54	97	40	58
27	75	3	66	84	37	60	8	51	99
68	81	29	72	5	53	96	39	57	10
74	2	70	83	26	59	7	55	98	36
85	28	71	4	67	100	38	56	9	52
11	44	87	35	78	16	49	102	25	63
32	80	13	41	89	22	65	18	46	104
43	86	34	77	15	48	101	24	62	20
79	12	45	88	31	64	17	50	103	21
90	33	76	14	42	105	23	61	19	47

(4) 上下交叉, 使之合成一列, 其元素和为:510.

1	69	82	30	73	6	54	97	40	58
11	44	87	35	78	16	49	102	25	63
27	75	3	66	84	37	60	8	51	99
32	80	13	41	89	22	65	18	46	104
68	81	29	72	5	53	96	39	57	10
43	86	34	77	15	48	101	24	62	20
74	2	70	83	26	59	7	55	98	36
79	12	45	88	31	64	17	50	103	21
85	28	71	4	67	100	38	56	9	52
90	33	76	14	42	105	23	61	19	47

(5) 左右交叉，得完美幻方，幻和 $\Sigma_{10}=510$.

由于第4、5步有许多的变化，用同一组数可以得到许许多多的互不同构的10阶完美幻方．例如，由上可以给出：

①

1	6	69	54	82	97	30	40	73	58
11	16	44	49	87	102	35	25	78	63
27	37	75	60	3	8	66	51	84	99
32	22	80	65	13	18	41	46	89	104
68	53	81	96	29	39	72	57	5	10
43	48	86	101	34	24	77	62	15	20
74	59	2	7	70	55	83	98	26	36
79	64	12	17	45	50	88	103	31	21
85	100	28	38	71	56	4	9	67	52
90	105	33	23	76	61	14	19	42	47

②

1	40	69	58	82	6	30	54	73	97
11	25	44	63	87	16	35	49	78	102
27	51	75	99	3	37	66	60	84	8
32	46	80	104	13	22	41	65	89	18
68	57	81	10	29	53	72	96	5	39
43	62	86	20	34	48	77	101	15	24
74	98	2	36	70	59	83	7	26	55
79	103	12	21	45	64	88	17	31	50
85	9	28	52	71	100	4	38	67	56
90	19	33	47	76	105	14	23	42	61

③

1	105	69	23	82	61	30	19	73	47
11	6	44	54	87	97	35	40	78	58
27	16	75	49	3	102	66	25	84	63
32	37	80	60	13	8	41	51	89	99
68	22	81	65	29	18	72	46	5	104
43	53	86	96	34	39	77	57	15	10
74	48	2	101	70	24	83	62	26	20
79	59	12	7	45	55	88	98	31	36
85	64	28	17	71	50	4	103	67	21
90	100	33	38	76	56	14	9	42	52

④

1	47	69	105	82	23	30	61	73	19
11	58	44	6	87	54	35	97	78	40
27	63	75	16	3	49	66	102	84	25
32	99	80	37	13	60	41	8	89	51
68	104	81	22	29	65	72	18	5	46
43	10	86	53	34	96	77	39	15	57
74	20	2	48	70	101	83	24	26	62
79	36	12	59	45	7	88	55	31	98
85	21	28	64	71	17	4	50	67	103
90	52	33	100	76	38	14	56	42	9

⑤

1	48	69	101	82	24	30	62	73	20
11	59	44	7	87	55	35	98	78	36
27	64	75	17	3	50	66	103	84	21
32	100	80	38	13	56	41	9	89	52
68	105	81	23	29	61	72	19	5	47
43	6	86	54	34	97	77	40	15	58
74	16	2	49	70	102	83	25	26	63
79	37	12	60	45	8	88	51	31	99
85	22	28	65	71	18	4	46	67	104
90	53	33	96	76	39	14	57	42	10

⑥

1	101	69	24	82	62	30	20	73	48
11	7	44	55	87	98	35	36	78	59
27	17	75	50	3	103	66	21	84	64
32	38	80	56	13	9	41	52	89	100
68	23	81	61	29	19	72	47	5	105
43	54	86	97	34	40	77	58	15	6
74	49	2	102	70	25	83	63	26	16
79	60	12	8	45	51	88	99	31	37
85	65	28	18	71	46	4	104	67	22
90	96	33	39	76	57	14	10	42	53

⑦

1	22	69	65	82	18	30	46	73	104
11	53	44	96	87	39	35	57	78	10
27	48	75	101	3	24	66	62	84	20
32	59	80	7	13	55	41	98	89	36
68	64	81	17	29	50	72	103	5	21
43	100	86	38	34	56	77	9	15	52
74	105	2	23	70	61	83	19	26	47
79	6	12	54	45	97	88	40	31	58
85	16	28	49	71	102	4	25	67	63
90	37	33	60	76	8	14	51	42	99

⑧

1	46	69	104	82	22	30	65	73	18
11	57	44	10	87	53	35	96	78	39
27	62	75	20	3	48	66	101	84	24
32	98	80	36	13	59	41	7	89	55
68	103	81	21	29	64	72	17	5	50
43	9	86	52	34	100	77	38	15	56
74	19	2	47	70	105	83	23	26	61
79	40	12	58	45	6	88	54	31	97
85	25	28	63	71	16	4	49	67	102
90	51	33	99	76	37	14	60	42	8

⑨

1	7	69	55	82	98	30	36	73	59
11	17	44	50	87	103	35	21	78	64
27	38	75	56	3	9	66	52	84	100
32	23	80	61	13	19	41	47	89	105
68	54	81	97	29	40	72	58	5	6
43	49	86	102	34	25	77	63	15	16
74	60	2	8	70	51	83	99	26	37
79	65	12	18	45	46	88	104	31	22
85	96	28	39	71	57	4	10	7	53
90	101	33	24	76	62	14	20	42	48

⑩

1	36	69	59	82	7	30	55	73	98
11	21	44	64	87	17	35	50	78	103
27	52	75	100	3	38	66	56	84	9
32	47	80	105	13	23	41	61	89	19
68	58	81	6	29	54	72	97	5	40
43	63	86	16	34	49	77	102	15	25
74	99	2	37	70	60	83	8	26	51
79	104	12	22	45	65	88	18	31	46
85	10	28	53	71	96	4	39	67	57
90	20	33	48	76	101	14	24	42	62

⑪

1	10	69	53	82	96	30	39	73	57
11	20	44	48	89	101	35	24	78	62
27	36	75	59	3	7	66	55	84	98
32	21	80	64	13	17	41	50	89	103
68	52	81	100	29	38	72	56	5	9
43	47	86	105	34	23	77	61	15	19
74	58	2	6	70	54	83	97	26	40
79	63	12	16	45	49	88	102	31	25
85	99	28	37	71	60	4	8	67	51
90	104	33	22	76	65	14	18	42	46

⑫

1	53	69	96	82	39	30	57	73	10
11	48	44	101	89	24	35	62	78	20
27	59	75	7	3	55	66	98	85	36
32	64	80	17	13	50	41	103	89	21
68	100	81	38	29	56	72	9	5	52
43	105	86	23	34	61	77	19	15	47
74	6	2	54	70	97	83	40	26	58
79	13	12	49	45	102	88	25	31	63
85	37	28	60	71	8	4	51	67	99
90	22	33	65	76	18	14	46	42	104

⑬

1	96	69	39	82	57	30	10	73	53
11	101	44	24	89	62	35	20	78	48
27	7	75	55	3	98	66	36	84	59
32	17	80	50	13	103	41	21	89	64
68	38	81	56	29	9	72	52	5	100
43	23	86	61	34	19	77	47	15	105
74	54	2	97	70	40	83	58	26	6
79	49	12	102	45	25	88	63	31	16
85	60	28	8	71	51	4	99	67	37
90	65	33	18	76	46	14	104	42	22

⑭

1	39	69	57	82	10	30	53	73	96
11	24	44	62	89	20	35	48	78	101
27	55	75	98	3	36	66	59	84	7
32	50	80	103	13	21	41	64	89	17
68	56	81	9	29	52	72	100	5	38
43	61	86	19	34	47	77	105	15	23
74	97	2	40	70	58	83	6	26	54
79	102	12	25	45	63	88	16	31	49
85	8	28	51	71	99	4	37	67	60
90	18	33	46	76	104	14	22	42	65

⑮

1	57	69	10	82	53	30	96	73	39
11	62	44	20	89	48	35	101	78	24
27	98	75	36	3	59	66	7	84	55
32	103	80	21	13	64	41	17	89	50
68	9	81	52	29	100	72	38	5	56
43	19	86	47	34	105	77	23	15	61
74	40	2	58	70	6	83	54	26	97
79	25	12	63	45	16	88	49	31	102
85	51	28	99	71	37	4	60	67	8
90	46	33	104	76	22	14	65	42	18

⑯

1	59	69	7	82	55	30	98	73	36
11	64	44	17	89	50	35	103	78	21
27	100	75	38	3	56	66	9	84	52
32	105	80	23	13	61	41	19	89	47
68	6	81	54	29	97	72	40	5	58
43	16	86	49	34	102	77	25	15	63
74	37	2	60	70	8	83	51	26	99
79	22	12	65	45	18	88	46	31	104
85	53	28	96	71	39	4	57	67	10
90	48	33	101	76	24	14	62	42	20

6 阶完美幻方不能用此法, 因为不存在 3 阶完美幻方. 而 $n = 14, 18, 22, \cdots$ 都可以用此法构作相应阶数的完美幻方. 下面用 3 因互补法构作 18 阶完美幻方.

五、18 阶完美幻方

3 因互补方:

8	1	6	2	9	4
3	5	7	7	5	3
4	9	2	6	1	8

$a + a' = 10$

各行、各列、各对角线元素和均为: 90.

(24)

8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8
2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6
7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7
6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2
8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8
8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8
2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6
7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7
6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2
8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4	8	1	6	2	9	4
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8	4	9	2	6	1	8

1. 取一个 6 阶完美幻方

$$
B=\begin{bmatrix} 31 & 8 & 22 & 24 & 5 & 30 \\ 28 & 14 & 23 & 7 & 21 & 27 \\ 1 & 38 & 15 & 29 & 34 & 3 \\ 16 & 35 & 10 & 9 & 32 & 18 \\ 33 & 19 & 13 & 12 & 26 & 17 \\ 11 & 6 & 37 & 39 & 2 & 25 \end{bmatrix}=(b), \qquad (25)
$$

$b\in \{1,2,\cdots,39\}-\{4,20,36\}$,　　$\Sigma_6=120$.

利用结合式:　　　$a+(b-1)9$,　$a\in \{1,2,\cdots,9\}$.　　(26)

①

278	271	276	65	72	67	197	190	195	209	216	211	44	37	42	263	270	265
273	275	277	70	68	66	192	194	196	214	212	210	39	41	43	268	266	264
274	279	272	69	64	71	193	198	191	213	208	215	40	45	38	267	262	269
245	252	247	125	118	123	200	207	202	62	55	60	182	189	184	242	235	240
250	248	246	120	122	124	205	203	201	57	59	61	187	185	183	237	239	241
249	241	251	121	126	119	204	199	206	58	63	56	186	181	188	238	243	236
8	1	6	335	342	337	134	127	132	254	261	256	305	298	303	20	27	22
3	5	7	340	338	336	129	131	133	259	257	255	300	302	304	25	23	21
4	9	2	339	334	341	130	135	128	258	253	260	301	306	299	24	19	26
143	136	141	308	315	310	89	82	87	74	81	76	287	280	285	155	162	157
138	140	142	313	311	309	84	86	88	79	77	75	282	284	286	160	158	156
139	144	137	312	307	314	85	90	83	78	73	80	283	288	281	159	154	161
290	297	292	170	163	168	110	117	112	107	100	105	227	234	229	152	145	150
295	293	291	165	167	169	115	113	111	102	104	106	232	230	228	147	149	151
294	289	296	166	171	164	114	109	116	103	108	101	231	226	233	148	153	146
98	91	96	47	54	49	332	325	330	344	351	346	17	10	15	218	225	220
93	95	97	52	50	48	327	329	331	347	347	345	12	14	16	223	221	219
94	99	92	51	46	53	328	333	326	348	343	350	13	18	11	222	217	224

②

278	271	276	197	190	195	65	72	67	44	37	42	209	216	211	263	270	265
273	275	277	192	194	196	70	68	66	39	41	43	214	212	210	268	266	264
274	279	272	193	198	191	69	64	71	40	45	38	213	208	215	267	262	269
8	1	6	134	127	132	335	342	337	305	298	303	254	261	256	20	27	22
3	5	7	129	131	133	340	338	336	300	302	304	259	257	255	25	23	21
4	9	2	130	135	128	339	334	341	301	306	299	258	253	260	24	19	26
245	252	247	200	207	202	125	118	123	182	189	184	62	55	60	242	235	240
250	248	246	205	203	201	120	122	124	187	185	183	57	59	61	237	239	241
249	241	251	204	199	206	121	126	119	186	181	188	58	63	56	238	243	236
308	315	310	143	136	141	89	82	87	74	81	76	155	162	157	287	280	285
313	311	309	138	140	142	84	86	88	79	77	75	160	158	156	282	284	286
312	307	314	139	144	137	85	90	83	78	73	80	159	154	161	283	288	281
47	54	49	98	91	96	332	325	330	344	351	346	218	225	220	17	10	15
52	50	48	93	95	97	327	329	331	347	347	345	223	221	219	12	14	16
51	46	53	94	99	92	328	333	326	348	343	350	222	217	224	13	18	11
170	163	168	290	297	292	110	117	112	107	100	105	152	145	150	227	234	229
165	167	169	295	293	291	115	113	111	102	104	106	147	149	151	232	230	228
166	171	164	294	289	296	114	109	116	103	108	101	148	153	146	231	226	233

$\Sigma_{18}=3168$.

对顶互补:　各列　　$1584+1584=3168$.　各行之半和如(31)外边所列.

各对角线 $(a+a')\times 9=352\times 9=3168$.

$F=\{1,2,3,\cdots,351\}-\{28,29,\cdots,36,172,173,\cdots,180,316,317,\cdots,324\}$.　(27)

2. 取 6 阶完美幻方

B_1						B_2						B_3					
14	18	41	5	37	35	14	18	41	4	39	34	14	41	18	37	5	35
44	30	3	46	16	11	44	30	3	45	15	13	17	31	27	22	24	29
17	27	31	24	22	29	17	27	31	26	21	28	44	3	30	16	46	11
45	13	15	36	32	9	46	11	16	36	32	9	13	45	15	36	9	32
4	34	39	6	20	47	5	35	37	6	20	47	28	26	21	33	19	23
26	28	21	33	23	19	24	29	22	33	23	19	34	4	39	6	47	20

(28)

依次分别利用结合式: $a+(b-1)9$, $a\in\{1,2,\cdots,9\}$ 可得 18 阶完美幻方:

③

125	118	123	155	162	157	368	361	366	38	45	40	332	325	330	308	315	310
120	122	124	160	158	156	363	365	367	43	41	39	327	329	331	313	311	309
121	126	119	159	154	161	364	369	362	42	37	44	328	333	326	312	307	314
389	396	391	269	262	267	20	27	22	413	406	411	137	144	139	98	91	96
394	392	390	264	266	268	25	23	21	408	410	412	142	140	138	93	95	97
393	388	395	265	270	263	24	19	26	409	414	407	141	136	143	94	99	92
152	145	150	236	243	238	278	271	276	209	216	211	197	190	195	254	261	256
147	149	151	241	239	237	273	275	277	214	212	210	192	194	196	259	257	255
148	153	146	240	235	242	274	279	272	213	208	215	193	198	191	258	253	260
404	397	402	110	117	112	134	127	132	317	324	319	287	280	285	74	81	76
399	401	403	115	113	111	129	131	133	322	320	318	282	284	286	79	77	75
400	405	398	114	109	116	130	135	128	321	316	323	283	288	281	78	73	80
29	36	31	305	298	303	344	351	346	53	46	51	173	180	175	422	415	420
34	32	30	300	302	304	349	347	345	48	50	52	178	176	174	417	419	421
33	28	35	301	306	299	348	343	350	49	54	47	177	172	179	418	423	416
233	226	231	245	252	247	188	181	186	290	297	292	206	199	204	164	171	166
228	230	232	250	248	246	183	185	187	295	293	291	201	203	205	169	167	165
229	234	227	249	244	251	184	189	182	294	289	296	202	207	200	168	163	170

④

125	118	123	155	162	157	368	361	366	29	36	31	344	351	346	305	298	303
120	122	124	160	158	156	363	365	367	34	32	30	349	347	345	300	302	304
121	126	119	159	154	161	364	369	362	33	28	35	348	343	350	301	306	299
389	396	391	269	262	267	20	27	22	404	397	402	134	127	132	110	117	112
394	392	390	264	266	268	25	23	21	399	401	403	129	131	133	115	113	111
393	388	395	265	270	263	24	19	26	400	405	398	130	135	128	114	109	116
152	145	150	236	243	238	278	271	276	233	226	231	188	181	186	245	252	247
147	149	151	241	239	237	273	275	277	228	230	232	183	185	187	250	248	246
148	153	146	240	235	242	274	279	272	229	234	227	184	189	182	249	244	251
413	406	411	98	91	96	137	144	139	317	324	319	287	280	285	74	81	76
408	410	412	93	95	97	142	140	138	322	320	318	282	284	286	79	77	75
409	414	407	94	99	92	141	136	143	321	316	323	283	288	281	78	73	80
38	45	40	308	315	310	332	325	330	53	46	51	173	180	175	422	415	420
43	41	39	313	311	309	327	329	331	48	50	52	178	176	174	417	419	421
42	37	44	312	307	314	328	333	326	49	54	47	177	172	179	418	423	416
209	216	211	254	261	256	197	190	195	290	297	292	206	199	204	164	171	166
214	212	210	259	257	255	192	194	196	295	293	291	201	203	205	169	167	165
213	208	215	258	253	260	193	198	191	294	289	296	202	207	200	168	163	170

$$\Sigma_{18}=3978$$

$$\mathbf{F}=\{28,29,\cdots,54,77,78,\cdots,81,91,92,\cdots,99,109,110,\cdots,216,226,227,\cdots,333,343,344,\cdots,351,361,362,\cdots,369,388,389,\cdots,414\}. \quad (29)$$

⑤

125	118	123	368	361	366	155	162	157	332	325	330	38	45	40	308	315	310
120	122	124	363	365	367	160	158	156	327	329	331	43	41	39	313	311	309
121	126	119	364	369	362	159	154	161	328	333	326	42	37	44	312	307	314
152	145	150	278	271	276	236	243	238	197	190	195	209	216	211	254	261	256
147	149	151	273	275	277	241	239	237	192	194	196	214	212	210	259	257	255
148	153	146	274	279	272	240	235	242	193	198	191	213	208	215	258	253	260
389	396	391	20	27	22	269	262	267	137	144	139	413	406	411	98	91	96
394	392	390	25	23	21	264	266	268	142	140	138	408	410	412	93	95	97
393	388	395	24	19	26	265	270	263	141	136	143	409	414	407	94	99	92
110	117	112	404	397	402	134	127	132	317	324	319	74	81	76	287	280	285
115	113	111	399	401	403	129	131	133	322	320	318	79	77	75	282	284	286
114	109	116	400	405	398	130	135	128	321	316	323	78	73	80	283	288	281
245	252	247	233	226	231	188	181	186	290	297	292	164	171	166	206	199	204
250	248	246	228	230	232	183	185	187	295	293	291	169	167	165	201	203	205
249	244	251	229	234	227	184	189	182	294	289	296	168	163	170	202	207	200
305	298	303	29	36	31	344	351	346	53	46	51	422	415	420	173	180	175
300	302	304	34	32	30	349	347	345	48	50	52	417	419	421	178	176	174
301	306	299	33	28	35	348	343	350	49	54	47	418	423	416	177	172	179

各 18 阶完美幻方为对顶互补方.

各列　　1989+1989 = 3978.　各行之半和如(32)外边所列

各对角线　　$(a+a')\times 9 = 442\times 9 = 3978$　　(30)

在各 18 阶完美幻方中, 各 3 阶方是 3 阶幻方,不是完美幻方. 但因基本方是 6 阶完美幻方, 故所得方仍是完美幻方. 不仅如此, 它们的幻和值也组成 6 阶完美幻方.

① ②

1611	825	204	582	636	123	798	825	582	204	123	636	798	1557
1719	744	366	609	177	555	717	15	393	1014	906	771	69	1746
1422	15	1014	393	771	906	69	744	609	366	555	177	717	1449
1611	420	933	258	231	852	474	933	420	258	231	474	852	1557
1719	879	501	339	312	690	447	150	285	987	1041	663	42	1746
1422	285	150	987	1041	42	663	501	879	339	312	447	690	1449

$\Sigma_6 = 3168$　　(31)

1935	366	474	1095	123	987	933	366	474	1095	96	1041	906	2043
2043	1176	798	69	1230	420	285	1176	798	69	1203	393	339	1935
1989	447	717	825	636	582	771	447	717	825	690	555	744	1989
1935	1203	339	393	960	852	231	1230	285	420	960	852	231	2043
2043	96	906	1041	150	528	1257	123	933	987	150	528	1257	1935
1989	690	744	555	879	609	501	636	771	582	879	609	501	1989
	366	1095	474	987	123	933	2043						
1935	447	825	717	582	636	771	1989						
1989	1176	69	798	420	1230	285	1935						
2043	339	1203	393	960	231	852	2043						
1935	744	690	555	879	501	609	1989						
1989	906	96	1041	150	1257	528	1935						
2043													

$\Sigma_6 = 3978$　　(32)

第12章 偶阶平方完美幻方

完美幻方除了其各行、各列、各对角线元素和均等,以及主对角线的特优性外，若完美幻方的各行(或各列)元素之平方和均相等，则称此完美幻方是行(列)平方完美幻方. 若完美幻方既是行平方又是列平方则称它是平方完美幻方.

一、6阶平方完美幻方

在 7×7 数表中，划去中心行，中心列，余下数组成对顶互补 6 阶方:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

	66	78	81	84	72	69	
12	1	5	6	7	3	2	12
96	29	33	34	35	31	30	96
117	36	40	41	42	38	37	117
138	43	47	48	49	45	42	138
54	15	19	20	21	17	16	54
23	8	12	13	14	10	9	23
225	66	78	81	84	72	69	225

(1)

对各方分别作行 Z 变换，并计算各方之各列平方和(转置表示).

1	33	41	43	19	13	2771 + 2379	1	34	40	43	20	12	2757 + 2393
5	34	36	47	20	8	2477 + 2673	5	29	41	47	15	13	2547 + 2603
6	29	40	48	15	12	2477 + 2673	6	33	36	48	19	8	2421 + 2729
7	31	37	49	17	9	2379 + 2771	7	30	38	49	16	10	2393 + 2757
3	30	42	45	16	14	2673 + 2477	3	35	37	45	21	9	2603 + 2547
2	35	38	44	21	10	2673 + 2477	2	31	42	44	17	14	2729 + 2421

(2)

在上二方中，各行线元素平方和都等于: 5150.所以,下列完美幻方均是平方完美幻方.

①

	2771	2477	2477	2379	2673	2673	
2757	1	34	40	7	30	38	2393
2421	33	36	6	31	42	2	2729
2547	41	5	29	37	3	35	2603
2393	43	20	12	49	16	10	2757
2729	19	8	48	17	14	44	2421
2603	13	47	15	9	45	21	2547

各行，各列: 2×75 = 150
对角线: 3×50 = 150
平方和:

各行	各列
2757 + 2393 = 5150	2771 + 2379 = 5150
2421 + 2729 = 5150	2477 + 2673 = 5150
2547 + 2603 = 5150	

(3)

②

1	41	33	7	37	31
34	5	36	30	3	42
40	29	6	38	35	2
43	13	19	49	9	17
20	47	8	16	45	14
12	15	48	10	21	44

③

1	41	33	43	13	19
34	5	36	20	47	8
40	29	6	12	15	48
7	37	31	49	9	17
30	3	42	16	45	14
38	35	2	10	21	44

④

1	41	33	43	13	19
40	29	6	12	15	48
34	5	36	20	47	8
7	37	31	49	9	17
38	35	2	10	21	44
30	3	42	16	45	14

⑤

1	34	40	7	30	38
41	5	29	37	3	35
33	36	6	31	42	2
43	20	12	49	16	10
13	47	15	9	45	21
19	8	48	17	14	44

⑥

49	16	10	7	30	38
9	45	21	37	3	35
17	14	44	31	42	2
43	20	12	1	34	40
13	47	15	41	5	29
19	8	48	33	36	6

⑦

49	10	16	7	38	30
9	21	45	37	35	3
17	44	14	31	2	42
43	12	20	1	40	34
13	15	47	41	29	5
19	48	8	33	6	36

(4)

②,③,④,⑤,⑥,⑦与①一样, 幻和即各行、各列、各对角线元素和均为 150, 各行、各列平方和为 5150. 所以它们都是 6 阶平方完美幻方. 下面是平方完美幻方的基本定理.

定理 1　设有数列: $a_1,a_2,\cdots,a_r$; $b_1,b_2,\cdots,b_r$. 若 $a_i+b_i=\mathrm{L}(i=1,2,\cdots,r)$, L: 常数, 且 $\Sigma a_i=\Sigma b_i$, 则

$$\sum a_i^2=\sum b_i^2. \tag{5}$$

证明

$$\sum b_i^2=\sum[\mathrm{L}-a_i]^2=\sum[\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}a_i+a_i^2]$$
$$=r\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}\Sigma a_i+\Sigma a_i^2$$

因为

$$\Sigma a_i=\Sigma b_i,$$

且

$$\sum a_i+\sum b_i=\sum a_i+\sum(\mathrm{L}-a_i)=r\mathrm{L}.$$

所以,

$$2\Sigma a_i=r\mathrm{L}. \tag{6}$$

$$\Sigma b_i^2=r\mathrm{L}^2-r\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}+\Sigma a_i^2=\sum a_i^2.$$

定理 2　设有数列:　$a_1,a_2,\cdots,a_r$;　$b_1,b_2,\cdots,b_r$;　$a_i+b_i=\mathrm{L}$.

$$c_1,c_2,\cdots,c_r;\quad d_1,d_2,\cdots,d_r;\quad c_i+d_i=\mathrm{L}. \tag{7}$$

$$\sum a_i=\sum c_i,\quad \mathrm{L}:\text{常数},\quad i=1,2,\cdots,r.$$

则

$$\sum a_i^2+\sum d_i^2=\sum b_i^2+\sum c_i^2. \tag{8}$$

证明

$$\sum a_i^2+\sum d_i^2=\sum a_i^2+\sum[\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}c_i+c_i^2]$$
$$=\sum a_i^2+\sum c_i^2+r\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}\sum c_i;$$
$$\sum b_i^2+\sum c_i^2=\sum[\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}a_i+a_i^2]+\sum c_i^2$$
$$=\sum a_i^2+\sum c_i^2+r\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}\sum a_i.$$

因　$\Sigma a_i=\Sigma c_i$,　故定理成立.

定理 3　设有数列:　$a_1,a_2,\cdots,a_r$;　$b_1,b_2,\cdots,b_r$;　$a_i+b_i=\mathrm{L}$;

$$c_1,c_2,\cdots,c_r;\quad d_1,d_2,\cdots,d_r;\quad c_i+d_i=\mathrm{L}.$$

$(i=1,2,\cdots,r)$,且　$\Sigma a_i=\Sigma c_i$,　$\Sigma a_i^2=\Sigma c_i^2$. 则

(1)
$$\Sigma a_i^2+\Sigma b_i^2=\Sigma c_i^2+\Sigma d_i^2; \tag{9}$$

(2)
$$\Sigma a_i^3+\Sigma b_i^3=\Sigma c_i^3+\Sigma d_i^3. \tag{10}$$

证明

$$\sum a_i^2+\sum b_i^2=\sum a_i^2+\sum[\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}a_i+a_i^2]$$
$$=2\sum a_i^2+r\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}\sum a_i$$
$$=2\sum b_i^2+r\mathrm{L}^2-2\mathrm{L}\sum b_i=\sum c_i^2+\sum d_i^2.$$
$$\sum a_i^3+\sum b_i^3=\sum a_i^3+\sum[\mathrm{L}^3-3\mathrm{L}^2a_i+3\mathrm{L}a_i^2-a_i^3]$$
$$=r\mathrm{L}^3-3\mathrm{L}^2\sum a_i+3\mathrm{L}\sum a_i^2$$
$$=r\mathrm{L}^3-3\mathrm{L}^2\sum c_i+3\mathrm{L}\sum c_i^2=\sum c_i^3+\sum d_i^3.$$

由(7),(8)可得

$$\Sigma a_i^2=\Sigma b_i^2,\qquad \Sigma c_i^2=\Sigma d_i^2; \tag{11}$$

但是

$$\Sigma a_i^3+\Sigma d_i^3\neq\Sigma b_i^3+\Sigma c_i^3. \tag{12}$$

因为

$$\Sigma a_i^3+\Sigma d_i^3=\Sigma a_i^3-\Sigma c_i^3+r\mathrm{L}^3-3\mathrm{L}^2\Sigma b_i+3\mathrm{L}\Sigma b_i^2$$
$$=\Sigma a_i^3-\Sigma c_i^3+3\mathrm{L}\Sigma c_i^2-\frac{1}{2}r\mathrm{L}^3$$

$$\sum b_i^3+\sum c_i^3=\sum b_i^3-\sum a_i^3+3L\sum a_i^2-\frac{1}{2}rL^3$$

这里用到(6)式.

二、可平方完美幻方的排列

根据这些定理，为给出平方完美幻方，应找到其各行、各列之数都具有如下性质的 n 级排列 $(n=2r,\ r=3,4,5,\cdots)$:

$$\pi=(i_1,i_2,\cdots,i_r,i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_{2r}) \tag{13}$$

满足条件

(1) 前后半和相等: $i_1+i_2+\cdots+i_r=i_{r+1}+i_{r+2}+\cdots+i_{2r}$; (14)

(2) 递对互补性: $i_1+i_{r+1}=i_2+i_{r+2}=\cdots=i_r+i_{2r}=L$ (常数); (15)

$i_j\in$ {正整数}, $j=1,2,\cdots,2r$.

并以这些数列为分段方的行、列序构作总值相等的对顶互补方阵. 即，只要确定方阵的第一行、第一列元素的排列就容易了. 分两种情形:

1. 当 n 为双 2 因数, $n=4k(k=2,3,4,\cdots)$时,

$$1+2+3+\cdots+n=2\times k(4k+1) \tag{16}$$

因此，可直接把 $1,2,3,\cdots,n$ 组成满足条件的排列(15). 如

① $n=8$ 时,

```
1  2  3  4          1  7  6  4      和
8  7  6  5   ──→    8  2  3  5      18
```

π: (1,4,6,7; 8,5,3,2) (17)

② $n=12$:

```
 1  2  3  4  5  6          1  11   3  9  8  7     和
12 11 10  9  8  7   ──→   12   2  10  4  5  6     39
```

π: (1,3,7,8,9,11; 12,10,6,5,4,2) (18)

③ $n=16$:

```
 1  2  3  4  5  6  7  8
16 15 14 13 12 11 10  9
  ──→   1 15 14  4 12  6  7  9     和
       16  2  3 13  5 11 10  8     68
```

π_1: (1,4,6,7,9,12,14,15;16,13,11,10,8,5,3,2)

π_2: (1,4,5,8,10,11,14,15;16,13,12,9,7,6,3,2)

π_3: (1,3,6,8,10,12,13,15;16,14,11,9,7,5,4,2) (19)

2. 当 n 为单 2 因数 $n=2k(2k+1),\ (k=1,2,3,\cdots)$时,

$$1+2+3+\cdots+n=k[2k(2k+1)+1](2k+1) \tag{20}$$

不能直接将 $1,2,\cdots,n$ 等分为两部分，应扩大排列再删去一些数而得. 如

④ $n=6$: (1,2,3,4,5,6,7)删去 4

```
1  2  3
7  6  5  ──→  π: (1,5,6; 7,3,2),  (如前面的例)
```
(21)

⑤ $n=10$: (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)删去 7 ──→

```
 1  2  3  4  5  6
13 12 11 10  9  8
```

再删去一个偶数数对，可得

π_1: (1,5,8,10,11; 13, 9,6,4,3)　删去 2: 12

π_2: (1,5,6,11,12; 13, 9,8,3,2)　删去 4: 10

π_3: (1,3,9,10,12; 13,11,5,4,2)　删去 6: 8　(22)

⑥ $n=14$

1	2	3	4	5	6	7	和
15	14	13	12	11	10	9	56

π_1: (1,4,6, 7,11,13,14; 15,12,10,9,5,3,2)

π_2: (1,4,5, 9,10,13,14; 15,12,11,7,6,3,2)

π_3: (1,3,6, 9,11,12,14; 15,13,10,7,5,4,2)

π_4: (1,2,7,10,11,12,13; 15,14, 9,6,5,4,3)　(23)

⑦ $n=18$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	20	19	18	17	16	15	14	13	12

再删去一个偶数数对，下面几个排列都是删去 2: 20

π_1: (1,4,7, 9,12,14,16,17,19; 21,18,15,13,10,8,6,5,3)

π_2: (1,5,6, 9,12,14,15,18,19; 21,17,16,13,10,8,7,4,3)

π_3: (1,5,7,,8,12,13,16,18,19; 21,17,15,14,10,9,6,4,3)

π_4: (1,3,6,12,13,14,15,17,18; 21,19,16,10, 9,8,7,5,4)

π_5: (1,3,8,,9,12,15,16,17,18; 21,19,14,13,10,7,6,5,4)

π_6: (1,3,7,10,13,14,16,17,18; 21,19,15,12, 9,8,6,5,4)　(24)

各排列之前半部除位置 1 外，其余各数还有各种排列，因而可平方化的排列还有很多.

三、6、8 阶平方完美幻方

1. $n=6$，取 9×9 方阵:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

A						Σ
1	6	8	9	4	2	15
46	51	53	54	49	47	150
64	69	71	72	67	65	204
73	78	80	81	76	74	231
28	33	35	36	31	29	96
10	15	17	18	13	11	42
111	126	132	135	120	114	369

(25)

划去第 3,5,7 行和列，余下 36 个可用来编制平方的 6 阶完美幻方($a+a'=82$).

B_1								B_2							
1	51	71	73	33	17	7643	6707	1	53	69	73	35	15	7571	6779
6	53	64	78	36	10	6941	7409	6	46	71	78	28	17	7193	7157
8	46	69	80	28	15	6941	7409	8	51	64	80	33	10	6761	7589
9	49	65	81	31	11	6707	7643	9	47	67	81	29	13	6779	7571
4	47	72	76	29	18	7409	6941	4	54	65	76	36	11	7157	7193
2	54	67	74	36	13	7409	6941	2	49	72	74	31	18	7589	6761

各行和: 123 +123，平方和: 14350 = 7643 + 6707 = 6941 + 7409
= 7571 + 6779 = 7193 + 7157 = 6761 + 7589

(26)

据此，可给出 6 阶平方完美幻方：

6 阶平方完美幻方 (27)

①

1	53	69	9	47	67
51	64	8	49	72	2
71	6	46	65	4	54
73	35	15	81	29	13
33	10	80	31	18	74
17	78	28	11	76	36

②

1	71	51	9	65	49
53	6	64	47	4	72
69	46	8	67	54	2
73	17	33	81	11	31
35	78	10	29	76	18
15	28	80	13	36	74

各行，各列和：
123×2＝246
平方和：14350

各对角线：
82×3＝246

③

1	69	53	9	67	47
51	8	64	49	2	72
71	46	6	65	54	4
73	15	35	81	13	29
33	80	10	31	74	18
17	28	78	11	36	76

④

51	71	1	49	65	9
64	6	53	72	4	47
8	46	69	2	54	67
33	17	73	31	11	81
10	78	35	18	76	29
80	28	15	74	36	13

⑤

1	71	51	73	17	33
53	6	64	35	78	10
69	46	8	15	28	80
9	65	49	81	11	31
47	4	72	29	76	18
67	54	2	13	36	74

2. $n=8$, (1,4,6,7; 8,5,3,2) $\Sigma_8=260$.

1	9	17	25	33	41	49	57
2	10	18	26	34	42	50	58
3	11	19	27	35	43	51	59
4	12	20	28	36	44	52	60
5	13	21	29	37	45	53	61
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63
8	16	24	32	40	48	56	64

A (28)

								Σ
1	25	41	49	57	33	17	9	116
4	28	44	52	60	36	20	12	128
6	30	46	54	62	38	22	14	136
7	31	47	55	63	39	23	15	140
8	32	48	56	64	40	24	16	144
5	29	45	53	61	37	21	13	132
3	27	43	51	59	35	19	11	124
2	26	42	50	58	34	18	10	120
18	114	178	210	242	146	82	50	520

A_0 $\Sigma_8=4\times65=260$

1	25	41	49	64	40	24	16	260	11236	546260
4	28	44	52	61	37	21	13	260	11140	536900
6	30	46	54	59	35	19	11	260	11156	538460
7	31	47	55	58	34	18	10	260	11188	541580
8	32	48	56	57	33	17	9	260	11236	546260
5	29	45	53	60	36	20	12	260	11140	536900
3	27	43	51	62	38	22	14	260	11156	538460
2	26	42	50	63	39	23	15	260	11188	541580

A_1 $\Sigma_8=4\times65=260$

1	4	6	7	64	61	59	58	260	14764	890240	54060868
25	28	30	31	40	37	35	34	260	8620	291200	
41	44	46	47	24	21	19	18	260	9644	391040	
49	52	54	55	16	13	11	10	260	11692	590720	
8	5	3	2	57	60	62	63	260	14764	890240	54050116
32	29	27	26	33	36	38	39	260	8620	291200	
48	45	43	42	17	20	22	23	260	9644	391040	
56	53	51	50	9	12	14	15	260	11692	590720	

① $\Sigma_8=2\times130=260$ 2 次和 11180

1	55	28	46	8	50	29	43	5926 +5254
31	41	6	52	26	48	3	53	5382 +5798
44	30	49	7	45	27	56	2	5286 +5894
34	4	47	25	51	5	42	32	5766 +5414
57	15	36	22	64	10	37	19	5254 +5926
39	17	62	12	34	24	59	13	5798 +5382
20	38	9	63	21	35	16	58	5894 +5286
14	60	23	33	31	61	18	40	5414 +5766

5366 5558 5750 5686
5814 5622 5430 5494

② 2 次和 11180

1	55	30	44	8	50	27	45	5862+5318
31	41	4	54	26	48	5	51	5574+5606
52	6	47	25	53	3	42	32	5574+5606
46	28	49	7	43	29	56	2	5350+5830
57	15	38	20	64	10	35	21	5318+5862
39	17	60	14	34	24	61	11	5606+5574
12	62	23	33	13	59	18	40	5606+5574
22	36	9	63	19	37	16	58	5830+5350

5398 5654 5654 5654 +
5782 5526 5526 5526 ＝11180

③ $\Sigma_8=2\cdot130=260$ 2 次和 11180									④ 2 次和 11180								
1	55	47	28	8	51	42	29	5910+5270	1	55	47	28	57	14	23	36	5910+5270
31	44	49	6	26	45	56	3	5334+5846	31	44	49	6	39	20	9	62	5334+5846
52	7	30	41	53	2	27	48	5334+5846	52	7	30	41	12	63	38	17	5334+5846
46	25	4	55	43	32	5	50	5782+5398	46	25	4	55	22	33	60	15	5782+5398
57	14	23	36	64	11	18	37	5270+5910	8	51	42	29	64	11	18	37	5270+5910
39	20	9	62	34	21	16	59	5846+5334	26	45	56	3	34	21	16	59	5846+5334
12	63	38	17	13	58	3	24	5846+5334	53	2	27	48	13	58	3	24	5846+5334
22	33	60	15	19	40	61	10	5398+5782	43	32	5	50	19	40	61	10	5398+5782
5398 5782	5654 5526	5654 5526	5654 5526						5398 5782	5654 5526	5654 5526	5654 + 5526	= 11180				

这里①, ②, ③, ④ 4 方都是对顶互补的, 而且

各行、各列元素和: $\Sigma_8=130+130=260$; 各对角线: $\Sigma_8=65\times4=260$.

各行、各列平方和: 11180.

但若完美幻方以 A_0, A_1 为对角线组, 各对角线的 2 次和均不等于 11180.

1	30	55	44	45	50	27	8	⑤	1	28	46	55	50	43	29	8	⑤
31	4	41	54	51	48	5	26		44	49	7	30	27	2	56	45	
52	47	6	25	53	3	42	32	A_1	54	47	25	4	5	32	42	51	A_0
46	28	49	7	2	29	56	43		31	6	52	41	48	53	3	26	
22	9	36	63	58	37	16	19	260	39	62	12	17	24	13	59	34	260
12	23	62	33	40	59	18	13	14764	14	23	33	60	61	40	18	11	11236
39	60	17	14	11	24	61	34	890240	20	9	63	38	35	58	16	21	546260
57	38	15	20	21	10	35	64		57	36	22	15	10	19	37	64	
31	6	44	49	56	45	3	26	⑥	52	47	6	25	32	3	42	53	⑥
1	28	54	47	42	51	29	8		31	4	41	54	51	48	5	26	
46	55	25	4	5	32	50	43		46	49	28	7	2	29	56	43	
52	41	7	30	27	2	48	53		1	30	55	44	45	50	27	8	
12	17	63	38	35	58	24	13	260	57	38	15	20	21	10	35	64	260
22	15	33	60	61	40	10	19	8620	22	9	36	63	58	37	16	19	11140
57	36	14	23	18	11	37	64	291200	39	60	15	14	11	24	61	34	536900
39	62	20	9	16	21	59	34		12	23	62	33	40	59	18	13	
46	55	25	4	5	32	50	43	⑦	46	55	25	4	5	32	50	43	⑦
52	41	7	30	27	2	48	53		31	6	44	49	56	45	3	26	
31	6	44	49	56	45	3	26		1	28	54	47	42	51	29	8	
1	28	54	47	42	51	29	8		52	41	7	30	27	2	48	53	
57	36	14	23	18	11	37	64	260	12	17	63	38	35	58	24	13	260
39	62	20	9	16	21	59	34	9644	57	36	14	23	18	11	37	64	11156
12	17	63	38	35	58	24	13	391040	39	62	20	9	16	21	59	34	538460
22	15	33	60	61	40	10	19		22	15	33	60	61	40	10	19	
52	41	7	30	27	2	48	53	⑧	31	6	44	49	56	45	3	26	⑧
46	55	25	4	5	32	50	43		46	55	25	4	5	32	50	43	
1	28	54	47	42	51	29	8		52	41	7	30	27	2	48	53	
31	6	44	49	56	45	3	26		1	28	54	47	42	51	29	8	
39	62	20	9	16	21	59	34	260	57	36	14	23	18	11	37	64	260
57	36	14	23	18	11	37	64	11692	12	17	63	38	35	58	24	13	11188
22	15	33	60	61	40	10	19	590720	22	15	33	60	61	40	10	19	541580
12	17	63	38	35	58	24	13		39	62	20	9	16	21	59	34	

各3次特优的8阶平方完美幻方还有一些变换，如																
1	28	46	55	50	43	29	8		1	28	54	47	42	51	29	8
31	6	52	41	48	53	3	26		31	6	44	49	56	45	3	26
44	49	7	30	27	2	56	45		52	41	7	30	27	2	48	53
54	47	25	4	5	32	42	51		46	55	25	4	5	32	50	43
14	23	33	60	61	40	18	11	260	22	15	33	60	61	40	10	19
20	9	63	38	35	58	16	21	14764	12	17	63	38	35	58	24	13
39	62	12	17	24	13	59	34	890240	39	62	20	9	16	21	59	34
57	36	22	15	10	19	37	64		57	36	14	23	18	11	37	64
4	47	25	54	51	32	42	5		4	55	25	46	43	32	50	5
41	6	52	31	26	53	3	48		49	6	44	31	26	45	3	56
30	49	7	44	45	2	56	27		30	41	7	52	53	2	48	27
55	28	46	1	8	43	29	50		47	28	54	1	8	51	29	42
15	36	22	57	64	19	37	10	260	23	36	14	57	64	11	37	18
38	9	63	20	21	58	16	35	14764	38	17	63	12	13	58	24	35
17	62	12	39	34	13	59	24	890240	9	62	20	39	34	21	59	16
60	23	33	14	11	40	18	61		60	15	33	22	19	40	10	61
4	25	47	54	51	42	32	5		4	25	55	46	43	50	32	5
30	7	49	44	45	56	2	27		30	7	41	52	53	48	2	27
41	52	6	31	26	3	53	48		49	44	6	31	26	3	45	56
55	46	28	1	8	29	43	50		47	54	28	1	8	29	51	42
15	22	36	57	64	37	19	10	260	23	14	36	57	64	37	11	18
17	12	62	39	34	59	13	24	14764	9	20	62	39	34	59	21	16
38	63	9	20	21	16	58	35	890240	38	63	17	12	13	24	58	35
60	33	23	14	11	18	40	61		60	33	15	22	19	10	40	61

四、10阶特优的平方完美幻方

例1　由等值排列(1,5,8,10,11；13,9,6,4,3)，有数表：

1	*2*	3	4	5	6	*7*	8	9	10	11	*12*	13
14	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
27	*28*	29	30	31	32	*33*	34	35	36	37	*38*	39
40	*41*	42	43	44	45	*46*	47	48	49	50	*51*	52
53	*54*	55	56	57	58	*59*	60	61	62	63	*64*	65
66	*67*	68	69	70	71	*72*	73	74	75	76	*77*	78
79	*80*	*81*	*82*	*83*	*84*	*85*	*86*	*87*	*88*	*89*	*90*	*91*
92	*93*	94	95	96	97	*98*	99	100	101	102	*103*	104
105	*106*	107	108	109	110	*111*	112	113	114	115	*116*	117
118	*119*	120	121	122	123	*124*	125	126	127	128	*129*	130
131	*132*	133	134	135	136	*137*	138	139	140	141	*142*	143
144	*145*	*146*	*147*	*148*	*149*	*150*	*151*	*152*	*153*	*154*	*155*	*156*
157	*158*	159	160	161	162	*163*	164	165	166	167	*168*	169

(29)

删去斜体的第2, 7, 12行、列数字，余下100个数字进而可组成中心对称的等值5阶方，再对各5阶方之各行各列的元素和及各次和进行计算得：

PA_0					$P'A_0$					次和 1	2	3
1	5	8	10	11	159	160	162	165	169	850	133222	21689110
53	57	60	62	63	107	108	110	113	117	850	79142	7898710
92	96	99	101	102	68	69	71	74	78	850	74072	6605860
118	122	125	127	128	42	43	45	48	52	850	87592	10053460
131	135	138	140	141	29	30	32	35	39	850	99422	13070110
QA_0					$Q'A$							
27	31	34	36	37	133	134	136	139	143	850	99422	13070110
40	44	47	49	50	120	121	123	126	130	850	87592	10053460
66	70	73	75	76	94	95	97	100	104	850	74072	6605860
105	109	112	114	115	55	56	58	61	65	850	79142	7898710
157	161	164	166	167	3	4	6	9	13	850	133222	21689110
PA_1					$P'A_1$							
1	53	92	118	131	169	117	78	52	39	850	94918	11921590
5	57	96	122	135	165	113	74	48	35	850	94598	11839990
8	60	99	125	138	162	110	71	45	32	850	94568	11832340
10	62	101	127	140	160	108	69	43	30	850	94648	11852740
11	63	102	128	141	159	107	68	42	29	850	94718	11870590
QA_1					$Q'A_1$							
3	55	94	120	133	167	115	76	50	37	850	94718	11870590
4	56	95	121	134	166	114	75	49	36	850	94648	11852740
6	58	97	123	136	164	112	73	47	34	850	94568	11832340
9	61	100	126	139	161	109	70	44	31	850	94598	11839990
13	65	104	130	143	157	105	66	40	27	850	94918	11921590

PB_4					$Q'B_4$					$\Sigma_{10} = 2\times425 = 5\times170 = 850$
10	63	92	122	138	164	114	76	40	31	48229+46461
11	53	96	125	140	161	112	75	50	27	47319+47371 11850190
1	57	99	127	141	157	109	73	49	37	45629+49061
5	60	101	128	131	167	105	70	47	36	47319+47371 11850190
8	62	102	118	135	166	115	66	44	34	48229+46461
QB_4					$P'B_4$					2 次和 94690
6	56	94	130	139	160	107	78	48	32	46461+48229
9	58	95	120	143	159	117	74	45	30	47371+47319 11876710
13	61	97	121	133	169	113	71	43	29	49061+45629
3	65	100	123	134	165	110	69	42	39	47371+47319 11876710
4	55	104	126	136	162	108	68	52	35	46461+48229

PB_1					$Q'B_1$					$\Sigma_{10} = 2\times425 = 5\times170 = 850$
1	63	101	125	135	157	115	75	47	31	46669+48021
5	53	102	127	138	161	105	76	49	34	46279+48411
8	57	92	128	140	164	109	66	50	36	46929+47761
10	60	96	118	141	166	112	70	40	37	47969+46721
11	62	99	122	131	167	114	73	44	27	48879+45811
QB_1					$P'B_1$					2 次和 94690
13	55	95	123	139	169	107	69	45	35	48021+46669
9	65	94	121	136	165	117	68	43	32	48411+46279
6	61	104	120	134	162	113	78	42	30	47761+46929
4	58	100	130	133	160	110	74	52	29	46721+47969
3	56	97	126	143	159	108	71	48	39	45811+48879

P B$_2$					***Q' B***$_2$					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
1	62	96	128	138	157	114	70	50	34	46201+48489
5	63	99	118	140	161	115	73	40	36	47371+47319 11876710
8	53	101	122	141	164	105	75	44	37	46851+47839
10	57	102	125	131	166	109	76	47	27	48151+46539
11	60	92	127	135	167	112	66	49	31	48151+46539
Q B$_2$					***P' B***$_2$					2 次和 94690
13	56	100	120	136	169	108	74	42	32	48489+ 46201
9	55	97	130	134	165	107	71	52	30	47319+47371 11850190
6	65	95	126	133	162	117	69	48	29	47839+46851
4	61	94	123	143	160	113	68	45	39	46539+48151
3	58	104	121	139	159	110	78	43	35	46539+48151
P B$_3$					***Q' B***$_3$					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
1	60	102	122	140	157	112	76	44	36	46201+48489
5	62	92	125	141	161	114	66	47	37	46851+47839
8	63	96	127	131	164	115	70	49	27	48151+46539
10	53	99	128	135	166	105	73	50	31	47371+47319 11876710
11	57	101	118	138	167	109	75	40	34	48151+46539
Q B$_3$					***P' B***$_3$					2 次和 94690
13	58	94	126	134	169	110	68	48	30	48489+46201
9	56	104	123	133	165	108	78	45	29	47839+46851
6	55	100	121	143	162	107	74	43	39	46539+48151
4	65	97	120	139	160	117	71	42	35	47319+47371 11850190
3	61	95	130	136	159	113	69	52	32	46539+48151

据此，由 A_0, A_1 可得下列 10 个主对角线不同的 3 次特优的 10 阶完美幻方. 再有，这里的 B_1, B_2, B_3, B_4 是对各方中各 P, Q 执行的 Z 变换. 并配对又各有 2 个 3 次特优的 10 阶完美幻方. 再以列和方 B_4 为行线组，分别配以 B_1, B_2, B_3 作列线组可得 10 阶平方完美完方，即方的各行各列的元素和、平方和都分别相等为 94690. 但与 A_0, A_1 各线的平方和均不等.

下面就是这 10 个 3 次特优的 10 阶完美幻方:

1	57	99	127	141	3	56	97	126	**143**	①
63	**92**	122	138	10	134	6	61	**104**	120	
101	128	**131**	5	60	123	139	**13**	55	95	A_1
125	140	11	**53**	96	100	**130**	133	4	58	
135	8	62	102	**118**	**65**	94	121	136	9	
161	34	49	76	**105**	**52**	68	108	162	35	850
112	166	37	**40**	70	74	**117**	159	30	45	94918
75	115	**157**	31	47	110	165	**39**	42	69	11921590
50	**66**	109	164	36	160	32	48	**78**	107	
27	44	73	114	167	29	43	71	113	**169**	
135	8	62	102	118	65	94	121	136	**9**	②
1	**57**	99	127	141	3	56	97	**126**	143	
63	92	**122**	138	10	134	6	**61**	104	120	A_1
101	128	131	**5**	60	123	**139**	13	55	95	
125	140	11	53	**96**	**100**	130	133	4	58	
112	166	37	40	**70**	**74**	117	159	30	45	850
75	115	157	**31**	47	110	**165**	39	42	69	94598
50	66	**109**	164	36	160	32	**48**	78	107	11839990
27	**44**	73	114	167	29	43	71	**113**	169	
161	34	49	76	105	52	68	108	162	**35**	

125	140	11	53	96	100	130	133	4	**58**	③
135	**8**	62	102	118	65	94	121	**136**	9	
1	57	**99**	127	141	3	56	**97**	126	143	A_1
63	92	122	**138**	10	134	**6**	61	104	120	
101	128	131	5	**60**	**123**	139	13	55	95	850
75	115	157	31	**47**	**110**	165	39	42	69	94568
50	66	109	**164**	36	160	**32**	48	78	107	11832340
27	44	**73**	114	167	29	43	**71**	113	169	
161	**34**	49	76	105	52	68	108	**162**	35	
112	166	37	40	70	74	117	159	30	**45**	

101	128	131	5	60	123	139	13	55	**95**	④
125	**140**	11	53	96	100	130	133	**4**	58	
135	8	**62**	102	118	65	94	**121**	136	9	A_1
1	57	99	**127**	141	3	**56**	97	126	143	
63	92	122	138	**10**	**134**	6	61	104		
120		850								
50	66	109	164	**36**	**160**	32	48	78	107	94648
27	44	73	**114**	167	29	**43**	71	113	169	11852740
161	34	**49**	76	105	52	68	**108**	162	35	
112	**166**	37	40	70	74	117	159	**30**	45	
75	115	157	31	47	110	165	39	42	**69**	

63	92	122	138	10	134	6	61	104	**120**	⑤
101	**128**	131	5	60	123	139	13	**55**	95	
125	140	**11**	53	96	100	130	**133**	4	58	A_1
135	8	62	**102**	118	65	**94**	121	136	9	
1	57	99	127	**141**	**3**	56	97	126	143	850
27	44	73	114	**167**	**29**	43	71	113	169	94718
161	34	49	**76**	105	52	**68**	108	162	35	11870590
112	166	**37**	40	70	74	117	**159**	30	45	
75	**115**	157	31	47	110	165	39	**42**	69	
50	66	109	164	36	160	32	48	78	**107**	

1	57	99	127	141	65	94	121	136	9	⑥
135	**8**	62	102	118	100	130	133	4	58	
125	140	**11**	53	96	123	139	13	55	95	A_0
101	128	131	**5**	60	134	6	61	104	120	
63	92	122	138	**10**	**3**	56	97	126	143	850
27	44	73	114	**167**	**160**	32	48	78	107	133222
50	66	109	**164**	36	110	**165**	39	42	69	21689110
75	115	**157**	31	47	74	117	**159**	30	45	
112	**166**	37	40	70	52	68	108	**162**	35	
161	34	49	76	105	29	43	71	113	**169**	

63	92	122	138	10	100	130	133	4	**58**	⑦
1	**57**	99	127	141	123	139	13	**55**	95	
135	8	**62**	102	118	134	6	**61**	104	120	A_0
125	140	11	**53**	96	3	**56**	97	126	143	
101	128	131	5	**60**	**65**	94	121	136	9	850
161	34	49	76	**105**	**110**	165	39	42	69	79142
27	44	73	**114**	167	74	**117**	159	30	45	7898710
50	66	**109**	164	36	52	68	**108**	162	35	
75	**115**	157	31	47	29	43	71	**113**	169	
112	166	37	40	70	160	32	48	78	**107**	

101	128	131	5	60	123	139	13	55	95	⑧
63	**92**	122	138	10	134	6	61	**104**	120	
1	57	**99**	127	141	3	56	**97**	126	143	A_0
135	8	62	**102**	118	65	**94**	121	136	9	
125	140	11	53	**96**	**100**	130	133	4	58	850
112	166	37	40	**70**	**74**	117	159	30	45	74072
161	34	49	**76**	105	52	**68**	108	162	35	6605860
27	44	**73**	114	167	29	43	**71**	113	169	
50	**66**	109	164	36	160	32	48	**78**	107	
75	115	157	31	47	110	165	39	42	**69**	

125	140	11	53	96	134	6	61	104	**120**	⑨
101	**128**	131	5	60	3	56	97	**126**	143	
63	92	**122**	138	10	65	94	**121**	136	9	A_0
1	57	99	**127**	141	100	**130**	133	4	58	
135	8	62	102	**118**	**123**	139	13	55	95	850
75	115	157	31	**47**	**52**	68	108	162	35	87592
112	166	37	**40**	70	29	**43**	71	113	169	10053460
161	34	**49**	76	105	160	32	**48**	78	107	
27	**44**	73	114	167	110	165	39	**42**	69	
50	66	109	164	36	74	117	159	30	**45**	

135	8	62	102	118	3	56	97	126	**143**	⑩
125	**140**	11	53	96	65	94	121	**136**	9	
101	128	**131**	5	60	100	130	**133**	4	58	A_0
63	92	122	**138**	10	123	**139**	13	55	95	
1	57	99	127	**141**	**134**	6	61	104	120	850
50	66	109	164	**36**	**29**	43	71	113	169	99422
75	115	157	**31**	47	160	**32**	48	78	107	13070110
112	166	**37**	40	70	110	165	**39**	42	69	
161	**34**	49	76	105	74	117	159	**30**	45	
27	44	73	114	167	52	68	108	162	**35**	

3 次特优的 10 阶平方完美幻方

平方完美幻方的构作方法是:

1. 条件　在各列和方中, 至少有一个是各列平方和对称相等的. 这里 B_4 等就是这类含有 P, Q 两个半 2 次和对称相等之方. 通过适当调整使 P, Q 部分的 2 次和相等的次序相同, 即可得到方中各线的 2 次和均对应对称相等.选取其一作为完美幻方的行列线(或列线组). 再配以另一个具有同类性质的列和方为列列线(或行线组), 就可得到平方完美幻方;

2. 若方阵的行或列线组中无 B_1, B_4 这类列和方, 即未含有 P, Q 两个半 2 次和对称相等之方. 则由此分段方不可能给出行和列都具有平方性的平方完美幻方. 或只能给出行或列的平方完美幻方;

3. 以 A_0 或 A_1 为对角线组, 并检查主对角线的特优性, 并在 1 或 2 的条件下, 可得特优的平方完美幻方或行或列平方完美幻方.

下面就是 10 个 3 次特优的 10 阶平方完美幻方, 另外还有 4 个 3 次特优的 10 阶行或列平方完美幻方.

3 次特优的 10 阶平方完美幻方
行 B_2 列 B_4 之各线

$\Sigma_{10} = 2\times425 = 5\times170 = 850$　　2 次和 = 94690

①

5	63	99	118	140	36	40	73	115	161
131	10	57	102	125	47	76	109	166	27
128	138	1	62	96	70	114	157	34	50
101	122	141	8	53	105	164	37	44	75
60	92	127	135	11	167	31	49	66	112
134	130	97	55	9	165	107	71	52	30
123	94	61	4	143	39	160	113	68	45
100	56	13	136	120	42	32	169	108	74
65	6	133	126	95	69	48	29	162	117
3	139	121	104	58	110	78	43	35	159

A_0
850
133222
21689110

②

60	92	127	135	11	167	31	49	66	112
5	63	99	118	140	36	40	73	115	161
131	10	57	102	125	47	76	109	166	27
128	138	1	62	96	70	114	157	34	50
101	122	141	8	53	105	164	37	44	75
3	139	121	104	58	110	78	43	35	159
134	130	97	55	9	165	107	71	52	30
123	94	61	4	143	39	160	113	68	45
100	56	13	136	120	42	32	169	108	74
65	6	133	126	95	69	48	29	162	117

A_0
850
79142
7898710

③

128	138	1	62	96	70	114	157	34	50
101	122	141	8	53	105	164	37	44	75
60	92	127	135	11	167	31	49	66	112
5	63	99	118	140	36	40	73	115	161
131	10	57	102	125	47	76	109	166	27
100	56	13	136	120	42	32	169	108	74
65	6	133	126	95	69	48	29	162	117
3	139	121	104	58	110	78	43	35	159
134	130	97	55	9	165	107	71	52	30
123	94	61	4	143	39	160	113	68	45

A_0
850
87592
10053460

④

101	122	141	8	53	105	164	37	44	75
60	92	127	135	11	167	31	49	66	112
5	63	99	118	140	36	40	73	115	161
131	10	57	102	125	47	76	109	166	27
128	138	1	62	96	70	114	157	34	50
65	6	133	126	95	69	48	29	162	117
3	139	121	104	58	110	78	43	35	159
134	130	97	55	9	165	107	71	52	30
123	94	61	4	143	39	160	113	68	45
100	56	13	136	120	42	32	169	108	74

A_0
850
74072
6605860

⑤

131	10	57	102	125	47	76	109	166	27
128	138	1	62	96	70	114	157	34	50
101	122	141	8	53	105	164	37	44	75
60	92	127	135	11	167	31	49	66	112
5	63	99	118	140	36	40	73	115	161
123	94	61	4	143	39	160	113	68	45
100	56	13	136	120	42	32	169	108	74
65	6	133	126	95	69	48	29	162	117
3	139	121	104	58	110	78	43	35	159
134	130	97	55	9	165	107	71	52	30

A_0
850
99422
13070110

131	10	57	102	125	47	76	109	166	**27**	①
60	**92**	127	135	11	167	31	49	**66**	112	
128	138	**1**	62	96	70	114	**157**	34	50	A_1
5	63	99	**118**	140	36	**40**	73	115	161	850
101	122	141	8	**53**	**105**	164	37	44	75	94918
123	94	61	4	**143**	**39**	160	113	68	45	11921590
3	139	121	**104**	58	110	**78**	43	35	159	
100	56	**13**	136	120	42	32	**169**	108	74	
134	**130**	97	55	9	165	107	71	**52**	30	
65	6	133	126	95	69	48	29	162	**117**	
5	63	99	118	140	36	40	73	115	**161**	②
101	**122**	141	8	53	105	164	37	**44**	75	
131	10	**57**	102	125	47	76	**109**	166	27	A_1
60	92	127	**135**	11	167	**31**	49	66	112	850
128	138	1	62	**96**	**70**	114	157	34	50	94598
134	130	97	55	**9**	**165**	107	71	52	30	11839990
65	6	133	**126**	95	69	**48**	29	162	117	
123	94	**61**	4	143	39	160	**113**	68	45	
3	**139**	121	104	58	110	78	43	**35**	159	
100	56	13	136	120	42	32	169	108	**74**	
101	122	141	8	53	105	164	37	44	**75**	③
131	**10**	57	102	125	47	76	109	**166**	27	
60	92	**127**	135	11	167	31	**49**	66	112	A_1
128	138	1	**62**	96	70	**114**	157	34	50	850
5	63	99	118	**140**	**36**	40	73	115	161	94648
65	6	133	126	**95**	**69**	48	29	162	117	11852740
123	94	61	**4**	143	39	**160**	113	68	45	
3	139	**121**	104	58	110	78	**43**	35	159	
100	**56**	13	136	120	42	32	169	**108**	74	
134	130	97	55	9	165	107	71	52	**30**	
60	92	127	135	11	167	31	49	66	**112**	④
128	**138**	1	62	96	70	114	157	**34**	50	
5	63	**99**	118	140	36	40	**73**	115	161	A_1
101	122	141	**8**	53	105	**164**	37	44	75	850
131	10	57	102	**125**	**47**	76	109	166	27	84568
3	139	121	104	**58**	**110**	78	43	35	159	11832340
100	56	13	**136**	120	42	**32**	169	108	74	
134	130	**97**	55	9	165	107	**71**	52	30	
65	**6**	133	126	95	69	48	29	**162**	117	
123	94	61	4	143	39	160	113	68	**45**	
128	138	1	62	96	70	114	157	34	**50**	⑤
5	**63**	99	118	140	36	40	73	**115**	161	
101	122	**141**	8	53	105	164	**37**	44	75	A_1
131	10	57	**102**	125	47	**76**	109	166	27	850
60	92	127	135	**11**	**167**	31	49	66	112	94718
100	56	13	136	**120**	**42**	32	169	108	74	11870590
134	130	97	**55**	9	165	**107**	71	52	30	
65	6	**133**	126	95	69	48	**29**	162	117	
123	**94**	61	4	143	39	160	113	**68**	45	
3	139	121	104	58	110	78	43	35	**159**	

类似对列 B_4，行 B_3 可得相应的完美幻方.

3 次特优的 10 阶列平方完美幻方

列 $\boldsymbol{B}_2$ $\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$ 2 次和 94690

128	140	8	57	92	70	40	37	166	**112**	①
62	**99**	122	131	11	114	73	44	**27**	167	
138	5	**53**	102	127	157	115	**75**	47	31	对角线组
96	118	141	**10**	60	34	**161**	105	76	49	$\boldsymbol{B}_3$ $\boldsymbol{B}_4$
1	63	101	125	**135**	**50**	36	164	109	66	
100	130	133	4	**58**	**42**	30	162	113	78	850
56	97	126	**143**	3	108	**71**	48	39	159	47319
13	55	**95**	123	139	32	165	**117**	68	43	11850190
136	**9**	65	94	121	74	52	29	**160**	110	
120	134	6	61	104	169	107	69	45	**35**	

96	118	141	10	60	157	115	75	47	**31**	②
128	**140**	8	57	92	70	40	37	**166**	112	
138	5	**53**	102	127	34	161	**105**	76	49	对角线组
1	63	101	**125**	135	114	**73**	44	27	167	$\boldsymbol{B}_3$ $\boldsymbol{B}_4$
62	99	122	131	**11**	**50**	36	164	109	66	
13	55	95	123	**139**	**74**	52	29	160	110	850
100	130	133	**4**	58	42	**30**	162	113	78	47371
136	9	**65**	94	121	32	165	**117**	68	43	11876710
56	**97**	126	143	3	169	107	69	**45**	35	
120	134	6	61	104	108	71	48	39	**159**	

列 B_3 $\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$ 2 次和 94690

140	8	57	92	128	36	164	109	66	**50**	③
1	**63**	101	125	135	76	49	34	**161**	105	
60	96	**118**	141	10	157	115	**75**	47	31	对角线组
102	127	138	**5**	53	44	**27**	167	114	73	$\boldsymbol{B}_2$ $\boldsymbol{B}_4$
122	131	11	62	**99**	**112**	70	40	37	166	
134	6	61	104	**120**	**30**	162	113	78	42	850
94	121	136	**9**	65	169	**107**	69	45	35	47319
13	55	**95**	123	139	110	74	52	29	160	11850190
126	**143**	3	56	97	68	43	32	**165**	117	
58	100	130	133	4	48	39	159	108	**71**	

140	8	57	92	128	44	27	167	114	**73**	④
60	**96**	118	141	10	76	49	34	**161**	105	
122	131	**11**	62	99	112	70	**40**	37	166	对角线组
1	63	101	**125**	135	157	**115**	75	47	31	$\boldsymbol{B}_2$ $\boldsymbol{B}_4$
102	127	138	5	**53**	**36**	164	109	66	50	
126	143	3	56	**97**	**30**	162	113	78	42	850
94	121	136	**9**	65	110	74	**52**	29	160	47371
58	100	**130**	133	4	48	39	**159**	108	71	11876710
13	**55**	95	123	139	169	107	69	**45**	35	
134	6	61	104	120	68	43	32	165	**117**	

例 2　在下数表中划去第 4,7,10 行、列(斜体)数字:

1	2	3	*4*	5	6	*7*	8	9	*10*	11	12	13
14	15	16	*17*	18	19	*20*	21	22	*23*	24	25	26
27	28	29	*30*	31	32	*33*	34	35	*36*	37	38	39
40	*41*	*42*	*43*	*44*	*45*	*46*	*47*	*48*	*49*	*50*	*51*	*52*
53	54	55	*56*	57	58	*59*	60	61	*62*	63	64	65
66	67	68	*69*	70	71	*72*	73	74	*75*	76	77	78
79	*80*	*81*	*82*	*83*	*84*	*85*	*86*	*87*	*88*	*89*	*90*	*91*
92	93	94	*95*	96	97	*98*	99	100	*101*	102	103	104
105	106	107	*108*	109	110	*111*	112	113	*114*	115	116	117
118	*119*	*120*	*121*	*122*	*123*	*124*	*125*	*126*	*127*	*128*	*129*	*130*
131	132	133	*134*	135	136	*137*	138	139	*140*	141	142	143
144	145	146	*147*	148	149	*150*	151	152	*153*	154	155	156
157	158	159	*160*	161	162	*163*	164	165	*166*	167	168	169

(30)

余下 100 个数字, 其行和列都按排列(1,5,6,11,12; 13, 9,8,3,2)组成下方阵:

P					***Q***					
1	5	6	11	12	13	9	8	3	2	35+35
53	57	58	63	64	65	61	60	55	54	295+295
66	70	71	76	77	78	74	73	68	67	360+360
131	135	136	141	142	143	139	138	133	132	685+685
144	148	149	154	155	156	152	151	146	145	750+750
Q'					***P'***					
157	161	162	167	168	169	165	164	159	158	815+815
105	109	110	115	116	117	113	112	107	106	555+555
92	96	97	102	103	104	100	99	94	93	490+490
27	31	32	37	38	39	35	34	29	28	165+165
14	18	19	24	25	26	22	21	16	15	100+100
395	415	420	445	450	455	435	430	405	400	2125+2125

(31)

PA_0					$P'A_0$				次和	1	2	3
1	5	6	11	12	169	165	164	159	158	850	133254	21697270
53	57	58	63	64	117	113	112	107	106	850	79174	7906870
66	70	71	76	77	104	100	99	94	93	850	74104	6614020
131	135	136	141	142	39	35	34	29	28	850	99454	13078270
144	148	149	154	155	26	22	21	16	15	850	114664	16956820
QA_0					$Q'A_0$							
157	161	162	167	168	13	9	8	3	2	850	133254	21697270
105	109	110	115	116	65	61	60	55	54	850	79174	7906870
92	96	97	102	103	78	74	73	68	67	850	74104	6614020
27	31	32	37	38	143	139	138	133	132	850	99454	13078270
14	18	19	24	25	156	152	151	146	145	850	114664	16956820

PA_1					$P'A_1$							
1	53	66	131	144	169	117	104	39	26	850	100326	13300630
5	57	70	135	148	165	113	100	35	22	850	100006	13219030
6	58	71	136	149	164	112	99	34	21	850	99976	13211380
11	63	76	141	154	159	107	94	29	16	850	100126	13249630
12	64	77	142	155	158	106	93	28	15	850	100216	13272580
QA_1					$Q'A_1$							
157	105	92	27	14	13	65	78	143	156	850	100326	13300630
161	109	96	31	18	9	61	74	139	152	850	100006	13219030
162	110	97	32	19	8	60	73	138	151	850	99976	13211380
167	115	102	37	24	3	55	68	133	146	850	100126	13249630
168	116	103	38	25	2	54	67	132	145	850	100216	13272580

PB_4					$Q'B_4$					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
11	64	66	135	149	162	115	103	27	18	48999+51131
12	53	70	136	154	161	110	102	38	14	50065+50065
1	57	71	141	155	157	109	97	37	25	52197+47933
5	58	76	142	144	168	105	96	32	24	50065+50065
6	63	77	131	148	167	116	92	31	19	48999+51131
QB_4					$P'B_4$					2 次和 100130
8	55	67	143	152	159	106	104	35	21	51131+48999
9	60	68	132	156	158	117	100	34	16	50065+50065
13	61	73	133	145	169	113	99	29	15	47933+52197
2	65	74	138	146	165	112	94	28	26	50065+50065
3	54	78	139	151	164	107	93	39	22	51131+48999

PB_1					$P'B_1$					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
1	64	76	136	148	168	115	97	31	14	48115+52015
5	53	77	141	149	167	110	96	27	25	49571+50559
6	57	66	142	154	162	109	92	38	24	51521+48609
11	58	70	131	155	161	105	103	37	19	50845+49285
12	63	71	135	144	157	116	102	32	18	50273+49857
QB_1					$Q'B_1$					2 次和 100130
2	55	73	139	156	158	107	99	35	26	52015+48115
3	60	74	143	145	159	112	100	39	15	50559+49571
8	61	78	132	146	164	113	104	28	16	48609+51521
9	65	67	133	151	165	117	93	29	21	49285+50845
13	54	68	138	152	169	106	94	34	22	49857+50273

PB_2					$Q'B_2$					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
1	63	70	142	149	168	110	92	37	18	49649+50481
5	64	71	131	154	167	109	103	32	14	48531+51599
6	53	76	135	155	162	105	102	31	25	50871+49259
11	57	77	136	144	161	116	97	27	24	50039+50091
12	58	66	141	148	157	115	96	38	19	51235+48895
QB_2					$P'B_2$					2 次和 100130
2	60	78	133	152	169	107	100	28	21	48895+51235
3	61	67	138	156	165	106	99	39	16	50091+50039
8	65	68	139	145	164	117	94	35	15	49259+50871
9	54	73	143	146	159	113	93	34	26	51599+48531
13	55	74	132	151	158	112	104	29	22	50481 +49649

***PB*₃**					***Q'B*₃**					$\Sigma_{10}=2\times425=5\times170=850$
1	58	77	135	154	168	109	102	27	19	48531 +51599
5	63	66	136	155	167	105	97	38	18	50039 +50091
6	64	70	141	144	162	116	96	37	14	49649 +50481
11	53	71	142	148	161	115	92	32	25	50871 +49259
12	57	76	131	149	157	110	103	31	24	51235 +48895
***QB*₃**					***P'B*₃**					2 次和 100130
2	61	68	143	151	169	112	93	35	16	48895+51235
3	65	73	132	152	165	107	104	34	15	49259+50871
8	54	74	133	156	164	106	100	29	26	50481+49649
9	55	78	138	145	159	117	99	28	22	50091+50039
13	60	67	139	146	158	113	94	39	21	51599+48531

据此，由 A_0, A_1 可得下列 10 个主对角线不同的 3 次特优的 10 阶完美幻方. 再有，这里的 B_1, B_2, B_3, B_4 对各方中之各 P, Q 执行的是 Z 变换. 再以列和方 B_4 为行线组，分别配以 B_1, B_2, B_3 作列线组可得 10 阶平方完美完方，即方的各行各列的元素和，平方和都分别相等，为 94690 与 A_0, A_1 的各平方和均不等.下面是构作特优的平方完美幻方的具体操作方法:

***PB*₄**					***Q'B*₄**						(1)
11	64	66	135	149	162	115	103	27	18	48999+51131	引入 B_4
12	53	70	136	154	161	110	102	38	14	50065+50065	作行线组
1	57	71	141	155	157	109	97	37	25	52197+47933	各行:
5	58	76	142	144	168	105	96	32	24	50065+50065	$\Sigma_{10}=2\times425$
6	63	77	131	148	167	116	92	31	19	48999+51131	$=850$
***QB*₄**					***P'B*₄**					2 次和 100130	
8	55	67	143	152	159	106	104	35	21	51131+48999	
9	60	68	132	156	158	117	100	34	16	50065+50065	
13	61	73	133	145	169	113	99	29	15	47933+52197	
2	65	74	138	146	165	112	94	28	26	50065+50065	
3	54	78	139	151	164	107	93	39	22	51131+48999	

										(2)
135	149	**11**	64	66	103	27	18	**162**	115	引入 B_3 作列线组，
154	**12**	53	70	136	110	102	38	14	**161**	并标出 A_0 的第 1 线
1	57	71	141	155	**157**	109	97	37	25	各列:
58	76	142	144	**5**	24	**168**	105	96	32	$\Sigma_{10}=2\times425$
77	131	148	**6**	63	31	19	**167**	116	92	$=850$
67	143	152	**8**	55	35	21	**159**	106	104	2 次和 100130
60	68	132	156	**9**	16	**158**	117	100	34	
13	61	73	133	145	**169**	113	99	29	15	
146	**2**	65	74	138	112	94	28	26	**165**	
139	151	**3**	54	78	93	39	22	**164**	107	

50039	51235	50871	48531	49649	+
50091	48895	49259	51599	50481	$=100130=\Sigma^2$

										(3)
6	63	77	131	148	116	92	31	19	**167**	作列，行的轮回变换，
144	**5**	58	76	142	96	32	24	168	105	使 A_0 的第 1 线成为
141	155	**1**	57	71	37	25	**157**	109	97	主对角线.
70	136	154	**12**	53	14	**161**	110	102	38	各次和:
64	66	135	149	**11**	**162**	115	103	27	18	850
54	78	139	151	**3**	**164**	107	93	39	22	133254
74	138	146	**2**	65	26	**165**	112	94	28	21697270
133	145	**13**	61	73	29	15	**169**	113	99	
156	**9**	60	68	132	100	34	16	**158**	117	
8	55	67	143	152	106	104	35	21	**159**	

(4) 再标出其他主主对角线，并作行的适当变换， 即可得其他的特优的平方完美幻方.

3 次特优的平方完美幻方

各行各列: $\Sigma_{10}=2\times425=850$, $\Sigma^2=100130$

54	78	139	151	3	169	113	99	29	**15**	①
68	**132**	156	9	60	22	164	107	**93**	39	
138	146	**2**	65	74	34	16	**158**	117	100	A_1
152	8	55	**67**	143	94	**28**	26	165	112	
13	61	73	133	**145**	**106**	104	35	21	159	850
1	57	71	141	**155**	**116**	92	31	19	167	100216
148	6	63	**77**	131	102	**38**	14	161	110	13272580
136	154	**12**	53	70	32	24	**168**	105	96	
76	**142**	144	5	58	18	162	115	103	27	
64	66	135	149	11	157	109	97	37	**25**	
68	132	156	9	60	106	104	35	21	**159**	②
138	**146**	2	65	74	169	113	99	**29**	15	
152	8	**55**	67	143	22	164	**107**	93	39	A_1
13	61	73	**133**	145	34	**16**	158	117	100	
54	78	139	151	**3**	**94**	28	26	165	112	850
64	66	135	149	**11**	**102**	38	14	161	110	100126
1	57	71	**141**	155	32	**24**	168	105	96	13249630
148	6	**63**	77	131	18	162	**115**	103	27	
136	154	12	53	70	157	109	97	**37**	25	
76	142	144	5	58	116	92	31	19	**167**	
138	146	2	65	74	94	28	26	165	**112**	③
152	**8**	55	67	143	106	104	35	**21**	159	
13	61	**73**	133	145	169	113	**99**	29	15	A_1
54	78	139	**151**	3	22	**164**	107	93	39	
68	132	156	9	**60**	**34**	16	158	117	100	850
76	142	144	5	**58**	**32**	24	168	105	96	99976
64	66	135	**149**	11	18	**162**	115	103	27	13211380
1	57	**71**	141	155	157	109	**97**	37	25	
148	**6**	63	77	131	116	92	31	**19**	167	
136	154	12	53	70	102	38	14	161	**110**	
152	8	55	67	143	34	16	158	117	**100**	④
13	**61**	73	133	145	94	28	26	**165**	112	
54	78	**139**	151	3	106	104	**35**	21	159	A_1
68	132	156	**9**	60	169	**113**	99	29	15	
138	146	2	65	**74**	**22**	164	107	93	39	850
136	154	12	53	**70**	**18**	162	115	103	27	100006
76	142	144	**5**	58	157	**109**	97	37	25	13219030
64	66	**135**	149	11	116	92	**31**	19	167	
1	**57**	71	141	155	102	38	14	**161**	110	
148	6	63	77	131	32	24	168	105	**96**	
13	61	73	133	145	22	164	107	93	**39**	⑤
54	**78**	139	151	3	34	16	158	**117**	100	
68	132	**156**	9	60	94	28	**26**	165	112	A_1
138	146	2	**65**	74	106	**104**	35	21	159	
152	8	55	67	**143**	**169**	113	99	29	15	850
148	6	63	77	**131**	**157**	109	97	37	25	100326
136	154	12	**53**	70	116	**92**	31	19	167	13300630
76	142	**144**	5	58	102	38	**14**	161	110	
64	**66**	135	149	11	32	24	168	**105**	96	
1	57	71	141	155	18	162	115	103	**27**	

上列 5 方的上 5 行与下 5 行交换即得以 A_0 为对角线组的 3 次特优 10 阶平方完美幻方. 例如由①得⑥.

1	57	71	141	155	116	92	31	19	**167**	⑥
148	**6**	63	77	131	102	38	14	**161**	110	
136	154	**12**	53	70	32	24	**168**	105	96	A_0
76	142	144	**5**	58	18	**162**	115	103	27	
64	66	135	149	**11**	**157**	109	97	37	25	850
54	78	139	151	**3**	**169**	113	99	29	15	133254
68	132	156	**9**	60	22	**164**	107	93	39	21697270
138	146	**2**	65	74	34	16	**158**	117	100	
152	**8**	55	67	143	94	28	26	**165**	112	
13	61	73	133	145	106	104	35	21	**159**	

12	53	70	136	154	110	102	38	14	**161**	⑦
148	**6**	63	77	131	92	31	19	**167**	116	$B_4 B_2$
141	155	**1**	57	71	37	25	**157**	109	97	A_0
66	135	149	**11**	64	18	**162**	115	103	27	
58	76	142	144	**5**	**168**	105	96	32	24	850
60	68	132	156	**9**	**158**	117	100	34	16	133254
78	139	151	**3**	54	22	**164**	107	93	39	21697270
133	145	**13**	61	73	29	15	**169**	113	99	
152	**8**	55	67	143	104	35	21	**159**	106	
2	65	74	138	146	112	94	28	26	**165**	

66	135	149	11	64	18	162	115	103	**27**	⑧
12	**53**	70	136	154	110	102	38	**14**	161	
141	155	**1**	57	71	37	25	**157**	109	97	A_1
58	76	142	**144**	5	168	**105**	96	32	24	
148	6	63	77	**131**	**92**	31	19	167	116	850
152	8	55	67	**143**	**104**	35	21	159	106	100326
60	68	132	**156**	9	158	**117**	100	34	16	13300630
133	145	**13**	61	73	29	15	**169**	113	99	
2	**65**	74	138	146	112	94	28	**26**	165	
78	139	151	3	54	22	164	107	93	**39**	

8	55	67	143	152	106	104	35	21	**159**	⑨
156	**9**	60	68	132	100	34	16	**158**	117	$B_4 B_3$
133	145	**13**	61	73	29	15	**169**	113	99	A_0
74	138	146	**2**	65	26	**165**	112	94	28	
54	78	139	151	**3**	**164**	107	93	39	22	850
64	66	135	149	**11**	**162**	115	103	27	18	133254
70	136	154	**12**	53	14	**161**	110	102	38	21697270
141	155	**1**	57	71	37	25	**157**	109	97	
144	**5**	58	76	142	96	32	24	**168**	105	
6	63	77	131	148	116	92	31	19	**167**	

156	9	60	68	132	100	34	16	158	**117**	⑩
54	**78**	139	151	3	164	107	93	**39**	22	
133	145	**13**	61	73	29	15	**169**	113	99	A_1
8	55	67	**143**	152	106	**104**	35	21	159	
74	138	146	2	**65**	**26**	165	112	94	28	850
70	136	154	12	**53**	**14**	161	110	102	38	100326
6	63	77	**131**	148	116	**92**	31	19	167	13300630
141	155	**1**	57	71	37	25	**157**	109	97	
64	**66**	135	149	11	162	115	103	**27**	18	
144	5	58	76	142	96	32	24	168	**105**	

五、14 阶特优的平方完美幻方

$n=14=7\times 2$，在数表：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

(32)

中，删去第 8 列、行．并以互补数对；

1 14 13 4 5 10 9 列和 16,

15 2 3 12 11 6 7 行和 56,

构作互补 2 等分排列．如

(1)(1,2,7,10,11,12; 13;3,4,5,6,9,14,15),

(2)(1,3,6,9,11,12,14; 2,4,5,7,10,13,15), (33)

(3)(1,4,5,9,10,13,14; 2,3,6,7,11,12,15).

例 1 以排列(1)(1,2,7,10,11,12,13; 3,4,5,6,9,14,15)为行列序调整数表得：

	P								***Q***					
1	2	7	10	11	12	13	3	4	5	6	9	14	15	56
16	17	22	25	26	27	28	18	19	20	21	24	29	30	161
91	92	97	100	101	102	103	93	94	95	96	99	104	105	686
136	137	142	145	146	147	148	138	139	140	141	144	149	150	1001
151	152	157	160	161	162	163	153	154	155	156	159	164	165	1106
166	167	172	175	176	177	178	168	169	170	171	174	179	180	1211
181	182	187	190	191	192	193	183	184	185	186	189	194	195	1316
	Q'								***P'***					
31	32	37	40	41	42	43	33	34	35	36	39	44	45	266
46	47	52	55	56	57	58	48	49	50	51	54	59	60	371
61	62	67	70	71	72	73	63	64	65	66	69	74	75	476
76	77	82	85	86	87	88	78	79	80	81	84	89	90	581
121	122	127	130	131	132	133	123	124	125	126	129	134	135	896
196	197	202	205	206	207	208	198	199	200	201	204	209	210	1421
211	212	217	220	221	222	223	213	214	215	216	219	224	225	1526
742	749	784	805	812	819	826	756	763	770	777	798	833	840	5537

$\Sigma_{14}=1582$　$a\in \boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,　$b\in \boldsymbol{P}',\boldsymbol{Q}'$．$a+b=226$.

(34)

也可以按排列(1,2,7,10,11,12,13; 15 14,9,6,5,4,3)调整，并计算 $\boldsymbol{PA}_0, \boldsymbol{QA}_0; \boldsymbol{PA}_1, \boldsymbol{QA}_1$，及各 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 之各列和方的各次和：$\Sigma_{14}=226\times 7=1582$.

PA_0							$P'A_0$							次和 1	2	3
1	2	7	10	11	12	13	225	224	219	216	215	214	213	1582	333396	72620128
16	17	22	25	26	27	28	210	209	204	201	200	199	198	1582	292446	58738078
91	92	97	100	101	102	103	135	134	129	126	125	124	123	1582	182196	21363328
136	137	142	145	146	147	148	90	89	84	81	80	79	78	1582	191646	24566878
151	152	157	160	161	162	163	75	74	69	66	65	64	63	1582	207396	29906128
166	167	172	175	176	177	178	60	59	54	51	50	49	48	1582	229446	37381078
181	182	187	190	191	192	193	45	44	39	36	35	34	33	1582	257796	46991728
QA_0							$Q'A_0$									
3	4	5	6	9	14	15	223	222	221	220	217	212	211	1582	333396	72620128
18	19	20	21	24	29	30	208	207	206	205	202	197	196	1582	292446	58738078
93	94	95	96	99	104	105	133	132	131	130	127	122	121	1582	182196	21363328
138	139	140	141	144	149	150	88	87	86	85	82	77	76	1582	191646	24566878
153	154	155	156	159	164	165	73	72	71	70	67	62	61	1582	207396	29906128
168	169	170	171	174	179	180	58	57	56	55	52	47	46	1582	229446	37381078
183	184	185	186	189	194	195	43	42	41	40	37	32	31	1582	257796	46991728
PA_1							$P'A_1$									
1	16	91	136	151	166	181	225	210	135	90	75	60	45	1582	242452	41790112
2	17	92	137	152	167	182	224	209	134	89	74	59	44	1582	242270	41728414
7	22	97	142	157	172	187	219	204	129	84	69	54	39	1582	241780	41562304
10	25	100	145	160	175	190	216	201	126	81	66	51	36	1582	241822	41576542
11	26	101	146	161	176	191	215	200	125	80	65	50	35	1582	241892	41600272
12	27	102	147	162	177	192	214	199	124	79	64	49	34	1582	241990	41633494
13	28	103	148	163	178	193	213	198	123	78	63	48	33	1582	242116	41676208
QA_1							$Q'A_1$									
3	18	93	138	153	168	183	223	208	133	88	73	58	43	1582	242116	41676208
4	19	94	139	154	169	184	222	207	132	87	72	57	42	1582	241990	41633494
5	20	95	140	155	170	185	221	206	131	86	71	56	41	1582	241892	41600272
6	21	96	141	156	171	186	220	205	130	85	70	55	40	1582	241822	41576542
9	24	99	144	159	174	189	217	202	127	82	67	52	37	1582	241780	41562304
14	29	104	149	164	179	194	212	197	122	77	62	47	32	1582	242270	41728414
15	30	105	150	165	180	195	211	196	121	76	61	46	31	1582	242452	41790112

A_0, A_1 对顶互补　　$\Sigma_{14} = 226 \times 7 = 1582$

PB_6								$Q'B_6$						242046
11	27	103	136	152	172	190	220	206	132	88	61	47	37	118743+123303
12	28	91	137	157	175	191	217	205	131	87	73	46	32	119733+122313
13	16	92	142	160	176	192	212	202	130	86	72	58	31	122493+119553
1	17	97	145	161	177	193	211	197	127	85	71	57	43	125223+116823
2	22	100	146	162	178	181	223	196	122	82	70	56	42	122493+119553
7	25	101	147	163	166	182	222	208	121	77	67	55	41	119733+122313
10	26	102	148	151	167	187	221	207	133	76	62	52	40	118743+123303
QB_6								$P'B_6$						
6	20	94	138	165	179	189	215	199	123	90	74	54	36	123303+118743
9	21	95	139	153	180	194	214	198	135	89	69	51	35	122313+119733
14	24	96	140	154	168	195	213	210	134	84	66	50	34	119553+122493
15	29	99	141	155	169	183	225	209	129	81	65	49	33	116823+125223
3	30	104	144	156	170	184	224	204	126	80	64	48	45	119553+122493
4	18	105	149	159	171	185	219	201	125	79	63	60	44	122313+119733
5	19	93	150	164	174	186	216	200	124	78	75	59	39	123303+118743

$B_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$　　各行$\Sigma_{14} = 791 \times 2 = 1582$

	PB_1							$Q'B_1$							242046
1	28	102	146	160	172	182	211	208	132	86	70	52	32		120813+121233
2	16	103	147	161	175	187	212	196	133	87	71	55	37		123993+118053
7	17	91	148	162	176	190	217	197	121	88	72	56	40		123843+118203
10	22	92	136	163	177	191	220	202	122	76	73	57	41		121923+120123
11	25	97	137	151	178	192	221	205	127	77	61	58	42		120273+121773
12	26	100	142	152	166	193	222	206	130	82	62	46	43		118893+123153
13	27	101	145	157	167	181	223	207	131	85	67	47	31		117423+124623
	QB_1							$P'B_1$							
3	19	95	141	159	179	195	213	199	125	81	69	59	45		117423+124623
4	20	96	144	164	180	183	214	200	126	84	74	60	33		118893+123153
5	21	99	149	165	168	184	215	201	129	89	75	48	34		120273+121773
6	24	104	150	153	169	185	216	204	134	90	63	49	35		121923+120123
9	29	105	138	154	170	186	219	209	135	78	64	50	36		123843+118203
14	30	93	139	155	171	189	224	210	123	79	65	51	39		123993+118053
15	18	94	140	156	174	194	225	198	124	80	66	54	44		120813+121233
	PB_2							$Q'B_2$							242046
1	27	100	137	163	176	187	211	207	130	77	73	56	37		122013+120033
2	28	101	142	151	177	190	212	208	131	82	61	57	40		121383+120663
7	16	102	145	152	178	191	217	196	132	85	62	58	41		123003+119043
10	17	103	146	157	166	192	220	197	133	86	67	46	42		121383+120663
11	22	91	147	160	167	193	221	202	121	87	70	47	43		121233+120813
12	25	92	148	161	172	181	222	205	122	88	71	52	31		119403+122643
13	26	97	136	162	175	182	223	206	127	76	72	55	32		118743+123303
	QB_2							$P'B_2$							
3	20	99	150	154	171	194	213	200	129	90	64	51	44		123303+118743
4	21	104	138	155	174	195	214	201	134	78	65	54	45		122643+119403
5	24	105	139	156	179	183	215	204	135	79	66	59	33		120813+121233
6	29	93	140	159	180	184	216	209	123	80	69	60	34		120663+121383
9	30	94	141	164	168	185	219	210	124	81	74	48	35		119043+123003
14	18	95	144	165	169	186	224	198	125	84	75	49	36		120663+121383
15	19	96	149	153	170	189	225	199	126	89	63	50	39		120033+122013
	PB_3							$Q'B_3$							242046
1	25	103	142	162	167	191	211	205	133	82	72	47	41		122013+120033
2	26	91	145	163	172	192	212	206	121	85	73	52	42		123003+119043
7	27	92	146	151	175	193	217	207	122	86	61	55	43		121233+120813
10	28	97	147	152	176	181	220	208	127	87	62	56	32		118743+123303
11	16	100	148	157	177	182	221	196	130	88	67	57	32		121383+120663
12	17	101	136	160	178	187	222	197	131	76	70	58	37		121383+120663
13	22	102	137	161	166	190	223	202	132	77	71	46	40		119403+122643
	QB_3							$P'B_3$							
3	24	94	149	155	180	186	213	204	124	89	65	60	36		122643+119403
4	29	95	150	156	168	189	214	209	125	90	66	48	39		120663+121383
5	30	96	138	159	169	194	215	210	126	78	69	49	44		120663+121383
6	18	99	139	164	170	195	216	198	129	79	74	50	45		123303+118743
9	19	104	140	165	171	183	219	199	134	80	75	51	33		120813+121233
14	20	105	141	153	174	184	224	200	135	81	63	54	34		119043+123003
15	21	93	144	154	179	185	225	201	123	84	64	59	35		120033+122013

结论:

1. PA_0 与 QA_0; PA_1 与 QA_1之各行的 2 次和, 3 次和分别对应相同.

2. B_3与 B_5; B_2与 B_4之各行 2 次和分别有对应相同, 不过有 P对应 P, Q 对应 Q, 且各线的排列顺序也不同.

3. 在列和方 PB_1 与 QB_3, QB_5, PB_2, PB_4 与 QB_6 中有 2 次和相等的线，进一步算得 3 次和也相等，如下(4 次和不等).

4. 以 PB_6, QB_1 为行，分别以 PB_1, QB_6, QB_2, PB_5, PB_3, QB_4, QB_5, PB_2, PB_4, QB_3 为列，并使对应行、列 2 次和之和分别对应相同为 242046，但对应线的排列顺序可以不同.

因此，这里不但可作出 3 次特优的完美幻方，而且可作出各行、列线元素和都为$\Sigma_{14} = 1582$, 2 次和为$\Sigma^2 = 242{,}046$ 的 3 次特优的平方完美幻方.

		PB_4						$Q'B_4$						242046
1	26	92	147	157	178	190	211	206	122	87	67	58	40	123183+118863
2	27	97	148	160	166	191	212	207	127	88	70	46	41	121683+120363
7	28	100	136	161	167	192	217	208	130	76	71	47	42	120003+122043
10	16	101	137	162	172	193	220	196	131	77	72	52	43	122403+119643
11	17	102	142	163	175	181	221	197	132	82	73	55	31	120933+121113
12	22	103	145	151	176	182	222	202	133	85	61	56	32	119163+122883
13	25	91	146	152	177	187	223	205	121	86	62	57	37	119793+122253
		QB_4						$P'B_4$						
3	21	105	140	164	169	189	213	201	135	80	74	49	39	122253+119793
4	24	93	141	165	170	194	214	204	123	81	75	50	44	122883+119163
5	29	94	144	153	171	195	215	209	124	84	63	51	45	121113+120933
6	30	95	149	154	174	183	216	210	125	89	64	54	33	119643+122403
9	18	96	150	155	179	184	219	198	126	90	65	59	34	122043+120003
14	19	99	138	156	180	185	224	199	129	78	66	60	35	120363+121683
15	20	104	139	159	168	186	225	200	134	79	69	48	36	119163+123183
		PB_5						$Q'B_5$						242046
1	22	101	148	152	175	192	211	202	131	88	62	55	42	123183+118863
2	25	102	136	157	176	193	212	205	132	76	67	56	43	122403+119643
7	26	103	137	160	177	181	217	206	133	77	70	57	31	119793+122253
10	27	91	142	161	178	182	220	207	121	82	71	58	32	120003+122043
11	28	92	145	162	166	187	221	208	122	85	72	46	37	119163+122883
12	16	97	146	163	167	190	222	196	127	86	73	47	40	121683+120363
13	17	100	147	151	172	191	223	197	130	87	61	52	41	120933+121113
		Q_5						$P'B_5$						
3	29	96	139	165	174	185	213	209	126	79	75	54	35	121113+120933
4	30	99	140	153	179	186	214	210	129	80	63	59	36	120363+121683
5	18	104	141	154	180	189	215	198	134	81	64	60	39	122883+119163
6	19	105	144	155	168	194	216	199	135	84	65	48	44	122043+120003
9	20	93	149	156	169	195	219	200	123	89	66	49	45	122253+119793
14	21	94	150	159	170	183	224	201	124	90	69	50	33	119643+122403
15	24	95	138	164	171	184	225	204	125	78	74	51	34	118863+123183

如前由各个平方完美幻方分别可得 7 个 3 次特优的 14 阶平方完美幻方. 这些 3 次特优的平方完美幻方的各主对角线之各次和如下:

A_0		A_1	
$\Sigma_{14} = 226\times7 = 1582$		$\Sigma_{14} = 226\times7 = 1582$	
(1)333396,	72620128,	242452,	41790112.
(2)292446,	58738078,	242270,	41728414.
(3)182196,	21363328,	241780,	41562304.
(4)191646,	24566878,	241822,	41576542.
(5)207396,	29906128,	241892,	41600272.
(6)229446,	37381078,	241990,	41633494.
(7)257796,	46991728.	242116,	41676208.

2 次和均不等于 242046.

3 次特优的 14 阶平方完美幻方　　$\Sigma_{14}=1582$

2	22	100	146	162	178	181	196	122	82	70	56	42	223
187	10	26	102	148	151	167	133	76	62	52	40	221	207
175	191	12	28	91	137	157	87	73	46	32	217	205	131
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85
147	163	166	182	7	25	101	55	41	222	208	121	77	67
103	136	152	172	190	11	27	37	220	206	132	88	61	47
16	92	142	160	176	192	13	212	202	130	86	72	58	31
30	104	144	156	170	184	3	224	204	126	80	64	48	45
93	150	164	174	186	5	19	39	216	200	124	78	75	59
139	153	180	194	9	21	95	51	35	214	198	135	89	69
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81
171	185	4	18	105	149	159	79	63	60	44	219	201	125
189	6	20	94	138	165	179	123	90	74	54	36	215	199
14	24	96	140	154	168	195	210	134	84	66	50	34	213

①
行 $\boldsymbol{B}_6$　列 $\boldsymbol{B}_1$
$\Sigma_{14}=791\times2=1582$
$\Sigma^2=242046$
对角线组 $\boldsymbol{A}_0$

16	92	142	160	176	192	13	212	202	130	86	72	58	31
103	136	152	172	190	11	27	37	220	206	132	88	61	47
147	163	166	182	7	25	101	55	41	222	208	121	77	67
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85
175	191	12	28	91	137	157	87	73	46	32	217	205	131
187	10	26	102	148	151	167	133	76	62	52	40	221	207
2	22	100	146	162	178	181	196	122	82	70	56	42	223
14	24	96	140	154	168	195	210	134	84	66	50	34	213
189	6	20	94	138	165	179	123	90	74	54	36	215	199
171	185	4	18	105	149	159	79	63	60	44	219	201	125
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81
139	153	180	194	9	21	95	51	35	214	198	135	89	69
93	150	164	174	186	5	19	39	216	200	124	78	75	59
30	104	144	156	170	184	3	224	204	126	80	64	48	45

②
$\boldsymbol{A}_1$
$\Sigma_{14}=1582$

12	28	91	137	157	175	191	205	131	87	73	46	32	217
181	2	22	100	146	162	178	122	82	70	56	42	223	196
172	190	11	27	103	136	152	88	61	47	37	220	206	132
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85
148	151	167	187	10	26	102	52	40	221	207	133	76	62
92	142	160	176	192	13	16	31	212	202	130	86	72	58
25	101	147	163	166	182	7	222	208	121	77	67	55	41
21	95	139	153	180	194	9	214	198	135	89	69	51	35
104	144	156	170	184	3	30	45	224	204	126	80	64	48
138	165	179	189	6	20	94	54	36	215	199	123	90	74
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81
174	186	5	19	93	150	164	78	75	59	39	216	200	124
195	14	24	96	140	154	168	134	84	66	50	34	213	210
4	18	105	149	159	171	185	201	125	79	63	60	44	219

③
行 $\boldsymbol{B}_6$
列 $\boldsymbol{B}_2$
$\boldsymbol{A}_0$

181	2	22	100	146	162	178	122	82	70	56	42	223	196
148	151	167	187	10	26	102	52	40	221	207	133	76	62
12	28	91	137	157	175	191	205	131	87	73	46	32	217
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85
25	101	147	163	166	182	7	222	208	121	77	67	55	41
172	190	11	27	103	136	152	88	61	47	37	220	206	132
92	142	160	176	192	13	16	31	212	202	130	86	72	58
104	144	156	170	184	3	30	45	224	204	126	80	64	48
174	186	5	19	93	150	164	78	75	59	39	216	200	124
21	95	139	153	180	194	9	214	198	135	89	69	51	35
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81
4	18	105	149	159	171	185	201	125	79	63	60	44	219
138	165	179	189	6	20	94	54	36	215	199	123	90	74
195	14	24	96	140	154	168	134	84	66	50	34	213	210

④
$\boldsymbol{A}_1$

13	16	92	142	160	176	192	202	130	86	72	58	31	212	
190	11	27	103	136	152	172	132	88	61	47	37	220	206	⑤
166	182	7	25	101	147	163	77	67	55	41	222	208	121	
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	行 B_6
137	157	175	191	12	28	91	46	32	217	205	131	87	73	列 B_3
102	148	151	167	187	10	26	40	221	207	133	76	62	52	A_0
22	100	146	162	178	181	2	223	196	122	82	70	56	42	
24	96	140	154	168	195	14	213	210	134	84	66	50	34	
94	138	165	179	189	6	20	36	215	199	123	90	74	54	
149	159	171	185	4	18	105	60	44	219	201	125	79	63	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	
180	194	9	21	95	139	153	89	69	51	35	214	198	135	
186	5	19	93	150	164	174	124	78	75	59	39	216	200	
3	30	104	144	156	170	184	204	126	80	64	48	45	224	

166	182	7	25	101	147	163	77	67	55	41	222	208	121	
13	16	92	142	160	176	192	202	130	86	72	58	31	212	⑥
102	148	151	167	187	10	26	40	221	207	133	76	62	52	
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	
190	11	27	103	136	152	172	132	88	61	47	37	220	206	
22	100	146	162	178	181	2	223	196	122	82	70	56	42	A_1
137	157	175	191	12	28	91	46	32	217	205	131	87	73	
149	159	171	185	4	18	105	60	44	219	201	125	79	63	
24	96	140	154	168	195	14	213	210	134	84	66	50	34	
186	5	19	93	150	164	174	124	78	75	59	39	216	200	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	
94	138	165	179	189	6	20	36	215	199	123	90	74	54	
3	30	104	144	156	170	184	204	126	80	64	48	45	224	
180	194	9	21	95	139	153	89	69	51	35	214	198	135	

7	25	101	147	163	166	182	208	121	77	67	55	41	222	
192	13	16	92	142	160	176	130	86	72	58	31	212	202	⑦
167	187	10	26	102	148	151	76	62	52	40	221	207	133	
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	行 B_6
136	152	172	190	11	27	103	47	37	220	206	132	88	61	列 B_4
100	146	162	178	181	2	22	42	223	196	122	82	70	56	A_0
28	91	137	157	175	191	12	217	205	131	87	73	46	32	
18	105	149	159	171	185	4	219	201	125	79	63	60	44	
96	140	154	168	195	14	24	34	213	210	134	84	66	50	
150	164	174	186	5	19	93	59	39	216	200	124	78	75	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	
179	189	6	20	94	138	165	90	74	54	36	215	199	123	
184	3	30	104	144	156	170	126	80	64	48	45	224	204	
9	21	95	139	153	180	194	198	135	89	69	51	35	214	

136	152	172	190	11	27	103	47	37	220	206	132	88	61	
28	91	137	157	175	191	12	217	205	131	87	73	46	32	⑧
192	13	16	92	142	160	176	130	86	72	58	31	212	202	
61	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	
100	146	162	178	181	2	22	42	223	196	122	82	70	56	
7	25	101	147	163	166	182	208	121	77	67	55	41	222	A_1
167	187	10	26	102	148	151	76	62	52	40	221	207	133	
179	189	6	20	94	138	165	90	74	54	36	215	199	123	
9	21	95	139	153	180	194	198	135	89	69	51	35	214	
96	140	154	168	195	14	24	34	213	210	134	84	66	50	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	
184	3	30	104	144	156	170	126	80	64	48	45	224	204	
18	105	149	159	171	185	4	219	201	125	79	63	60	44	
150	164	174	186	5	19	93	59	39	216	200	124	78	75	

6	20	94	138	165	179	189	199	123	90	74	54	36	215	
194	9	21	95	139	153	180	135	89	69	51	35	214	198	⑨
168	195	14	24	96	140	154	84	66	50	34	213	210	134	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	行 B_6
144	156	170	184	3	30	104	48	45	224	204	126	80	64	列 B_5
105	149	159	171	185	4	18	44	219	201	125	79	63	60	A_0
19	93	150	164	174	186	5	216	200	124	78	75	59	39	
27	103	136	152	172	190	11	220	206	132	88	61	47	37	
91	137	157	175	191	12	28	32	217	205	131	87	73	46	
142	160	176	192	13	16	92	58	31	212	202	130	86	72	
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	
178	181	2	22	100	146	162	82	70	56	42	223	196	122	
182	7	25	101	147	163	166	121	77	67	55	41	222	208	
10	26	102	148	151	167	187	207	133	76	62	52	40	221	

91	137	157	175	191	12	28	32	217	205	131	87	73	46	
178	181	2	22	100	146	162	82	70	56	42	223	196	122	⑩
27	103	136	152	172	190	11	220	206	132	88	61	47	37	
161	177	193	1	17	97	145	71	57	43	211	197	127	85	
10	26	102	148	151	167	187	207	133	76	62	52	40	221	
142	160	176	192	13	16	92	58	31	212	202	130	86	72	A_1
182	7	25	101	147	163	166	121	77	67	55	41	222	208	
194	9	21	95	139	153	180	135	89	69	51	35	214	198	
144	156	170	184	3	30	104	48	45	224	204	126	80	64	
6	20	94	138	165	179	189	199	123	90	74	54	36	215	
155	169	183	15	29	99	141	65	49	33	225	209	129	81	
19	93	150	164	174	186	5	216	200	124	78	75	59	39	
168	195	14	24	96	140	154	84	66	50	34	213	210	134	
105	149	159	171	185	4	18	44	219	201	125	79	63	60	

1	28	102	146	160	172	182	32	52	70	86	132	208	211	
187	2	16	103	147	161	175	55	71	87	133	196	212	37	①
176	190	7	17	91	148	162	72	88	121	197	217	40	56	行 B_1
163	177	191	10	22	92	136	76	122	202	220	41	57	73	列 B_2
137	151	178	192	11	25	97	127	205	221	42	58	61	77	
100	142	152	166	193	12	26	206	222	43	46	62	82	130	A_0
27	101	145	157	167	181	13	223	31	47	67	85	131	207	
19	95	141	159	179	195	3	213	45	59	69	81	125	199	
96	144	164	180	183	4	20	200	214	33	60	74	84	126	A_1
149	165	168	184	5	21	99	129	201	215	34	48	75	89	
153	169	185	6	24	104	150	90	134	204	216	35	49	63	
170	186	9	29	105	138	154	64	78	135	209	219	36	50	
189	14	30	93	139	155	171	51	65	79	123	210	224	39	
15	18	94	140	156	174	194	44	54	66	80	124	198	225	

1	28	102	146	160	172	182	32	52	70	86	132	208	211	
191	10	22	92	136	163	177	57	73	76	122	202	220	41	②
167	181	13	27	101	145	157	67	85	131	207	223	31	47	行 B_1
162	176	190	7	17	91	148	88	121	197	217	40	56	72	列 B_3
142	152	166	193	12	26	100	130	206	222	43	46	62	82	A_0
103	147	161	175	187	2	16	196	212	37	55	71	87	133	
25	97	137	151	178	192	11	221	42	58	61	77	127	205	
21	99	149	165	168	184	5	215	34	48	75	89	129	201	A_1
93	139	155	171	189	14	30	210	224	39	51	65	79	123	
144	164	180	183	4	20	96	126	200	214	33	60	74	84	
154	170	186	9	29	105	138	78	135	209	219	36	50	64	
179	195	3	19	95	141	159	69	81	125	199	213	45	59	
185	6	24	104	150	153	169	49	63	90	134	204	216	35	
15	18	94	140	156	174	194	44	54	66	80	124	198	225	

1	28	102	146	160	172	182	32	52	70	86	132	208	211	
190	7	17	91	148	162	176	56	72	88	121	197	217	40	③
178	192	11	25	97	137	151	61	77	127	205	221	42	58	行 B_1
157	167	181	13	27	101	145	85	131	207	223	31	47	67	列 B_4
147	161	175	187	2	16	103	133	196	212	37	55	71	87	A_0
92	136	163	177	191	10	22	202	220	41	57	73	76	122	
26	100	142	152	166	193	12	222	43	46	62	82	130	206	
20	96	144	164	180	183	4	214	33	60	74	84	126	200	A_1
104	150	153	169	185	6	24	204	216	35	49	63	90	134	
139	155	171	189	14	30	93	123	210	224	39	51	65	79	
159	179	195	3	19	95	141	81	125	199	213	45	59	69	
168	184	5	21	99	149	165	75	89	129	201	215	34	48	
186	9	29	105	138	154	170	50	64	78	135	209	219	36	
15	18	94	140	156	174	194	44	54	66	80	124	198	225	

1	28	102	146	160	172	182	32	52	70	86	132	208	211	
192	11	25	97	137	151	178	58	61	77	127	205	221	42	④
175	187	2	16	103	147	161	71	87	133	196	212	37	55	行 B_1
152	166	193	12	26	100	142	82	130	206	222	43	46	62	列 B_5
148	162	176	190	7	17	91	121	197	217	40	56	72	88	A_0
101	145	157	167	181	13	27	207	223	31	47	67	85	131	
22	92	136	163	177	191	10	220	41	57	73	76	122	202	
24	104	150	153	169	185	6	216	35	49	63	90	134	204	A_1
95	141	159	179	195	3	19	199	213	45	59	69	81	125	
138	154	170	186	9	29	105	135	209	219	36	50	64	78	
164	180	183	4	20	96	144	84	126	200	214	33	60	74	
171	189	14	30	93	139	155	65	79	123	210	224	39	51	
184	5	21	99	149	165	168	48	75	89	129	201	215	34	
15	18	94	140	156	174	194	44	54	66	80	124	198	225	

例 2　以(3)(1,4,5,9,10,13,14; 2,3,6,7,11,12,15)为行、列序:

	P									***Q***					
1	4	5	9	10	13	14	2	3	6	7	11	12	15	56	***A***
46	49	50	54	55	58	59	47	48	51	52	56	57	60	371	
61	64	65	69	70	73	74	62	63	66	67	71	72	75	476	
121	124	125	129	130	133	134	122	123	126	127	131	132	135	896	
136	139	140	144	145	148	149	137	138	141	142	146	147	150	1001	
181	184	185	189	190	193	194	182	183	186	187	191	192	195	1316	
196	199	200	204	205	208	209	197	198	201	202	206	207	210	1421	
	Q'									***P'***					
16	19	20	24	25	28	29	17	18	21	22	26	27	30	161	
31	34	35	39	40	43	44	32	33	36	37	41	42	45	266	
76	79	80	84	85	88	89	77	78	81	82	86	87	90	581	
91	94	95	99	100	103	104	92	93	96	97	101	102	105	686	
151	154	155	159	160	163	164	152	153	156	157	161	162	165	1106	
166	169	170	174	175	178	179	167	168	171	172	176	177	180	1211	
211	214	215	219	220	223	224	212	213	216	217	221	222	225	1526	
742	749	784	805	812	819	826	756	763	770	777	798	833	840	5537+5537	

(35)

$\Sigma_{14} = 1582$　　$a \in P, Q$,　　$b \in P', Q'$.　$a + b = 226$.

A_0							$\Sigma_{14}=226\times7=1582$							次和 1	2	3
1	4	5	9	10	13	14	212	213	216	217	221	222	225	1582	333396	72620128
46	49	50	54	55	58	59	167	168	171	172	176	177	180	1582	229446	37381078
61	64	65	69	70	73	74	152	153	156	157	161	162	165	1582	207396	29906128
121	124	125	129	130	133	134	92	93	96	97	101	102	105	1582	182196	21363328
136	139	140	144	145	148	149	77	78	81	82	86	87	90	1582	191646	24566878
181	184	185	189	190	193	194	32	33	36	37	41	42	45	1582	257796	46991728
196	199	200	204	205	208	209	17	18	21	22	26	27	30	1582	292446	58738078
2	3	6	7	11	12	15	211	214	215	219	220	223	224	1582	333396	72620128
47	48	51	52	56	57	60	166	169	170	174	175	178	179	1582	229446	37381078
62	63	66	67	71	72	75	151	154	155	159	160	163	164	1582	207396	29906128
122	123	126	127	131	132	135	91	94	95	99	100	103	104	1582	182196	21363328
137	138	141	142	146	147	150	76	79	80	84	85	88	89	1582	191646	24566878
182	183	186	187	191	192	195	31	34	35	39	40	43	44	1582	257796	46991728
197	198	201	202	206	207	210	16	19	20	24	25	28	29		292446	58738078
	A_1															
1	46	61	121	136	181	196	30	45	90	105	165	180	225	1582	242452	41790112
4	49	64	124	139	184	199	27	42	87	102	162	177	222	1582	241990	41633494
5	50	65	125	140	185	200	26	41	86	101	161	176	221	1582	241892	41600272
9	54	69	129	144	189	204	22	37	82	97	157	172	217	1582	241780	41562304
10	55	70	130	145	190	205	21	36	81	96	156	171	216	1582	241822	41576542
13	58	73	133	148	193	208	18	33	78	93	153	168	213	1582	242116	41676208
14	59	74	134	149	194	209	17	32	77	92	152	167	212	1582	242270	41728414
15	60	75	135	150	195	210	16	31	76	91	151	166	211	1582	242452	41790112
12	57	72	132	147	192	207	19	34	79	94	154	169	214	1582	241990	41633494
11	56	71	131	146	191	206	20	35	80	95	155	170	215	1582	241892	41600272
7	52	67	127	142	187	202	24	39	84	99	159	171	219	1582	241780	41562304
6	51	66	126	141	186	201	25	40	85	100	160	175	220	1582	241822	41576542
3	48	63	123	138	183	198	28	43	88	103	163	178	223	1582	242116	41676208
2	47	62	122	137	182	197	29	44	89	104	164	179	224	1582	242270	41728414

						A_0, A_1	$\Sigma_{14}=226\times7=1582.$							
1	49	65	129	145	193	209	211	169	155	99	85	43	29	125223 +116823 B_1
4	50	69	130	148	194	196	214	170	159	100	88	44	16	122133 +119913
5	54	70	133	149	181	199	215	174	160	103	89	31	19	120093 +121953
9	55	73	134	136	184	200	219	175	163	104	76	34	20	118743 +123303
10	58	74	121	139	185	204	220	178	164	91	79	35	24	118743 +123303
13	59	61	124	140	189	205	223	179	151	94	80	39	25	120093 +121953
14	46	64	125	144	190	208	224	166	154	95	84	40	28	122133 +119913
15	57	71	127	141	183	197	225	177	161	97	81	33	17	= 242046
12	56	67	126	138	182	210	222	176	157	96	78	32	30	
11	52	66	123	137	195	207	221	172	156	93	77	45	27	B_1 B_2 B_3 B_4
7	51	63	122	150	192	206	217	171	153	92	90	42	26	各行
6	48	62	135	147	191	202	216	168	152	105	87	41	22	$\Sigma_{14}=791\times2$
3	47	75	132	146	187	201	213	167	165	102	86	37	21	$=1582.$
2	60	72	131	142	186	198	212	180	162	101	82	36	18	

对分段方 A 的各个 7 阶方分别执行行 Z 变换得:

1. 7 阶列和方，它的各列元素和均为 791. 为后面计算各列元素的 2 次和方便，将其转置成为行和方，因而各行元素和均为 $\Sigma_7=791$, 14 阶方的各行元素和均为 $\Sigma_{14}=791\times2=1582$;

2. 计算各 2 次和，知对顶互补($a+b=226$. $a\in P, Q, b\in P', Q'$)2 线的 2 次和相等, P, Q' 或 P',

Q 中同行线 2 线的 2 次和之和均为 242,046;

3. B_2, B_4; B_3, B_5 有相同的 2 次和，只是顺序不同.

1	50	70	134	139	189	208	211	170	160	104	79	39	28	123663 +118383	B_2
4	54	73	121	140	190	209	214	174	163	91	80	40	29	122283 +119763	
5	55	74	124	144	193	196	215	175	164	94	84	43	16	120303 +121743	
9	58	61	125	145	194	199	219	178	151	95	85	44	19	121053 +120993	
10	59	64	129	148	181	200	220	179	154	99	88	31	20	118983 +123063	
13	46	65	130	149	184	204	223	166	155	100	89	34	24	121083 +120963	
14	49	69	133	136	185	205	224	169	159	103	76	35	25	119793 +122253	
15	56	66	122	147	187	198	225	176	156	92	87	37	18	= 242046	
12	52	63	135	146	186	197	222	172	153	105	86	36	17		
11	51	62	132	142	183	210	221	171	152	102	82	33	30		
7	48	75	131	141	182	207	217	168	165	101	81	32	27		
6	47	72	127	138	195	206	216	167	162	97	78	45	26		
3	60	71	126	137	192	202	213	180	161	96	77	42	22		
2	57	67	123	150	191	201	212	177	157	93	90	41	21		

1	55	64	133	140	194	204	211	175	154	103	80	44	24	123663+ 118383	B_4
4	58	65	134	144	181	205	214	178	155	104	84	31	25	121083+ 120963	
5	59	69	121	145	184	208	215	179	159	91	85	34	28	121053+ 120993	
9	46	70	124	148	185	209	219	166	160	94	88	35	29	122283+ 119763	
10	49	73	125	149	189	196	220	169	163	95	89	39	16	119793+ 122253	
13	50	74	129	136	190	199	223	170	164	99	76	40	19	118983+ 123063	
14	54	61	130	139	193	200	224	174	151	100	79	43	20	120303+ 121743	
15	51	72	123	146	182	202	225	171	162	93	86	32	22	= 242046	
12	48	71	122	142	195	201	222	168	161	92	82	45	21		
11	47	67	135	141	192	198	221	167	157	105	81	42	18		
7	60	66	132	138	191	197	217	180	156	102	78	41	17		
6	57	63	131	137	187	210	216	177	153	101	77	37	30		
3	56	62	127	150	186	207	213	176	152	97	90	36	27		
2	52	75	126	147	183	206	212	172	165	96	87	33	26		

1	59	73	130	144	185	199	211	179	163	100	84	35	19	120273+ 121773	B_6
4	46	74	133	145	189	200	214	166	164	103	85	39	20	122043+ 120003	
5	49	61	134	148	190	204	215	169	151	104	88	40	24	123723+ 118323	
9	50	64	121	149	193	205	219	170	154	91	89	43	25	122793+ 119253	
10	54	65	124	136	194	208	220	174	155	94	76	44	28	122013+ 120033	
13	55	69	125	139	181	209	223	175	159	95	79	31	29	119343+ 122703	
14	58	70	129	140	184	196	224	178	160	99	80	34	16	116973+ 125073	
15	47	63	126	142	191	207	225	167	153	96	82	41	27	= 242046	
12	60	62	123	141	187	206	222	180	152	93	81	37	26		
11	57	75	122	138	186	202	221	177	165	92	78	36	22		
7	56	72	135	137	183	201	217	176	162	105	77	33	21		
6	52	71	132	150	182	198	216	172	161	102	90	32	18		
3	51	67	131	147	195	197	213	171	157	101	87	45	17		
2	48	66	127	146	192	210	212	168	156	97	86	42	30		

1	54	74	125	148	184	205	211	174	164	95	88	34	25	121803+120243 **B_3**
4	55	61	129	149	185	208	214	175	151	99	89	35	28	123093+118953
5	58	64	130	136	189	209	215	178	154	100	76	39	29	122283+119763
9	59	65	133	139	190	196	219	179	155	103	79	40	16	119313+122733
10	46	69	134	140	193	199	220	166	159	104	80	43	19	121383+120663
13	49	70	121	144	194	200	223	169	160	91	84	44	20	120483+121563
14	50	73	124	145	181	204	224	170	163	94	85	31	24	118803+123243
15	52	62	131	138	192	201	225	172	152	101	78	42	21	=242046
12	51	75	127	137	191	198	222	171	165	97	77	41	18	
11	48	72	126	150	187	197	221	168	162	96	90	37	17	
7	47	71	123	147	186	210	217	167	161	93	87	36	30	
6	60	67	122	146	183	207	216	180	157	92	86	33	27	
3	57	66	135	142	182	206	213	177	156	105	82	32	26	
2	56	63	132	141	195	202	212	176	153	102	81	45	22	
1	58	69	124	149	190	200	211	178	159	94	89	40	20	121803+ 120243 **B_5**
4	59	70	125	136	193	204	214	179	160	95	76	43	24	121383+ 120663
5	46	73	129	139	194	205	215	166	163	99	79	44	25	123093+ 118953
9	49	74	130	140	181	208	219	169	164	100	80	31	28	120483+ 121563
10	50	61	133	144	184	209	220	170	151	103	84	34	29	122283+ 119763
13	54	64	134	145	185	196	223	174	154	104	85	35	16	118803+ 123243
14	55	65	121	148	189	199	224	175	155	91	88	39	19	119313+ 122733
15	48	67	132	137	186	206	225	168	157	102	77	36	26	=242046
12	47	66	131	150	183	202	222	167	156	101	90	33	22	
11	60	63	127	147	182	201	221	180	153	97	87	32	21	
7	57	62	126	146	195	198	217	177	152	96	86	45	18	
6	56	75	123	142	192	197	216	176	165	93	82	42	17	
3	52	72	122	141	191	210	213	172	162	92	81	41	30	
2	51	71	135	138	187	207	212	171	161	105	78	37	27	

平方完美幻方的做法:

1. 选定 B_1 或任一别的列和方为本. 对选定 B_1 的各个 7 阶方分别地执行行 Z 变换得 B_2 或 B_3 或 B_4 或 B_5 或 B_5 得 14 阶方的各行各列元素和, 2 次和均为$\Sigma_{14}=791\times 2=1582$, $\Sigma^2=242\,046$ 的平方完美幻方;

2. 再对行或列作轮回变换得对角线组 A_0 或 A_1;

3. 总共有 6×5=30 方, 每方中各含有 7 个 3 次特优的 14 阶平方完美幻方.

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	
208	14	46	64	125	144	190	40	84	95	154	166	224	28	①
189	205	13	59	61	124	140	80	94	151	179	223	25	39	行 B_1 列 B_2
139	185	204	10	58	74	121	91	164	178	220	24	35	79	各行各列
134	136	184	200	9	55	73	163	175	219	34	20	76	104	1582
70	133	149	181	199	5	54	174	215	19	31	89	103	160	242046
50	69	130	148	194	196	4	214	16	44	88	100	159	170	
56	67	126	138	182	210	12	222	30	32	78	96	157	176	对角线组
66	123	137	195	207	11	52	172	221	27	45	77	93	156	A_0
122	150	192	206	7	51	63	153	171	217	26	42	90	92	
147	191	202	6	48	62	135	105	152	168	216	22	41	87	
187	201	3	47	75	132	146	86	102	165	167	213	21	37	
198	2	60	72	131	142	186	36	82	101	162	180	212	18	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	②
134	136	184	200	9	55	73	163	175	219	34	20	76	104	
208	14	46	64	125	144	190	40	84	95	154	166	224	28	行 B_1 列 B_2
70	133	149	181	199	5	54	174	215	19	31	89	103	160	各行各列
189	205	13	59	61	124	140	80	94	151	179	223	25	39	1582
50	69	130	148	194	196	4	214	16	44	88	100	159	170	242046
139	185	204	10	58	74	121	91	164	178	220	24	35	79	
147	191	202	6	48	62	135	105	152	168	216	22	41	87	
56	67	126	138	182	210	12	222	30	32	78	96	157	176	对角线组
187	201	3	47	75	132	146	86	102	165	167	213	21	37	A_1
66	123	137	195	207	11	52	172	221	27	45	77	93	156	
198	2	60	72	131	142	186	36	82	101	162	180	212	18	
122	150	192	206	7	51	63	153	171	217	26	42	90	92	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	
205	13	59	61	124	140	189	39	80	94	151	179	223	25	③
184	200	9	55	73	134	136	76	104	163	175	219	20	34	行 B_1 列 B_3
148	194	196	4	50	69	130	100	159	170	214	16	44	88	各行各列
125	144	190	208	14	46	64	154	166	224	28	40	84	95	1582
74	121	139	185	204	10	58	178	220	24	35	79	91	164	242046
54	70	133	149	181	199	5	215	19	31	89	103	160	174	
52	66	123	137	195	207	11	221	27	45	77	93	156	172	对角线组
62	135	147	191	202	6	48	168	216	22	41	87	105	152	A_0
131	142	186	198	2	60	72	162	180	212	18	36	82	101	
138	182	210	12	56	67	126	96	157	176	222	30	32	78	
192	206	7	51	63	122	150	90	92	153	171	217	26	42	
201	3	47	75	132	146	187	37	86	102	165	167	213	21	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	
74	121	139	185	204	10	58	178	220	24	35	79	91	164	④
148	194	196	4	50	69	130	100	159	170	214	16	44	88	行 B_1 列 B_3
205	13	59	61	124	140	189	39	80	94	151	179	223	25	各行各列
54	70	133	149	181	199	5	215	19	31	89	103	160	174	1582
125	144	190	208	14	46	64	154	166	224	28	40	84	95	242046
184	200	9	55	73	134	136	76	104	163	175	219	20	34	
192	206	7	51	63	122	150	90	92	153	171	217	26	42	对角线组
131	142	186	198	2	60	72	162	180	212	18	36	82	101	A_1
52	66	123	137	195	207	11	221	27	45	77	93	156	172	
201	3	47	75	132	146	187	37	86	102	165	167	213	21	
138	182	210	12	56	67	126	96	157	176	222	30	32	78	
62	135	147	191	202	6	48	168	216	22	41	87	105	152	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	
204	10	58	74	121	139	185	35	79	91	164	178	220	24	⑤
194	196	4	50	69	130	148	88	100	159	170	214	16	44	行 B_1 列 B_4
140	189	205	13	59	61	124	94	151	179	223	25	39	80	各行各列
133	149	181	199	5	54	70	160	174	215	19	31	89	103	1582
64	125	144	190	208	14	46	166	224	28	40	84	95	154	242046
55	73	134	136	184	200	9	219	20	34	76	104	163	175	
51	63	122	150	192	206	7	217	26	42	90	92	153	171	对角线组
72	131	142	186	198	2	60	180	212	18	36	82	101	162	A_0
123	137	195	207	11	52	66	156	172	221	27	45	77	93	
146	187	201	3	47	75	132	102	165	167	213	21	37	86	
182	210	12	56	67	126	138	78	96	157	176	222	30	32	
202	6	48	62	135	147	191	41	87	105	152	168	216	22	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211
194	196	4	50	69	130	148	88	100	159	170	214	16	44
133	149	181	199	5	54	70	160	174	215	19	31	89	103
55	73	134	136	184	200	9	219	20	34	76	104	163	175
204	10	58	74	121	139	185	35	79	91	164	178	220	24
140	189	205	13	59	61	124	94	151	179	223	25	39	80
64	125	144	190	208	14	46	166	224	28	40	84	95	154
72	131	142	186	198	2	60	180	212	18	36	82	101	162
146	187	201	3	47	75	132	102	165	167	213	21	37	86
202	6	48	62	135	147	191	41	87	105	152	168	216	22
51	63	122	150	192	206	7	217	26	42	90	92	153	171
123	137	195	207	11	52	66	156	172	221	27	45	77	93
182	210	12	56	67	126	138	78	96	157	176	222	30	32
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225

⑥
行 B_1 列 B_4
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211
200	9	55	73	134	136	184	34	76	104	163	175	219	20
190	208	14	46	64	125	144	84	95	154	166	224	28	40
149	181	199	5	54	70	133	103	160	174	215	19	31	89
124	140	189	205	13	59	61	151	179	223	25	39	80	94
69	130	148	194	196	4	50	170	214	16	44	88	100	159
58	74	121	139	185	204	10	220	24	35	79	91	164	178
48	62	135	147	191	202	6	216	22	41	87	105	152	168
67	126	138	182	210	12	56	176	222	30	32	78	96	157
132	146	187	201	3	47	75	165	167	213	21	37	86	102
137	195	207	11	52	66	123	93	156	172	221	27	45	77
186	198	2	60	72	131	142	82	101	162	180	212	18	36
206	7	51	63	122	150	192	42	90	92	153	171	217	26
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225

⑦
行 B_1 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211
149	181	199	5	54	70	133	103	160	174	215	19	31	89
58	74	121	139	185	204	10	220	24	35	79	91	164	178
190	208	14	46	64	125	144	84	95	154	166	224	28	40
69	130	148	194	196	4	50	170	214	16	44	88	100	159
200	9	55	73	134	136	184	34	76	104	163	175	219	20
124	140	189	205	13	59	61	151	179	223	25	39	80	94
132	146	187	201	3	47	75	165	167	213	21	37	86	102
206	7	51	63	122	150	192	42	90	92	153	171	217	26
67	126	138	182	210	12	56	176	222	30	32	78	96	157
186	198	2	60	72	131	142	82	101	162	180	212	18	36
48	62	135	147	191	202	6	216	22	41	87	105	152	168
137	195	207	11	52	66	123	93	156	172	221	27	45	77
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225

⑧
行 B_1 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211
199	5	54	70	133	149	181	31	89	103	160	174	215	19
185	204	10	58	74	121	139	79	91	164	178	220	24	35
144	190	208	14	46	64	125	95	154	166	224	28	40	84
130	148	194	196	4	50	69	159	170	214	16	44	88	100
73	134	136	184	200	9	55	175	219	20	34	76	104	163
59	61	124	140	189	205	13	223	25	39	80	94	151	179
47	75	132	146	187	201	3	213	21	37	86	102	165	167
63	122	150	192	206	7	51	171	217	26	42	90	92	153
126	138	182	210	12	56	67	157	176	222	30	32	78	96
142	186	198	2	60	72	131	101	162	180	212	18	36	82
191	202	6	48	62	135	147	87	105	152	168	216	22	41
207	11	52	66	123	137	195	45	77	93	156	172	221	27
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225

⑨
行 B_1 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	49	65	129	145	193	209	29	43	85	99	155	169	211	
59	61	124	140	189	205	13	223	25	39	80	94	151	179	⑩
73	134	136	184	200	9	55	175	219	20	34	76	104	163	行 B_1 列 B_6
130	148	194	196	4	50	69	159	170	214	16	44	88	100	各行各列
144	190	208	14	46	64	125	95	154	166	224	28	40	84	1582
185	204	10	58	74	121	139	79	91	164	178	220	24	35	242046
199	5	54	70	133	149	181	31	89	103	160	174	215	19	
207	11	52	66	123	137	195	45	77	93	156	172	221	27	对角线组
191	202	6	48	62	135	147	87	105	152	168	216	22	41	A_1
142	186	198	2	60	72	131	101	162	180	212	18	36	82	
126	138	182	210	12	56	67	157	176	222	30	32	78	96	
63	122	150	192	206	7	51	171	217	26	42	90	92	153	
47	75	132	146	187	201	3	213	21	37	86	102	165	167	
15	57	71	127	141	183	197	17	33	81	97	161	177	225	

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211	
205	14	49	69	133	136	185	35	76	103	159	169	224	25	①
184	204	13	46	65	130	149	89	100	155	166	223	24	34	行 B_2 列 B_3
148	181	200	10	59	64	129	99	154	179	220	20	31	88	各行各列
125	145	194	199	9	58	61	151	178	219	19	44	85	95	1582
74	124	144	193	196	5	55	175	215	16	43	84	94	164	242046
54	73	121	140	190	209	4	214	40	29	80	91	163	174	
52	63	135	146	186	197	12	222	17	36	86	105	153	172	对角线组
62	132	142	183	210	11	51	171	221	30	33	82	102	152	A_0
131	141	182	207	7	48	75	165	168	217	27	32	81	101	
138	195	206	6	47	72	127	97	162	167	216	26	45	78	
192	202	3	60	71	126	137	77	96	161	180	213	22	42	
201	2	57	67	123	150	191	41	90	93	157	177	212	21	
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225	

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211	
148	181	200	10	59	64	129	99	154	179	220	20	31	88	②
54	73	121	140	190	209	4	214	40	29	80	91	163	174	行 B_2 列 B_3
184	204	13	46	65	130	149	89	100	155	166	223	24	34	各行各列
74	124	144	193	196	5	55	175	215	16	43	84	94	164	1582
205	14	49	69	133	136	185	35	76	103	159	169	224	25	242046
125	145	194	199	9	58	61	151	178	219	19	44	85	95	
131	141	182	207	7	48	75	165	168	217	27	32	81	101	对角线组
201	2	57	67	123	150	191	41	90	93	157	177	212	21	A_1
62	132	142	183	210	11	51	171	221	30	33	82	102	152	
192	202	3	60	71	126	137	77	96	161	180	213	22	42	
52	63	135	146	186	197	12	222	17	36	86	105	153	172	
138	195	206	6	47	72	127	97	162	167	216	26	45	78	
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225	

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211	
204	13	46	65	130	149	184	34	89	100	155	166	223	24	③
194	199	9	58	61	125	145	85	95	151	178	219	19	44	行 B_2 列 B_4
140	190	209	4	54	73	121	91	163	174	214	40	29	80	各行各列
133	136	185	205	14	49	69	159	169	224	25	35	76	103	1582
64	129	148	181	200	10	59	179	220	20	31	88	99	154	242046
55	74	124	144	193	196	5	215	16	43	84	94	164	175	
51	62	132	142	183	210	11	221	30	33	82	102	152	171	对角线组
72	127	138	195	206	6	47	167	216	26	45	78	97	162	A_0
123	150	191	201	2	57	67	157	177	212	21	41	90	93	
146	186	197	12	52	63	135	105	153	172	222	17	36	86	
182	207	7	48	75	131	141	81	101	165	168	217	27	32	
202	3	60	71	126	137	192	42	77	96	161	180	213	22	
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225	

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211
133	136	185	205	14	49	69	159	169	224	25	35	76	103
204	13	46	65	130	149	184	34	89	100	155	166	223	24
64	129	148	181	200	10	59	179	220	20	31	88	99	154
194	199	9	58	61	125	145	85	95	151	178	219	19	44
55	74	124	144	193	196	5	215	16	43	84	94	164	175
140	190	209	4	54	73	121	91	163	174	214	40	29	80
146	186	197	12	52	63	135	105	153	172	222	17	36	86
51	62	132	142	183	210	11	221	30	33	82	102	152	171
182	207	7	48	75	131	141	81	101	165	168	217	27	32
72	127	138	195	206	6	47	167	216	26	45	78	97	162
202	3	60	71	126	137	192	42	77	96	161	180	213	22
123	150	191	201	2	57	67	157	177	212	21	41	90	93
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225

④
行 B_2 列 B_4
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211
200	10	59	64	129	148	181	31	88	99	154	179	220	20
190	209	4	54	73	121	140	80	91	163	174	214	29	40
149	184	204	13	46	65	130	100	155	166	223	24	34	89
124	144	193	196	5	55	74	164	175	215	16	43	84	94
69	133	136	185	205	14	49	169	224	25	35	76	103	159
58	61	125	145	194	199	9	219	19	44	85	95	151	178
48	75	131	141	182	207	7	217	27	32	81	101	165	168
67	123	150	191	201	2	57	177	212	21	41	90	93	157
132	142	183	210	11	51	62	152	171	221	30	33	82	102
137	192	202	3	60	71	126	96	161	180	213	22	42	77
186	197	12	52	63	135	146	86	105	153	172	222	17	36
206	6	47	72	127	138	195	45	78	97	162	167	216	26
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225

⑤
行 B_2 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211
58	61	125	145	194	199	9	219	19	44	85	95	151	178
69	133	136	185	205	14	49	169	224	25	35	76	103	159
124	144	193	196	5	55	74	164	175	215	16	43	84	94
149	184	204	13	46	65	130	100	155	166	223	24	34	89
190	209	4	54	73	121	140	80	91	163	174	214	29	40
200	10	59	64	129	148	181	31	88	99	154	179	220	20
206	6	47	72	127	138	195	45	78	97	162	167	216	26
186	197	12	52	63	135	146	86	105	153	172	222	17	36
137	192	202	3	60	71	126	96	161	180	213	22	42	77
132	142	183	210	11	51	62	152	171	221	30	33	82	102
67	123	150	191	201	2	57	177	212	21	41	90	93	157
48	75	131	141	182	207	7	217	27	32	81	101	165	168
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225

⑥
行 B_2 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211
199	9	58	61	125	145	194	44	85	95	151	178	219	19
185	205	14	49	69	133	136	76	103	159	169	224	25	35
144	193	196	5	55	74	124	94	164	175	215	16	43	84
130	149	184	204	13	46	65	155	166	223	24	34	89	100
73	121	140	190	209	4	54	174	214	40	29	80	91	163
59	64	129	148	181	200	10	220	20	31	88	99	154	179
47	72	127	138	195	206	6	216	26	45	78	97	162	167
63	135	146	186	197	12	52	172	222	17	36	86	105	153
126	137	192	202	3	60	71	161	180	213	22	42	77	96
142	183	210	11	51	62	132	102	152	171	221	30	33	82
191	201	2	57	67	123	150	90	93	157	177	212	21	41
207	7	48	75	131	141	182	32	81	101	165	168	217	27
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225

⑦
行 B_2 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	50	70	134	139	189	208	28	39	79	104	160	170	211
73	121	140	190	209	4	54	174	214	40	29	80	91	163
144	193	196	5	55	74	124	94	164	175	215	16	43	84
199	9	58	61	125	145	194	44	85	95	151	178	219	19
59	64	129	148	181	200	10	220	20	31	88	99	154	179
130	149	184	204	13	46	65	155	166	223	24	34	89	100
185	205	14	49	69	133	136	76	103	159	169	224	25	35
191	201	2	57	67	123	150	90	93	157	177	212	21	41
126	137	192	202	3	60	71	161	180	213	22	42	77	96
47	72	127	138	195	206	6	216	26	45	78	97	162	167
207	7	48	75	131	141	182	32	81	101	165	168	217	27
142	183	210	11	51	62	132	102	152	171	221	30	33	82
63	135	146	186	197	12	52	172	222	17	36	86	105	153
15	56	66	122	147	187	198	18	37	87	92	156	176	225

⑧
行 B_2 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211
204	14	50	73	124	145	181	31	85	94	163	170	224	24
194	200	13	49	70	121	144	84	91	160	169	223	20	44
140	193	199	10	46	69	134	104	159	166	220	19	43	80
133	139	190	196	9	59	65	155	179	219	16	40	79	103
64	130	136	189	209	5	58	178	215	29	39	76	100	154
55	61	129	149	185	208	4	214	28	35	89	99	151	175
51	75	127	137	191	198	12	222	18	41	77	97	165	171
72	126	150	187	197	11	48	168	221	17	37	90	96	162
123	147	186	210	7	47	71	161	167	217	30	36	87	93
146	183	207	6	60	67	122	92	157	180	216	27	33	86
182	206	3	57	66	135	142	82	105	156	177	213	26	32
202	2	56	63	132	141	195	45	81	102	153	176	212	22
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225

⑨
行 B_3 列 B_4
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211
55	61	129	149	185	208	4	214	28	35	89	99	151	175
64	130	136	189	209	5	58	178	215	29	39	76	100	154
133	139	190	196	9	59	65	155	179	219	16	40	79	103
140	193	199	10	46	69	134	104	159	166	220	19	43	80
194	200	13	49	70	121	144	84	91	160	169	223	20	44
204	14	50	73	124	145	181	31	85	94	163	170	224	24
202	2	56	63	132	141	195	45	81	102	153	176	212	22
182	206	3	57	66	135	142	82	105	156	177	213	26	32
146	183	207	6	60	67	122	92	157	180	216	27	33	86
123	147	186	210	7	47	71	161	167	217	30	36	87	93
72	126	150	187	197	11	48	168	221	17	37	90	96	162
51	75	127	137	191	198	12	222	18	41	77	97	165	171
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225

⑩
行 B_3 列 B_4
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211
200	13	49	70	121	144	194	44	84	91	160	169	223	20
190	196	9	59	65	133	139	79	103	155	179	219	16	40
149	185	208	4	55	61	129	99	151	175	214	28	35	89
124	145	181	204	14	50	73	163	170	224	24	31	85	94
69	134	140	193	199	10	46	166	220	19	43	80	104	159
58	64	130	136	189	209	5	215	29	39	76	100	154	178
48	72	126	150	187	197	11	221	17	37	90	96	162	168
67	122	146	183	207	6	60	180	216	27	33	86	92	157
132	141	195	202	2	56	63	153	176	212	22	45	81	102
137	191	198	12	51	75	127	97	165	171	222	18	41	77
186	210	7	47	71	123	147	87	93	161	167	217	30	36
206	3	57	66	135	142	182	32	82	105	156	177	213	26
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225

①
行 B_3 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211	② 行 B_3 列 B_5 各行各列 1582 242046 对角线组 A_1
190	196	9	59	65	133	139	79	103	155	179	219	16	40	
124	145	181	204	14	50	73	163	170	224	24	31	85	94	
58	64	130	136	189	209	5	215	29	39	76	100	154	178	
200	13	49	70	121	144	194	44	84	91	160	169	223	20	
149	185	208	4	55	61	129	99	151	175	214	28	35	89	
69	134	140	193	199	10	46	166	220	19	43	80	104	159	
67	122	146	183	207	6	60	180	216	27	33	86	92	157	
137	191	198	12	51	75	127	97	165	171	222	18	41	77	
206	3	57	66	135	142	182	32	82	105	156	177	213	26	
48	72	126	150	187	197	11	221	17	37	90	96	162	168	
132	141	195	202	2	56	63	153	176	212	22	45	81	102	
186	210	7	47	71	123	147	87	93	161	167	217	30	36	
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225	

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211	③ 行 B_3 列 B_6 各行各列 1582 242046 对角线组 A_0
199	10	46	69	134	140	193	43	80	104	159	166	220	19	
185	208	4	55	61	129	149	89	99	151	175	214	28	35	
144	194	200	13	49	70	121	91	160	169	223	20	44	84	
130	136	189	209	5	58	64	154	178	215	29	39	76	100	
73	124	145	181	204	14	50	170	224	24	31	85	94	163	
59	65	133	139	190	196	9	219	16	40	79	103	155	179	
47	71	123	147	186	210	7	217	30	36	87	93	161	167	
63	132	141	195	202	2	56	176	212	22	45	81	102	153	
126	150	187	197	11	48	72	162	168	221	17	37	90	96	
142	182	206	3	57	66	135	105	156	177	213	26	32	82	
191	198	12	51	75	127	137	77	97	165	171	222	18	41	
207	6	60	67	122	146	183	33	86	92	157	180	216	27	
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225	

1	54	74	125	148	184	205	25	34	88	95	164	174	211	④ 行 B_3 列 B_6 各行各列 1582 242046 对角线组 A_1
130	136	189	209	5	58	64	154	178	215	29	39	76	100	
199	10	46	69	134	140	193	43	80	104	159	166	220	19	
73	124	145	181	204	14	50	170	224	24	31	85	94	163	
185	208	4	55	61	129	149	89	99	151	175	214	28	35	
59	65	133	139	190	196	9	219	16	40	79	103	155	179	
144	194	200	13	49	70	121	91	160	169	223	20	44	84	
142	182	206	3	57	66	135	105	156	177	213	26	32	82	
47	71	123	147	186	210	7	217	30	36	87	93	161	167	
191	198	12	51	75	127	137	77	97	165	171	222	18	41	
63	132	141	195	202	2	56	176	212	22	45	81	102	153	
207	6	60	67	122	146	183	33	86	92	157	180	216	27	
126	150	187	197	11	48	72	162	168	221	17	37	90	96	
15	52	62	131	138	192	201	21	42	78	101	152	172	225	

1	55	64	133	140	194	204	24	44	80	103	154	175	211	⑤ 行 B_4 列 B_5 各行各列 1582 242046 对角线组 A_0
200	14	54	61	130	139	193	43	79	100	151	174	224	20	
190	199	13	50	74	129	136	76	99	164	170	223	19	40	
149	189	196	10	49	73	125	95	163	169	220	16	39	89	
124	148	185	209	9	46	70	160	166	219	29	35	88	94	
69	121	145	184	208	5	59	179	215	28	34	85	91	159	
58	65	134	144	181	205	4	214	25	31	84	104	155	178	
48	71	122	142	195	201	12	222	21	45	82	92	161	168	
67	135	141	192	198	11	47	167	221	18	42	81	105	157	
132	138	191	197	7	60	66	156	180	217	17	41	78	102	
137	187	210	6	57	63	131	101	153	177	216	30	37	77	
186	207	3	56	62	127	150	90	97	152	176	213	27	36	
206	2	52	75	126	147	183	33	87	96	165	172	212	26	
15	51	72	123	146	182	202	22	32	86	93	162	171	225	

1	55	64	133	140	194	204	24	44	80	103	154	175	211
69	121	145	184	208	5	59	179	215	28	34	85	91	159
149	189	196	10	49	73	125	95	163	169	220	16	39	89
200	14	54	61	130	139	193	43	79	100	151	174	224	20
58	65	134	144	181	205	4	214	25	31	84	104	155	178
124	148	185	209	9	46	70	160	166	219	29	35	88	94
190	199	13	50	74	129	136	76	99	164	170	223	19	40
186	207	3	56	62	127	150	90	97	152	176	213	27	36
132	138	191	197	7	60	66	156	180	217	17	41	78	102
48	71	122	142	195	201	12	222	21	45	82	92	161	168
206	2	52	75	126	147	183	33	87	96	165	172	212	26
137	187	210	6	57	63	131	101	153	177	216	30	37	77
67	135	141	192	198	11	47	167	221	18	42	81	105	157
15	51	72	123	146	182	202	22	32	86	93	162	171	225

⑥
行 B_4 列 B_5
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	55	64	133	140	194	204	24	44	80	103	154	175	211
199	13	50	74	129	136	190	40	76	99	164	170	223	19
185	209	9	46	70	124	148	88	94	160	166	219	29	35
144	181	205	4	58	65	134	104	155	178	214	25	31	84
130	139	193	200	14	54	61	151	174	224	20	43	79	100
73	125	149	189	196	10	49	169	220	16	39	89	95	163
59	69	121	145	184	208	5	215	28	34	85	91	159	179
47	67	135	141	192	198	11	221	18	42	81	105	157	167
63	131	137	187	210	6	57	177	216	30	37	77	101	153
126	147	183	206	2	52	75	165	172	212	26	33	87	96
142	195	201	12	48	71	122	92	161	168	222	21	45	82
191	197	7	60	66	132	138	78	102	156	180	217	17	41
207	3	56	62	127	150	186	36	90	97	152	176	213	27
15	51	72	123	146	182	202	22	32	86	93	162	171	225

⑦
行 B_4 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	55	64	133	140	194	204	24	44	80	103	154	175	211
144	181	205	4	58	65	134	104	155	178	214	25	31	84
59	69	121	145	184	208	5	215	28	34	85	91	159	179
185	209	9	46	70	124	148	88	94	160	166	219	29	35
73	125	149	189	196	10	49	169	220	16	39	89	95	163
199	13	50	74	129	136	190	40	76	99	164	170	223	19
130	139	193	200	14	54	61	151	174	224	20	43	79	100
126	147	183	206	2	52	75	165	172	212	26	33	87	96
207	3	56	62	127	150	186	36	90	97	152	176	213	27
63	131	137	187	210	6	57	177	216	30	37	77	101	153
191	197	7	60	66	132	138	78	102	156	180	217	17	41
47	67	135	141	192	198	11	221	18	42	81	105	157	167
142	195	201	12	48	71	122	92	161	168	222	21	45	82
15	51	72	123	146	182	202	22	32	86	93	162	171	225

⑧
行 B_4 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_1

1	58	69	124	149	190	200	20	40	89	94	159	178	211
199	14	55	65	121	148	189	39	88	91	155	175	224	19
185	196	13	54	64	134	145	85	104	154	174	223	16	35
144	184	209	10	50	61	133	103	151	170	220	29	34	84
130	140	181	208	9	49	74	164	169	219	28	31	80	100
73	129	139	194	205	5	46	166	215	25	44	79	99	163
59	70	125	136	193	204	4	214	24	43	76	95	160	179
47	66	131	150	183	202	12	222	22	33	90	101	156	167
63	127	147	182	201	11	60	180	221	21	32	87	97	153
126	146	195	198	7	57	62	152	177	217	18	45	86	96
142	192	197	6	56	75	123	93	165	176	216	17	42	82
191	210	3	52	72	122	141	81	92	162	172	213	30	41
207	2	51	71	135	138	187	37	78	105	161	171	212	27
15	48	67	132	137	186	206	26	36	77	102	157	168	225

⑨
行 B_5 列 B_6
各行各列
1582
242046

对角线组
A_0

1	58	69	124	149	190	200	20	40	89	94	159	178	211	
185	196	13	54	64	134	145	85	104	154	174	223	16	35	⑩
130	140	181	208	9	49	74	164	169	219	28	31	80	100	行 B_5 列 B_6
59	70	125	136	193	204	4	214	24	43	76	95	160	179	各行各列
199	14	55	65	121	148	189	39	88	91	155	175	224	19	1582
144	184	209	10	50	61	133	103	151	170	220	29	34	84	242046
73	129	139	194	205	5	46	166	215	25	44	79	99	163	
63	127	147	182	201	11	60	180	221	21	32	87	97	153	对角线组
142	192	197	6	56	75	123	93	165	176	216	17	42	82	A_1
207	2	51	71	135	138	187	37	78	105	161	171	212	27	
47	66	131	150	183	202	12	222	22	33	90	101	156	167	
126	146	195	198	7	57	62	152	177	217	18	45	86	96	
191	210	3	52	72	122	141	81	92	162	172	213	30	41	
15	48	67	132	137	186	206	26	36	77	102	157	168	225	

上列共得30个14阶平方完美幻方. 每一个平方完美幻方中含有7个3次特优的主对角线, 即可作成 7 个 3 次特优的 14 阶平方完美幻方. 因此, 这里可得 30×7= 210 个 3 次特优的 14 阶平方完美幻方. 对 1, 2 应有同样的结果.

六、18 阶特优的平方完美幻方

$n = 18 = 2\times9 = 3\times6$. 这里有互补 2 等分可幻排列:

(1)(1,2,3,16,14,15,19,20,18;23,22,21,8,10,9,5,4,6)

(2)(1,2,3,15,16,14,20,18,19;23,22,21,9,8,10,4,6,5)等. (36)

这里首先给出如下 23 阶方阵:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
3	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
4	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
5	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
6	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138
7	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161
8	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184
9	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
10	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
11	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253
12	254	255	256	257	258	559	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276
13	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299
14	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322
15	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345
16	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368
17	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391
18	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414
19	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437
20	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
21	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483
22	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506
23	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529

(37)

删去方阵(37)中第 7, 11, 12, 13, 17 列, 行, 余下以排列

(1) (1,2,3,16,14,15,19,20,18;23,22,21,8,10,9,5,4,6)

为行、列序构作 18 阶分段方如下:

			P											Q				
1	2	3	16	14	15	19	20	18	23	22	21	8	10	9	5	4	6	108
24	25	26	39	37	38	42	43	41	46	45	44	31	33	32	28	27	29	315
47	48	49	62	60	61	65	66	64	69	68	67	54	56	55	51	50	52	522
346	347	348	361	359	360	364	365	363	368	367	366	353	355	354	350	349	351	3213
300	301	302	315	313	314	318	319	317	322	321	320	307	309	308	304	303	305	2799
323	324	325	338	336	337	341	342	340	345	344	343	330	332	331	327	326	328	3006
415	416	417	430	428	429	433	434	432	437	436	435	422	424	423	419	418	420	3834
438	439	440	453	451	452	456	457	455	460	459	458	445	447	446	442	441	443	4041
392	393	394	407	405	406	410	411	409	414	413	412	399	401	400	396	395	397	3627
			Q'											P'				
507	508	509	522	520	521	525	526	524	529	528	527	514	516	515	511	510	512	4662
484	485	486	499	497	498	502	503	501	506	505	504	491	493	492	488	487	489	4455
461	462	463	476	474	475	479	480	478	483	482	481	468	470	469	465	464	466	4248
162	163	164	177	175	176	180	181	179	184	183	182	169	171	170	166	165	167	1557
208	209	210	223	221	222	226	227	225	230	229	228	215	217	216	212	211	213	1971
185	186	187	200	198	199	203	204	202	207	206	205	192	194	193	189	188	190	1764
93	94	95	108	106	107	111	112	110	115	114	113	100	102	101	97	96	98	936
70	71	72	85	83	84	88	89	87	92	91	90	77	79	78	74	73	75	729
116	117	118	131	129	130	134	135	133	138	137	136	123	125	124	120	119	121	1143

$a \in P(Q)$, $b \in P'(Q')$, $a + b = 530$, $\Sigma_{18} = 4770$.

这是对顶互补方: $a + b = 530$. 除 A_0, A_1 外, 对顶各 9 阶方之 $B_1, B_2, B_5, B_3, C_3, B_8, B_7, B_4, B_6, C_6$ 其变换可参考特优的 9 阶完美幻方所用的 9 级排列变换.都应当是 9 阶列(行)和方. 且次和

$$21465/9 = 2385, \qquad \Sigma_{18} = 530 \times 18 + 2 = 4770. \tag{38}$$

PA₀									P' A₀			次和	2		3				
1	2	3	16	14	15	19	20	18	529	528	527	514	516	515	511	510	512	2417172	1251705240
24	25	26	39	37	38	42	43	41	506	505	504	491	493	492	488	487	489	2217210	1092735450
47	48	49	62	60	61	65	66	64	483	482	481	468	470	469	465	464	466	2036292	846513000
346	347	348	361	359	360	364	365	363	184	183	182	169	171	170	166	165	167	1417362	456856290
300	301	302	315	313	314	318	319	317	230	229	228	215	217	216	212	211	213	1303098	366016410
323	324	325	338	336	337	341	342	340	207	206	205	192	194	193	189	188	190	1350708	403866360
415	416	417	430	428	429	433	434	432	115	114	113	100	102	101	97	96	98	1731588	706665960
438	439	440	453	451	452	456	457	455	92	91	90	77	79	78	74	73	75	1874418	820215810
392	393	394	407	405	406	410	411	409	138	137	136	123	125	124	120	119	121	1607802	608256090
Q A₀							Q' A₀												
23	22	21	8	10	9	5	4	6	507	508	509	522	520	521	525	526	524	2417172	1251705240
46	45	44	31	33	32	28	27	29	484	485	486	499	497	498	502	503	501	2217210	1092735450
69	68	67	54	56	55	51	50	52	461	462	463	476	474	475	479	480	478	2036292	846513000
368	367	366	353	355	354	350	349	351	162	163	164	177	175	176	180	181	179	1417362	456856290
322	321	320	307	309	308	304	303	305	208	209	210	223	221	222	226	227	225	1303098	366016410
345	344	343	330	332	331	327	326	328	185	186	187	200	198	199	203	204	202	1350708	403866360
437	436	435	422	424	423	419	418	420	93	94	95	108	106	107	111	112	110	1731588	706665960
460	459	458	445	447	446	442	441	443	70	71	72	85	83	84	88	89	87	1874418	820215810
414	413	412	399	401	400	396	395	397	116	117	118	131	129	130	134	135	133	1607802	608256090

$a \in P(Q)$, $b \in P'(Q')$, $a + b = 530$. A_0, A_1 各行和 $\Sigma_{18} = 530 \times 18 = 4770$.

	PA_1										$P'A_1$								
1	24	47	346	300	323	415	438	392	529	506	483	184	230	207	115	92	138	1774068	740437560
2	25	48	347	301	324	416	439	393	528	505	482	183	229	206	114	91	137	1773690	740137050
3	26	49	348	302	325	417	440	394	527	504	481	182	228	205	113	90	136	1773348	739865160
16	39	62	361	315	338	430	453	407	514	491	468	169	215	192	100	77	123	1772178	738935010
14	37	60	359	313	336	428	451	405	516	493	470	171	217	194	102	79	125	1771962	738763290
15	38	61	360	314	337	429	452	406	515	492	469	170	216	193	101	78	124	1772052	738834840
19	42	65	364	318	341	433	456	410	511	488	465	166	212	189	97	74	120	1772772	739407240
20	43	66	365	319	342	434	457	411	510	487	464	165	211	188	96	73	119	1773042	739621890
18	41	64	363	317	340	432	455	409	512	489	466	167	213	190	98	75	121	1772538	739221210
	QA_1										$Q'A_1$								
23	46	69	368	322	345	437	460	414	507	484	461	162	208	185	93	70	116	1774068	740437560
22	45	68	367	321	344	436	459	413	508	485	462	163	209	186	94	71	117	1773690	740137050
21	44	67	366	320	343	435	458	412	509	486	463	164	210	187	95	72	118	1773348	739865160
8	31	54	353	307	330	422	445	399	522	499	476	177	223	200	108	85	131	1772178	738935010
10	33	56	355	309	332	424	447	401	520	497	474	175	221	198	106	83	129	1771962	738763290
9	32	55	354	308	331	423	446	400	521	498	475	176	222	199	107	84	130	1772052	738834840
5	28	51	350	304	327	419	442	396	525	502	479	180	226	203	111	88	134	1772772	739407240
4	27	50	349	303	326	418	441	395	526	503	480	181	227	204	112	89	135	1773042	739621890
6	29	52	351	305	328	420	443	397	524	501	478	179	225	202	110	87	133	1772538	739221210
	PB_1										$Q'B_1$				2 次和			1772850	
15	42	66	363	300	324	417	453	405	521	502	480	179	208	186	95	85	129	896637	
19	43	64	346	301	325	430	451	406	525	503	478	162	209	187	108	83	130	897465	
20	41	47	347	302	338	428	452	410	526	501	461	163	210	200	106	84	134	887115	
18	24	48	348	315	336	429	456	411	524	484	462	164	223	198	107	88	135	875523	
1	25	49	361	313	337	433	457	409	507	485	463	177	221	199	111	89	133	864345	
2	26	62	359	314	341	434	455	392	508	486	476	175	222	203	112	87	116	875523	
3	39	60	360	318	342	432	438	393	509	499	474	176	226	204	110	70	117	887115	
16	37	61	364	319	340	415	439	394	522	497	475	180	227	202	93	71	118	897465	
14	38	65	365	317	323	416	440	407	520	498	479	181	225	185	94	72	131	896637	
	QB_1										$P'B_1$								
9	28	50	351	322	344	435	445	401	515	488	464	167	230	206	113	77	125	876213+896637	
5	27	52	368	321	343	422	447	400	511	487	466	184	229	205	100	79	124	875385+897465	
4	29	69	367	320	330	424	446	396	510	489	483	183	228	192	102	78	120	885735+887115	
6	46	68	366	307	332	423	442	395	512	506	482	182	215	194	101	74	119	897327+875523	
23	45	67	353	309	331	419	441	397	529	505	481	169	217	193	97	73	121	908505+864345	
22	44	54	355	308	327	418	443	414	528	504	468	171	216	189	96	75	138	897327+875523	
21	31	56	354	304	326	420	460	413	527	491	470	170	212	188	98	92	137	885735+887115	
8	33	55	350	303	328	437	459	412	514	493	469	166	211	190	115	91	136	875385+897465	
10	32	51	349	305	345	436	458	399	516	492	465	165	213	207	114	90	123	876213+896637	

通过计算有结论:

1. A_0, A_1 以 P, P', Q, Q'分别为行.其各行之幻和: $\Sigma_{18}=530\times18=4770$, 且有对应相等的 2 次, 3 次特优线. 因此以 A_0, A_1 为对角线组可得 3 次特优的 18 阶完美幻方.

2. 列和方 $B_1, B_4, B_7; B_2, B_5, B_8$ 仍是分别对 9 阶方 P, P', Q, Q'执行 Z 变换的结果. 并且对顶互补. 其各行之幻和: $\Sigma_{18}=2385\times2=4770$. 因此, 所有这些小方的各行 1 次和都等于半幻和: 2385. 且 2 次和都是 1772850. 且在各列和方对 B_2 与 B_5; B_4 与 B_7 中, 有对应相等的 2 次和的对应列. 但这些 2 次和与 A_0, A_1 的所有 2 次和均不相等.

3. 列和方 B_1 是 4 对半平方和对称相等之方. 因此, B_1 分别与 B_2, B_5, B_8 配对作完美幻方的行列线组, 可分别组合出以 A_0, A_1 为对角线组的 3 次特优的 18 阶平方完美幻方. 这些已在后面给出了. 而在下列各方中, 每一个又各含有 9 对不同的 3 次特优主对角线.

	PB_4								$Q'B_4$									1772850
1	37	64	361	319	325	433	439	406	507	497	478	177	227	187	111	71	130	884631
2	38	47	359	317	338	434	440	410	508	498	461	175	225	200	112	72	134	875523
3	42	48	360	300	336	432	453	411	509	502	462	176	208	198	110	85	135	875523
16	43	49	364	301	337	415	451	409	522	503	463	180	209	199	93	83	133	888771
14	41	62	365	302	341	416	452	392	520	501	476	181	210	203	94	84	116	895395
15	24	60	363	315	342	417	456	393	521	484	474	179	223	204	95	88	117	884217
19	25	61	346	313	340	430	457	394	525	485	475	162	221	202	108	89	118	885873
20	26	65	347	314	323	428	455	407	526	486	479	163	222	185	106	87	131	888357
18	39	66	348	318	324	429	438	405	524	499	480	164	226	186	107	70	129	899535
	QB_4								$P'B_4$									
23	33	52	353	303	343	419	459	400	529	493	466	169	211	205	97	91	124	888219+884631
22	32	69	355	305	330	418	458	396	528	492	483	171	213	192	96	90	120	897327+875523
21	28	68	354	322	332	420	445	395	527	488	482	170	230	194	98	77	119	897327+875523
8	27	67	350	321	331	437	447	397	514	487	481	166	229	193	115	79	121	884079+888771
10	29	54	349	320	327	436	446	414	516	489	468	165	228	189	114	78	138	877455+895395
9	46	56	351	307	326	435	442	413	515	506	470	167	215	188	113	74	137	888633+884217
5	45	55	368	309	328	422	441	412	511	505	469	184	217	190	100	73	136	886977+885873
4	44	51	367	308	345	424	443	399	510	504	465	183	216	207	102	75	123	884493+888357
6	31	50	366	304	344	423	460	401	512	491	464	182	212	206	101	92	125	873315+899535

	PB_7								$P'B_7$									1772850
1	43	61	361	301	340	433	451	394	507	503	475	177	209	202	111	83	118	884631
2	41	65	359	302	323	434	452	407	508	501	479	175	210	185	112	84	131	884217
3	24	66	360	315	324	432	456	405	509	484	480	176	223	186	110	88	129	875523
16	25	64	364	313	325	415	457	406	522	485	478	180	221	187	93	89	130	885873
14	26	47	365	314	338	416	455	410	520	486	461	181	222	200	94	87	134	875523
15	39	48	363	318	336	417	438	411	521	499	462	179	226	198	95	70	135	888357
19	37	49	346	319	337	430	439	409	525	497	463	162	227	199	108	71	133	888771
20	38	62	347	317	341	428	440	392	526	498	476	163	225	203	106	72	116	899535
18	42	60	348	300	342	429	453	393	524	502	474	164	208	204	107	85	117	895395
	QB_7								$Q'B_7$									
23	27	55	353	321	328	419	447	412	529	487	469	169	229	190	97	79	136	888219+884631
22	29	51	355	320	345	418	446	399	528	489	465	171	228	207	96	78	123	888633+884217
21	46	50	354	307	344	420	442	401	527	506	464	170	215	206	98	74	125	897327+875523
8	45	52	350	309	343	437	441	400	514	505	466	166	217	205	115	73	124	886977+885873
10	44	69	349	308	330	436	443	396	516	504	483	165	216	192	114	75	120	897327+875523
9	31	68	351	304	332	435	460	395	515	491	482	167	212	194	113	92	119	884493+888357
5	33	67	368	303	331	422	459	397	511	493	481	184	211	193	100	91	121	884079+888771
4	32	54	367	305	327	424	458	414	510	492	468	483	213	189	102	90	138	873315+899535
6	28	56	366	322	326	423	445	413	512	488	470	182	230	188	101	77	137	877455+895395

	PB_8									$Q'B_8$								1772850
1	41	66	364	314	336	430	440	393	507	501	480	180	222	198	108	72	117	889875
2	24	64	365	318	337	428	453	394	508	484	478	181	226	199	106	85	118	876627
3	25	47	363	319	341	429	451	407	509	485	461	179	227	203	107	83	131	867105
16	26	48	346	317	342	433	452	405	522	486	462	162	225	204	111	84	129	876627
14	39	49	347	300	340	434	456	406	520	499	463	163	208	202	112	88	130	881595
15	37	62	348	301	323	432	457	410	521	497	476	164	209	185	110	89	134	887805
19	38	60	361	302	324	415	455	411	525	498	474	177	210	186	93	87	135	892773
20	42	61	359	315	325	416	438	409	526	502	475	175	223	187	94	70	133	901053
18	43	65	360	313	338	417	439	392	524	503	479	176	221	200	95	71	116	904365
	QB_8									$P'B_8$								
23	29	50	350	308	332	422	458	413	529	489	464	166	216	194	100	90	137	882975+889875
22	46	52	349	304	331	424	445	412	528	506	466	165	212	193	102	77	136	896223+876627
21	45	69	351	303	327	423	447	399	527	505	483	167	211	189	101	79	123	905745+867105
8	44	68	368	305	326	419	446	401	514	504	482	184	213	188	97	78	125	896223+876627
10	31	67	367	322	328	418	442	400	516	491	481	183	230	190	96	74	124	891255+881595
9	33	54	366	321	345	420	441	396	515	493	468	182	229	207	98	73	120	885045+887805
5	32	56	353	320	344	437	443	395	511	492	470	169	228	206	115	75	119	880077+892773
4	28	55	355	307	343	436	460	397	510	488	469	171	215	205	114	92	121	871797+901053
6	27	51	354	309	330	435	459	414	512	487	465	170	217	192	113	91	138	868485+904365

	PB_2									$Q'B_2$									1772850
1	26	60	364	317	324	430	452	411	507	486	474	180	225	186	108	84	135		872487
2	39	61	365	300	325	428	456	409	508	499	475	181	208	187	106	88	133		880353
3	37	65	363	301	338	429	457	392	509	497	479	179	209	200	107	89	116		884079
16	38	66	346	302	336	433	455	393	522	498	480	162	210	198	111	87	117		894015
14	42	64	347	315	337	434	438	394	520	502	478	163	223	199	112	70	118		898155
15	43	47	348	313	341	432	439	407	521	503	461	164	221	203	110	71	131		888219
19	41	48	361	314	342	415	440	405	525	501	462	177	222	204	93	72	129		892773
20	24	49	359	318	340	416	453	406	526	484	463	175	226	202	94	85	130		880767
18	25	62	360	319	323	417	451	410	524	485	476	176	227	185	95	83	134		886977
	QB_2									$P'B_2$									
23	44	56	350	305	344	422	446	395	529	504	470	166	213	206	100	78	119		900363+872487
22	31	55	349	322	343	424	442	397	528	491	469	165	230	205	102	74	121		892497+880353
21	33	51	351	321	330	423	441	414	527	493	465	167	229	192	101	73	138		888771+884079
8	32	50	368	320	332	419	443	413	514	492	464	184	228	194	97	75	137		878835+894015
10	28	52	367	307	331	418	460	412	516	488	466	183	215	193	96	92	136		874695+898155
9	27	69	366	309	327	420	459	399	515	487	483	182	217	189	98	91	123		884631+888219
5	29	68	353	308	326	437	458	401	511	489	482	169	216	188	115	90	125		880077+892773
4	46	67	355	304	328	436	445	400	510	506	481	171	212	190	114	77	124		892083+880767
6	45	54	354	303	345	435	447	396	512	505	468	170	211	207	113	79	120		885873+886977

	PB_5									$Q'B_5$									1772850
1	38	48	364	302	342	430	455	405	507	498	462	180	210	204	108	87	129		872487
2	42	49	365	315	340	428	438	406	508	502	463	181	223	202	106	70	130		880767
3	43	62	363	313	323	429	439	410	509	503	476	179	221	185	107	71	134		888219
16	41	60	346	314	324	433	440	411	522	501	474	162	222	186	111	72	135		894015
14	24	61	347	318	325	434	453	409	520	484	475	163	226	187	112	85	133		880353
15	25	65	348	319	338	432	451	392	521	485	479	164	227	200	110	83	116		886977
19	26	66	361	317	336	415	452	393	525	486	480	177	225	198	93	84	117		892773
20	39	64	359	300	337	416	456	394	526	499	478	175	208	199	94	88	118		898155
18	37	47	360	301	341	417	457	407	524	497	461	176	209	203	95	89	131		884079
	QB_5									$P'B_5$									
23	32	68	350	320	326	422	443	401	529	492	482	166	228	188	100	75	125		900363+872487
22	28	67	349	307	328	424	460	400	528	488	481	165	215	190	102	92	124		892083+880767
21	27	54	351	309	345	423	459	396	527	487	468	167	217	207	101	91	120		884631+888219
8	29	56	368	308	344	419	458	395	514	489	470	184	216	206	97	90	119		878835+894015
10	46	55	367	304	343	418	445	397	516	506	469	183	212	205	96	77	121		892497+880353
9	45	51	366	303	330	420	447	414	515	505	465	182	211	192	98	79	138		885873+886977
5	44	50	353	305	332	437	446	413	511	504	464	169	213	194	115	78	137		880077+892773
4	31	52	355	322	331	436	442	412	510	491	466	171	230	193	114	74	136		874695+898155
6	33	69	354	321	327	435	441	399	512	493	483	170	229	189	113	73	123		888771+884079

以 A_0,A_1 为对角线组，其主对角线的各次和(1 次和、2 次和、3 次和)如下：

主对角线组：	A_0 4770		A_1 4770	
(1)	2417172	1251705240	1774068	740437560.
(2)	2217210	1092735450	1773690	740137050.
(3)	2036292	846513000	1773348	739865160.
(4)	1417362	456856290	1772178	738935010.
(5)	1303098	366016410	1771962	738763290.
(6)	1350708	403866360	1772052	738834840.
(7)	1731588	706665960	1772772	739407240.
(8)	1874418	820215810	1773042	739621890.
(9)	1607802	608256090	1772538	739221210.

可得 3 次特优的 18 阶平方完美幻方.

3 次特优的 18 阶平方完美幻方　　对角线组 $\Sigma_{18}=530\times9=4770$

行、列: $\Sigma_{18}=2385\times2=4770$　$\Sigma^2=1772850$

14	38	65	365	317	323	416	440	407	502	480	179	208	186	95	85	129	521	
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503	①
438	393	3	39	60	360	318	342	432	163	210	200	106	84	134	526	501	461	
434	455	392	2	26	62	359	314	341	223	198	107	88	135	524	484	462	164	行 B_1
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221	列 B_2
315	336	429	456	411	18	24	48	348	112	87	116	508	486	476	175	222	203	
347	302	338	428	452	410	20	41	47	70	117	509	499	474	176	226	204	110	A_0
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71	
42	66	363	300	324	417	453	405	15	520	498	479	181	225	185	94	72	131	
28	50	351	322	344	435	445	401	9	516	492	465	165	213	207	114	90	123	
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91	
367	320	330	424	446	396	4	29	69	92	137	527	491	470	170	212	188	98	
307	332	423	442	395	6	46	68	366	96	75	138	528	504	468	171	216	189	
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217	
418	443	414	22	44	54	355	308	327	215	194	101	74	119	512	506	482	182	
460	413	21	31	56	354	304	326	420	183	228	192	102	78	120	510	489	483	
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487	
10	32	51	349	305	345	436	458	399	488	464	167	230	206	113	77	125	515	

438	393	3	39	60	360	318	342	432	163	210	200	106	84	134	526	501	461	
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71	②
434	455	392	2	26	62	359	314	341	223	198	107	88	135	524	484	462	164	
42	66	363	300	324	417	453	405	15	520	498	479	181	225	185	94	72	131	行 B_1
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221	列 B_2
14	38	65	365	317	323	416	440	407	502	480	179	208	186	95	85	129	521	
315	336	429	456	411	18	24	48	348	112	87	116	508	486	476	175	222	203	A_1
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503	
347	302	338	428	452	410	20	41	47	70	117	509	499	474	176	226	204	110	
367	320	330	424	446	396	4	29	69	92	137	527	491	470	170	212	188	98	
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487	
307	332	423	442	395	6	46	68	366	96	75	138	528	504	468	171	216	189	
10	32	51	349	305	345	436	458	399	488	464	167	230	206	113	77	125	515	
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217	
28	50	351	322	344	435	445	401	9	516	492	465	165	213	207	114	90	123	
418	443	414	22	44	54	355	308	327	215	194	101	74	119	512	506	482	182	
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91	
460	413	21	31	56	354	304	326	420	183	228	192	102	78	120	510	489	483	

2	26	62	359	314	341	434	455	392	484	462	164	223	198	107	88	135	524	
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503	③
453	405	15	42	66	363	300	324	417	181	225	185	94	72	131	520	498	479	
428	452	410	20	41	47	347	302	338	226	204	110	70	117	509	499	474	176	行 B_1
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221	列 B_8
318	342	432	438	393	3	39	60	360	106	84	134	526	501	461	163	210	200	
365	317	323	416	440	407	14	38	65	85	129	521	502	480	179	208	186	95	A_0
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71	
24	48	348	315	336	429	456	411	18	508	486	476	175	222	203	112	87	116	
46	68	366	307	332	423	442	395	6	528	504	468	171	216	189	96	75	138	
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91	
349	305	345	436	458	399	10	32	51	77	125	515	488	464	167	230	206	113	
304	326	420	460	413	21	31	56	354	102	78	120	510	489	483	183	228	192	
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217	
424	446	396	4	29	69	367	320	330	212	188	98	92	137	527	491	470	170	
445	401	9	28	50	351	322	344	435	165	213	207	114	90	123	516	492	465	
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487	
22	44	54	355	308	327	418	443	414	506	482	182	215	194	101	74	119	512	

46	68	366	307	332	423	442	395	6	528	504	468	171	216	189	96	75	138
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91
349	305	345	436	458	399	10	32	51	77	125	515	488	464	167	230	206	113
304	326	420	460	413	21	31	56	354	102	78	120	510	489	483	183	228	192
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217
424	446	396	4	29	69	367	320	330	212	188	98	92	137	527	491	470	170
445	401	9	28	50	351	322	344	435	165	213	207	114	90	123	516	492	465
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487
22	44	54	355	308	327	418	443	414	506	482	182	215	194	101	74	119	512
2	26	62	359	314	341	434	455	392	484	462	164	223	198	107	88	135	524
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503
453	405	15	42	66	363	300	324	417	181	225	185	94	72	131	520	498	479
428	452	410	20	41	47	347	302	338	226	204	110	70	117	509	499	474	176
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221
318	342	432	438	393	3	39	60	360	106	84	134	526	501	461	163	210	200
365	317	323	416	440	407	14	38	65	85	129	521	502	480	179	208	186	95
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71
24	48	348	315	336	429	456	411	18	508	486	476	175	222	203	112	87	116

④ 行 B_1 列 B_8 A_1

20	41	47	347	302	338	428	452	410	499	474	176	226	204	110	70	117	509
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503
456	411	18	24	48	348	315	336	429	175	222	203	112	87	116	508	486	476
416	440	407	14	38	65	365	317	323	208	186	95	85	129	521	502	480	179
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221
300	324	417	453	405	15	42	66	363	94	72	131	520	498	479	181	225	185
359	314	341	434	455	392	2	26	62	88	135	524	484	462	164	223	198	107
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71
39	60	360	318	342	432	438	393	3	526	501	461	163	210	200	106	84	134
31	56	354	304	326	420	460	413	21	510	489	483	183	228	192	102	78	120
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91
355	308	327	418	443	414	22	44	54	74	119	512	506	482	182	215	194	101
322	344	435	445	401	9	28	50	351	114	90	123	516	492	465	165	213	207
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217
436	458	399	10	32	51	349	305	345	230	206	113	77	125	515	488	464	167
442	395	6	46	68	366	307	332	423	171	216	189	96	75	138	528	504	468
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487
4	29	69	367	320	330	424	446	396	491	470	170	212	188	98	92	137	527

⑤ 行 B_1 列 B_5 A_0

300	324	417	453	405	15	42	66	363	94	72	131	520	498	479	181	225	185
64	346	301	325	430	451	406	19	43	118	522	497	475	180	227	202	93	71
20	41	47	347	302	338	428	452	410	499	474	176	226	204	110	70	117	509
456	411	18	24	48	348	315	336	429	175	222	203	112	87	116	508	486	476
337	433	457	409	1	25	49	361	313	199	111	89	133	507	485	463	177	221
359	314	341	434	455	392	2	26	62	88	135	524	484	462	164	223	198	107
39	60	360	318	342	432	438	393	3	526	501	461	163	210	200	106	84	134
394	16	37	61	364	319	340	415	439	478	162	209	187	108	83	130	525	503
416	440	407	14	38	65	365	317	323	208	186	95	85	129	521	502	480	179
436	458	399	10	32	51	349	305	345	230	206	113	77	125	515	488	464	167
412	8	33	55	350	303	328	437	459	466	184	229	205	100	79	124	511	487
31	56	354	304	326	420	460	413	21	510	489	483	183	228	192	102	78	120
355	308	327	418	443	414	22	44	54	74	119	512	506	482	182	215	194	101
331	419	441	397	23	45	67	353	309	193	97	73	121	529	505	481	169	217
442	395	6	46	68	366	307	332	423	171	216	189	96	75	138	528	504	468
4	29	69	367	320	330	424	446	396	491	470	170	212	188	98	92	137	527
52	368	321	343	422	447	400	5	27	136	514	493	469	166	211	190	115	91
322	344	435	445	401	9	28	50	351	114	90	123	516	492	465	165	213	207

⑥ 行 B_1 列 B_5 A_1

1	37	64	361	319	325	433	439	406	130	71	111	187	227	177	478	497	507	(1)
411	3	42	48	360	300	336	432	453	85	110	198	208	176	462	502	509	135	
452	392	14	41	62	365	302	341	416	94	203	210	181	476	501	520	116	84	行 B_4
430	457	394	19	25	61	346	313	340	202	221	162	475	485	525	118	89	108	B_2
324	429	438	405	18	39	66	348	318	226	164	480	499	524	129	70	107	186	
317	338	434	440	410	2	38	47	359	175	461	498	508	134	72	112	200	225	A_0
364	301	337	415	451	409	16	43	49	463	503	522	133	83	93	199	209	180	
60	363	315	342	417	456	393	15	24	484	521	117	88	95	204	223	179	474	
26	65	347	314	323	428	455	407	20	526	131	87	106	185	222	163	479	486	A
44	51	367	308	345	424	443	399	4	510	123	75	102	207	216	183	465	504	
56	351	307	326	435	442	413	9	46	506	515	137	74	113	188	215	167	470	
350	321	331	437	447	397	8	27	67	481	487	514	121	79	115	193	229	166	
305	330	418	458	396	22	32	69	355	171	483	492	528	120	90	96	192	213	
344	423	460	401	6	31	50	366	304	212	182	464	491	512	125	92	101	206	
422	441	412	5	45	55	368	309	328	190	217	184	469	505	511	136	73	100	
446	414	10	29	54	349	320	327	436	114	189	228	165	468	489	516	138	78	
395	21	28	68	354	322	332	420	445	77	98	194	230	170	482	488	527	119	
23	33	52	353	303	343	419	459	400	124	91	97	205	211	169	466	493	529	

1	37	64	361	319	325	433	439	406	130	71	111	187	227	177	478	497	507	(2)
405	18	39	66	348	318	324	429	438	70	107	186	226	164	480	499	524	129	
455	407	20	26	65	347	314	323	428	106	185	222	163	479	486	526	131	87	行 B_4
430	457	394	19	25	61	346	313	340	202	221	162	475	485	525	118	89	108	列 B_5
342	417	456	393	15	24	60	363	315	223	179	474	484	521	117	88	95	204	
302	341	416	452	392	14	41	62	365	181	476	501	520	116	84	94	203	210	
364	301	337	415	451	409	16	43	49	463	503	522	133	83	93	199	209	180	A_0
48	360	300	336	432	453	411	3	42	502	509	110	85	135	198	208	176	462	
38	47	359	317	338	434	440	410	2	508	134	72	112	200	225	175	461	498	A_1
32	69	355	305	330	418	458	396	22	528	120	90	96	192	213	171	483	492	
68	354	322	332	420	445	395	21	28	488	527	119	77	98	194	230	170	482	
350	321	331	437	447	397	8	27	67	481	487	514	121	79	115	193	229	166	
320	327	436	446	414	10	29	54	349	165	468	489	516	138	78	114	189	228	
326	435	442	413	9	46	56	351	307	215	167	470	506	515	137	74	113	188	
422	441	412	5	45	55	368	309	328	190	217	184	469	505	511	136	73	100	
443	399	4	44	51	367	308	345	424	102	207	216	183	465	504	510	123	75	
401	6	31	50	366	304	344	423	460	92	101	206	212	182	464	491	512	125	
23	33	52	353	303	343	419	459	400	124	91	97	205	211	169	466	493	529	

1	37	64	361	319	325	433	439	406	130	71	111	187	227	177	478	497	507	(3)
393	15	24	60	363	315	342	417	456	88	95	204	223	179	474	484	521	117	
440	410	2	38	47	359	317	338	434	112	200	225	175	461	498	508	134	72	行 B_4
430	457	394	19	25	61	346	313	340	202	221	162	475	485	525	118	89	108	列 B_8
336	432	453	411	3	42	48	360	300	208	176	462	502	509	110	85	135	198	
314	323	428	455	407	20	26	65	347	163	479	486	526	131	87	106	185	222	
364	301	337	415	451	409	16	43	49	463	503	522	133	83	93	199	209	180	A_0
66	348	318	324	429	438	405	18	39	499	524	129	70	107	186	226	164	480	
41	62	365	302	341	416	452	392	14	520	116	84	94	203	210	181	476	501	A_1
29	54	349	320	327	436	446	414	10	516	138	78	114	189	228	165	468	489	
50	366	304	344	423	460	401	6	31	491	512	125	92	101	206	212	182	464	
350	321	331	437	447	397	8	27	67	481	487	514	121	79	115	193	229	166	
308	345	424	443	399	4	44	51	367	183	465	504	510	123	75	102	207	216	
332	420	445	395	21	28	68	354	322	230	170	482	488	527	119	77	98	194	
422	441	412	5	45	55	368	309	328	190	217	184	469	505	511	136	73	100	
458	396	22	32	69	355	305	330	418	96	192	213	171	483	492	528	120	90	
413	9	46	56	351	307	326	435	442	74	113	188	215	167	470	506	515	137	
23	33	52	353	303	343	419	459	400	124	91	97	205	211	169	466	493	529	

1	37	64	361	319	325	433	439	406	130	71	111	187	227	177	478	497	507	(4)
410	2	38	47	359	317	338	434	440	72	112	200	225	175	461	498	508	134	
453	411	3	42	48	360	300	336	432	135	198	208	176	462	502	509	110	85	行 B_4
415	451	409	16	43	49	364	301	337	199	209	180	463	503	522	133	83	93	列 B_3
341	416	452	392	14	41	62	365	302	210	181	476	501	520	116	84	94	203	
315	342	417	456	393	15	24	60	363	179	474	484	521	117	88	95	204	223	A_0
346	313	340	430	457	394	19	25	61	475	485	525	118	89	108	202	221	162	
65	347	314	323	428	455	407	20	26	486	526	131	87	106	185	222	163	479	
39	66	348	318	324	429	438	405	18	524	129	70	107	186	226	164	480	499	
31	50	366	304	344	423	460	401	6	512	125	92	101	206	212	182	464	491	
51	367	308	345	424	443	399	4	44	504	510	123	75	102	207	216	183	465	
368	309	328	422	441	412	5	45	55	469	505	511	136	73	100	190	217	184	
307	326	435	442	413	9	46	56	351	167	470	506	515	137	74	113	188	215	
327	436	446	414	10	29	54	349	320	228	165	468	489	516	138	78	114	189	
437	447	397	8	27	67	350	321	331	193	229	166	481	487	514	121	79	115	
445	395	21	28	68	354	322	332	420	98	194	230	170	482	488	527	119	77	
396	22	32	69	355	305	330	418	458	90	96	192	213	171	483	492	528	120	
23	33	52	353	303	343	419	459	400	124	91	97	205	211	169	466	493	529	

1	37	64	361	319	325	433	439	406	130	71	111	187	227	177	478	497	507	(5)
407	20	26	65	347	314	323	428	455	87	106	185	222	163	479	486	526	131	
456	393	15	24	60	363	315	342	417	95	204	223	179	474	484	521	117	88	行 B_4
415	451	409	16	43	49	364	301	337	199	209	180	463	503	522	133	83	93	列 B_6
338	434	440	410	2	38	47	359	317	225	175	461	498	508	134	72	112	200	
318	324	429	438	405	18	39	66	348	164	480	499	524	129	70	107	186	226	
346	313	340	430	457	394	19	25	61	475	485	525	118	89	108	202	221	162	
62	365	302	341	416	452	392	14	41	501	520	116	84	94	203	210	181	476	A_0
42	48	360	300	336	432	453	411	3	509	110	85	135	198	208	176	462	502	
28	68	354	322	332	420	445	395	21	527	119	77	98	194	230	170	482	488	
54	349	320	327	436	446	414	10	29	489	516	138	78	114	189	228	165	468	
368	309	328	422	441	412	5	45	55	469	505	511	136	73	100	190	217	184	
304	344	423	460	401	6	31	50	366	182	464	491	512	125	92	101	206	212	
330	418	458	396	22	32	69	355	305	213	171	483	492	528	120	90	96	192	
437	447	397	8	27	67	350	321	331	193	229	166	481	487	514	121	79	115	
442	413	9	46	56	351	307	326	435	113	188	215	167	470	506	515	137	74	
399	4	44	51	367	308	345	424	443	75	102	207	216	183	465	504	510	123	
23	33	52	353	303	343	419	459	400	124	91	97	205	211	169	466	493	529	

1	43	61	361	301	340	433	451	394	118	83	111	202	209	177	475	503	507	(6)
411	15	39	48	363	318	336	417	438	70	95	198	226	179	462	499	521	135	
452	407	2	41	65	359	302	323	434	112	185	210	175	479	501	508	131	84	行 B_7
430	439	409	19	37	49	346	319	337	199	227	162	463	497	525	133	71	108	列 B_2
324	432	456	405	3	24	66	360	315	223	176	480	484	509	129	88	110	186	
317	341	428	440	392	20	38	62	347	163	476	498	526	116	72	106	203	225	
364	313	325	415	457	406	16	25	64	478	485	522	130	89	93	187	221	180	A_0
60	348	300	342	429	453	393	18	42	502	524	117	85	107	204	208	164	474	
26	47	365	314	338	416	455	410	14	520	134	87	94	200	222	181	461	486	A_1
44	69	349	308	330	436	443	396	10	516	120	75	114	192	216	165	483	504	
56	366	322	326	423	445	413	6	28	488	512	137	77	101	188	230	182	470	
350	309	343	437	441	400	8	45	52	466	505	514	124	73	115	205	217	166	
305	327	424	458	414	4	32	54	367	483	468	492	510	138	90	102	189	213	
344	420	442	401	21	46	50	354	307	215	170	464	506	527	125	74	98	206	
422	459	397	5	33	67	368	303	331	193	211	184	481	493	511	121	91	100	
446	399	22	29	51	355	320	345	418	96	207	228	171	465	489	528	123	78	
395	9	31	68	351	304	332	435	460	92	113	194	212	167	482	491	515	119	
23	27	55	353	321	328	419	447	412	136	79	97	190	229	169	469	487	529	

1	43	61	361	301	340	433	451	394	118	83	111	202	209	177	475	503	507	(7)
405	3	24	66	360	315	324	432	456	88	110	186	223	176	480	484	509	129	
455	410	14	26	47	365	314	338	416	94	200	222	181	461	486	520	134	87	行 B_7
430	439	409	19	37	49	346	319	337	199	227	162	463	497	525	133	71	108	列 B_5
342	429	453	393	18	42	60	348	300	208	164	474	502	524	117	85	107	204	
302	323	434	452	407	2	41	65	359	175	479	501	508	131	84	112	185	210	
364	313	325	415	457	406	16	25	64	478	485	522	130	89	93	187	221	180	A_0
48	363	318	336	417	438	411	15	39	499	521	135	70	95	198	226	179	462	
38	62	347	317	341	428	440	392	20	526	116	72	106	203	225	163	476	498	A_1
32	54	367	305	327	424	458	414	4	510	138	90	102	189	213	483	468	492	
68	351	304	332	435	460	395	9	31	491	515	119	92	113	194	212	167	482	
350	309	343	437	441	400	8	45	52	466	505	514	124	73	115	205	217	166	
320	345	418	446	399	22	29	51	355	171	465	489	528	123	78	96	207	228	
326	423	445	413	6	28	56	366	322	230	182	470	488	512	137	77	101	188	
422	459	397	5	33	67	368	303	331	193	211	184	481	493	511	121	91	100	
443	396	10	44	69	349	308	330	436	114	192	216	165	483	504	516	120	75	
401	21	46	50	354	307	344	420	442	74	98	206	215	170	464	506	527	125	
23	27	55	353	321	328	419	447	412	136	79	97	190	229	169	469	487	529	

1	43	61	361	301	340	433	451	394	118	83	111	202	209	177	475	503	507	(8)
393	18	42	60	348	300	342	429	453	85	107	204	208	164	474	502	524	117	
440	392	20	38	62	347	317	341	428	106	203	225	163	476	498	526	116	72	行 B_7
430	439	409	19	37	49	346	319	337	199	227	162	463	497	525	133	71	108	列 B_8
336	417	438	411	15	39	48	363	318	226	179	462	499	521	135	70	95	198	
314	338	416	455	410	14	26	47	365	181	461	486	520	134	87	94	200	222	
364	313	325	415	457	406	16	25	64	478	485	522	130	89	93	187	221	180	A_0
66	360	315	324	432	456	405	3	24	484	509	129	88	110	186	223	176	480	
41	65	359	302	323	434	452	407	2	508	131	84	112	185	210	175	479	501	A_1
29	51	355	320	345	418	446	399	22	528	123	78	96	207	228	171	465	489	
50	354	307	344	420	442	401	21	46	506	527	125	74	98	206	215	170	464	
350	309	343	437	441	400	8	45	52	466	505	514	124	73	115	205	217	166	
308	330	436	443	396	10	44	69	349	165	483	504	516	120	75	114	192	216	
332	435	460	395	9	31	68	351	304	212	167	482	491	515	119	92	113	194	
422	459	397	5	33	67	368	303	331	193	211	184	481	493	511	121	91	100	
458	414	4	32	54	367	305	327	424	102	189	213	483	468	492	510	138	90	
413	6	28	56	366	322	326	423	445	77	101	188	230	182	470	488	512	137	
23	27	55	353	321	328	419	447	412	136	79	97	190	229	169	469	487	529	

1	43	61	361	301	340	433	451	394	118	83	111	202	209	177	475	503	507	(9)
410	14	26	47	365	314	338	416	455	87	94	200	222	181	461	486	520	134	
453	393	18	42	60	348	300	342	429	107	204	208	164	474	502	524	117	85	行 B_7
415	457	406	16	25	64	364	313	325	187	221	180	478	485	522	130	89	93	列 B_3
341	428	440	392	20	38	62	347	317	225	163	476	498	526	116	72	106	203	
315	324	432	456	405	3	24	66	360	176	480	484	509	129	88	110	186	223	
346	319	337	430	439	409	19	37	49	463	497	525	133	71	108	199	227	162	A_0
65	359	302	323	434	452	407	2	41	501	508	131	84	112	185	210	175	479	
39	48	363	318	336	417	438	411	15	521	135	70	95	198	226	179	462	499	
31	68	351	304	332	435	460	395	9	515	119	92	113	194	212	167	482	491	
51	355	320	345	418	446	399	22	29	489	528	123	78	96	207	228	171	465	
368	303	331	422	459	397	5	33	67	481	493	511	121	91	100	193	211	184	
307	344	420	442	401	21	46	50	354	170	464	506	527	125	74	98	206	215	
327	424	458	414	4	32	54	367	305	213	483	468	492	510	138	90	102	189	
437	441	400	8	45	52	350	309	343	205	217	166	466	505	514	124	73	115	
445	413	6	28	56	366	322	326	423	101	188	230	182	470	488	512	137	77	
396	10	44	69	349	308	330	436	443	75	114	192	216	165	483	504	516	120	
23	27	55	353	321	328	419	447	412	136	79	97	190	229	169	469	487	529	

1	43	61	361	301	340	433	451	394	118	83	111	202	209	177	475	503	507	(10)
407	2	41	65	359	302	323	434	452	84	112	185	210	175	479	501	508	131	
456	405	3	24	66	360	315	324	432	110	186	223	176	480	484	509	129	88	行 B_7
415	457	406	16	25	64	364	313	325	187	221	180	478	485	522	130	89	93	列 B_6
338	416	455	410	14	26	47	365	314	222	181	461	486	520	134	87	94	200	
318	336	417	438	411	15	39	48	363	179	462	499	521	135	70	95	198	226	
346	319	337	430	439	409	19	37	49	463	497	525	133	71	108	199	227	162	A_0
62	347	317	341	428	440	392	20	38	498	526	116	72	106	203	225	163	476	
42	60	348	300	342	429	453	393	18	524	117	85	107	204	208	164	474	502	
28	56	366	322	326	423	445	413	6	512	137	77	101	188	230	182	470	488	
54	367	305	327	424	458	414	4	32	492	510	138	90	102	189	213	483	468	
368	303	331	422	459	397	5	33	67	481	493	511	121	91	100	193	211	184	
304	332	435	460	395	9	31	68	351	167	482	491	515	119	92	113	194	212	
330	436	443	396	10	44	69	349	308	216	165	483	504	516	120	75	114	192	
437	441	400	8	45	52	350	309	343	205	217	166	466	505	514	124	73	115	
442	401	21	46	50	354	307	344	420	98	206	215	170	464	506	527	125	74	
399	22	29	51	355	320	345	418	446	78	96	207	228	171	465	489	528	123	
23	27	55	353	321	328	419	447	412	136	79	97	190	229	169	469	487	529	

参 考 文 献

1. 李俨. 中算史论丛(第一集). 北京: 科学出版社, 1954
2. 高源. 奇妙的幻方. 西安: 陕西师范大学出版社, 1995
3. 刘辑熙. 奇妙的幻方. 重庆: 重庆大学出版社, 1996
4. 李抗强. 数学趣味幻方. 香港天马图书公司, 2003
5. 曹陵. 幻方再论. 香港天马图书有限公司, 2003
6. 中国幻方研究者协会. 中国幻方(第一期). 香港天马图书有限公司, 2006
7. 中国幻方研究者协会. 中国幻方(第二期). 香港天马图书有限公司, 2006
8. 中国幻方研究者协会. 中国幻方(第三期). 香港天马图书有限公司, 2007
9. 中国幻方研究者协会. 中国幻方(第四期). 香港天马图书有限公司, 2007